Πεπλεγμένη μέθοδος Runge-Kutta (2-σταδίων) (Ημιπεπλεγμένη)

$$
\begin{array}{cc|c}
\mu & 0 & \mu \\
1-2\mu & \mu & 1-\mu \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η τάξη ακρίβειας

$p = 2$, $\mu \in \mathbb{R}$ & $p = 3$ $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$t_{n,1} = t_n + \mu h \qquad t_{n,2} = t_n + (1-\mu)h$$

$$y_{n,1} = y(t_n) + \mu h\, f(t_{n,1}, y_{n,1}) \qquad y_{n,2} = y(t_n) + h\big((1-2\mu) f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \mu f(t_{n,2}, y_{n,2})\big)$$

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \qquad k_1 = f(t_{n,1}, y_{n,1}), \quad k_2 = f(t_{n,2}, y_{n,2})$$

Ανάπτυγμα Taylor των k_1 & k_2 με κέντρο $(t_n, y(t_n))$

$$\tilde{f} = f(t_n, y(t_n)), \qquad \tilde{f}_t = f_t(t_n, y(t_n))$$

$$k_1 = f(t_{n,1}, y_{n,1}) = f(t_n, y_{n,1}) + \mu h f_t(t_n, y_{n,1}) + \frac{(\mu h)^2}{2} f_{tt}(t_n, y_{n,1}) + O(h^3)$$

$$= \hat{f} + \mu h k_1 \hat{f}_y + \frac{(\mu h k_1)^2}{2} \hat{f}_{yy} + O(h^3) + \mu h \left[\hat{f}_t + \mu h k_1 \hat{f}_{ty} + O(h^2) \right] + \frac{(\mu h)^2}{2} \left[\tilde{f}_{tt} + O(h) \right]$$

$$= \tilde{f} + \mu h \hat{f}_y \left[\hat{f} + \mu h k_1 \hat{f}_y + \mu h \tilde{f}_t + O(h^2) \right] + \frac{(\mu h)^2}{2} \left[\hat{f} + O(h) \right]^2 \hat{f}_{yy} + \mu h \hat{f}_t$$

$$+ (\mu h)^2 \tilde{f}_{ty} \left[\hat{f} + O(h) \right] + \frac{(\mu h)^2}{2} \hat{f}_{tt} + O(h^3)$$

$$= \tilde{f} + \mu h (\hat{f}_t + \hat{f} \hat{f}_y) + (\mu h)^2 \hat{f} \hat{f}_y^2 + (\mu h)^2 \tilde{f}_t \hat{f}_y + \frac{(\mu h)^2}{2} \hat{f} \hat{f}_{yy} + (\mu h)^2 \hat{f}_{ty} \hat{f} + \frac{(\mu h)^2}{2} \tilde{f}_{tt} + O(h^3)$$

$$= \hat{f} + \mu h (\hat{f}_t + \hat{f} \hat{f}_y) + \frac{(\mu h)^2}{2} \left[\hat{f}_{tt} + \hat{f} \hat{f}_{yy} + 2 \hat{f}_{ty} \hat{f} + 2 \hat{f}_y (\hat{f}_t + \hat{f} \hat{f}_y) \right] + O(h^3)$$

$$K_2 = f(t_{n,2}, y_{n,2}) = f(t_n, y_{n,2}) + (1-\mu) h f_t(t_n, y_{n,2}) + \frac{(1-\mu)^2 h^2}{2} f_{tt}(t_n, y_{n,2}) + O(h^3)$$

$$= \tilde{f} + h((1-2\mu)k_1 + \mu k_2)\hat{f}_y + \frac{h^2}{2}((1-2\mu)k_1 + \mu k_2)^2 \hat{f}_{yy} + O(h^3)$$

$$+ (1-\mu)h\left[\hat{f}_t + h((1-2\mu)k_1 + \mu k_2)\tilde{f}_{ty} + O(h^2)\right] + \frac{(1-\mu)^2 h^2}{2}\tilde{f}_{tt} + O(h^3)$$

$= \dots\dots$

$$= \hat{f} + h(1-\mu)(\hat{f}_t + \hat{f}\tilde{f}_y) + \frac{h^2}{2}\left\{(1-\mu)^2\tilde{f}_{tt} + (1-\mu)^2\hat{f}_{yy}\tilde{f} + 2(1-\mu)^2\hat{f}\tilde{f}_{ty}\right\}$$

$$+ h^2\left\{(1-2\mu)\mu + \mu(1-\mu)\right\}(\hat{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y) + O(h^3)$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \right\}$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\tilde{f} + \frac{h^2}{2}(\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y) + \frac{h^3}{6}\left\{ \tilde{f}_{tt} + \tilde{f}^2\tilde{f}_{yy} + 2\tilde{f}_{ty}\tilde{f} + f_y(f_t + f f_y) \right\} + O(h^4)$$

Οι παράγοντες του $y(t_n) + \frac{h}{2}(k_1+k_2)$, ως προς τις δυνάμεις h.

$h^0 : y(t_n)$, $h^1 : \tilde{f}$, $h^2 : \frac{\mu}{2}(\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y) + \frac{(1-\mu)}{2}(\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y)$

Ισχύουν για μετR. $\delta_n = O(h^3)$, ισχύουν τάξη ακρίβειας 2.

$h^3: \frac{\mu^2}{4}\left(\hat{f}_{tt} + \hat{f}_{yy}\hat{f}\hat{f} + 2\hat{f}\hat{f}_{ty} + 2\hat{f}_y\left(\hat{f}_t + \hat{f}_y\hat{f}\right)\right)$

$+ \frac{(1-\mu)^2}{4}\left(\hat{f}_{tt} + \hat{f}_{yy}\hat{f} + 2\hat{f}\hat{f}_{ty}\right) \quad + \frac{1}{2}(2-3\mu)\mu\left(\hat{f}_t + \hat{f}\hat{f}_y\right)\hat{f}_y$

Για να μπορέσω να απαλείψω τους όρους h^3

$$\frac{\mu^2}{4} + \frac{(1-\mu)^2}{4} = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}\left(\mu(2-3\mu) + \mu^2\right) = \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{4}(\mu^2 + \mu^2 + 1 - 2\mu) = \frac{1}{6}$ ή $2\mu^2 - 2\mu + 1 = \frac{2}{3}$ ή $\mu^2 - \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$, λύση $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

Τα ίδια μ ικανοποιούν και τη 2η σχέση!!

Τότε η τάξη ακριβείας της μεθόδου είναι $p = 3$.