Πρόταση A: Έστω μια μέθοδος R-K και $h < 1/\gamma$.

$$\gamma = L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$$

όπου L σταθερά Lipschitz (ομοιόμορφη σταθερά Lipschitz) για τη f.

και έστω $y_0, \dots, y_N$ οι προσεγγίσεις που παίρνουμε με βάση τη μέθοδο RK

και επιπλέον θεωρούμε τις ποσότητες $z_0, \dots, z_N$ τ.ω.

$$z_0 \in \mathbb{R}$$

$$z_{n,i} = z_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, z_{n,j}) \quad , 1 \le i \le q$$

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, z_{n,i}) + \rho_n$$

όπου $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}$, δοσμένοι αριθμοί

Τότε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h τ.ω.

$$\max_{1 \le n < N} |y_n - z_n| \le C_1 |y_0 - z_0| + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho_n|$$

Έστω R-K q-σταδίων

$$\max_{0\le n\le N-1} |\delta_n| \le C h^{p+1} \qquad (*)$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, Y_{n,i}) \right\}$$

$$Y_{n,i} = y(t_n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, Y_{n,j}), \qquad 1\le i\le q$$

Θεώρημα: Έστω ότι η μέθοδος RK έχει τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης που ικανοποιεί την $(*)$ για μια αρκετά ομαλή λύση ενός ΠΑΤ. Επίσης θεωρούμε h κατάλληλα μικρό σύμφωνα με την πρόταση (A). Τότε αν y_n είναι οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο R-K

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)| \le C h^p .$$

Απόδειξη: Έχουμε οι ακολουθίες y_n και $y(t_n)$, $n=0,\dots,N$ ικανοποιούν τις υποθέσεις της Πρότασης Α, με $\rho_n = \delta_n$. (τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης)

Οπότε έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)| \le C_1 \cancelto{0}{|y_0 - y(t_0)|} + C_2 \frac{1}{h} \max_{0\le n\le N} |\delta_n|$$

$$\le C h^p$$

Απόλυτη Ευστάθεια Runge-Kutta.

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \\ \hline 1-\theta & \theta & \end{array} \qquad a = \frac{1}{2\theta}$$

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad , \quad \lambda < 0$$

$$t_{n,1} = t_n \ , \ t_{n,2} = t_n + ah$$

$$y_{n,1} = y_n \ , \ y_{n,2} = y_n + ha f(t_{n,1}, y_{n,1}) = y_n + ha f(t_n, y_n) = y_n + ah\lambda y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + (1-\theta) h f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \theta h f(t_{n,2}, y_{n,2})$$

$$= y_n + (1-\theta) h\lambda y_n + \theta h\lambda (y_n + ah\lambda y_n) = y_n \left(1 + (1-\theta) h\lambda + \theta h\lambda + a\theta (h\lambda)^2\right)$$

$$= y_n \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right) = y_n r(h\lambda) \quad , \quad r(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} \quad , \quad \hat{h} = h\lambda.$$

Για να είναι απόλυτα ευσταθής θα πρέπει $|r(\hat{h})| \le 1$.

$$\Rightarrow \quad -1 \le 1 + \hat{h} + \hat{h}^2/2 \le 1$$

$$1 + \hat{h} + \hat{h}^2/2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{h}\,(1 + \hat{h}/2) \le 0 \quad \text{ή} \quad \hat{h} \geq -2$$

$$-1 \le 1 + \hat{h} + \hat{h}^2/2 \quad \Rightarrow \quad 4 + 2\hat{h} + \hat{h}^2 > 0$$

$$\text{ή} \quad \underline{3 + (\hat{h}+1)^2} > 0$$

Το διάστημα απόλυτης ευστάθειας $[-2, 0]$.

Γενική μορφή R-K. (q σταδίων)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y_{n,i} = y_n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y_{n,j} \quad , \quad 1 \le i \le q$$

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} b_i\, y_{n,i}$$

Για να βρούμε τα $y_{n,i}$, $i=1,\dots,q$ θεωρούμε ότι το h κατάλληλα μικρό.
$q \times q$ σύστημα

$$\begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + h\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{q1} & & a_{qq} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,q} \end{pmatrix} \rightarrow (I - h\lambda A)\begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας $(I - hλA)$ είναι αντιστρέψιμος, θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,q} \end{pmatrix} = (I - hλA)^{-1} \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= y_n (I - hλA)^{-1} e$$

$$\sum_{i=1}^{q} b_i y_{n,i} = b^T \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,q} \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

$$= y_n b^T (I - hλA)^{-1} e$$

$$y_{n+1} = y_n + y_n hλ b^T (I - hλA)^{-1} e = y_n \Big[\underbrace{1 + hλ b^T (I - hλA)^{-1} e}_{r(hλ)} \Big]$$

$$r(z) = 1 + z b^T (I - zA)^{-1} e$$

Να είναι καλά ορισμένη για κάθε μιγαδικό z, αρκεί να υπάρχει ο $(I - zA)^{-1}$

Επομένως αν $\frac{1}{z}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A τότε $(I - zA)$ αντιστρέφεται.

Αν δούμε τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$(I - zA) w = e$$

Μπορούμε να δούμε ότι το $r(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση του z.

Με τη μέθοδο του Crammer μπορούμε να γράψουμε τη λύση w_i

Για να είναι απόλυτα ευσταθής μια μέθοδος RK θα πρέπει $|r(z)| \leq 1$

Σε μια άμεση μέθοδο RK (q-σταδίων)

Ο πίνακας
$$I - zA = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -za_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -za_{q1} & \cdots & -za_{qq-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Το $r(z)$ θα είναι μια πολυωνυμική έκφραση του z, με βαθμό το πολύ q

Είναι σαφές $|r(z)| \leq 1$, $r \in \mathbb{P}_q$ ώστε άρα δεν θα ισχύει για $|z| \to +\infty$.

Επομένως μια άμεση R-K. (q-σταδίων) δεν μπορεί να είναι A-ευσταθής.

Γενική RK (q-σταδίων)

$$y_{n+1} = r(h\lambda)\, y_n$$

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(t) = e^{\lambda t}, \quad t_n = nh$$

$$y(t_{n+1}) = e^{\lambda t_{n+1}} = e^{\lambda(n+1)h} = e^{\lambda h} e^{\lambda n h} = e^{\lambda h} e^{\lambda t_n} = e^{\lambda h} \cdot y(t_n)$$

Για τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \{ r(h\lambda)\, y(t_n) \} = y(t_n)\left[e^{\lambda h} - r(h\lambda) \right]$$

<u>Η r μια ρητή προσέγγιση της e</u>

Αν έχουμε μια άμεση μέθοδο RK, με τάξη ακρίβειας p

$$|\delta_n| \le C_1 h^{p+1} \quad \text{ή} \quad \delta_n = O(h^{p+1})$$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \dots + \frac{1}{p!} z^p + O(z^{p+1})$$

$$r(h\lambda) = e^{h\lambda} + \delta_n = 1 + h\lambda + \dots + \frac{1}{p!} (h\lambda)^p + C_{p+1} (h\lambda)^{p+1} + \dots + C_q (h\lambda)^q$$

$$r(z) = 1 + z + \dots + \frac{1}{p!} z^p + C_{p+1} z^{p+1} + \dots + C_q z^q$$