Άσκηση: Θεωρούμε τη μέθοδο R-K.

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \\ \hline 1-\theta & \theta & \end{array}$$

Χρησιμοποιείστε αυτή τη μέθοδο για να προσεγγίσετε τη λύση του ΠΑΤ $y'(t)=t^2$, $0\le t\le 1$, $y(0)=0$. Βρείτε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης.

Η ακριβής λύση του προβλήματος $y(t)=t^3/3$. Υπάρχουν $a,\theta \in \mathbb{R}$ τ.ω. η μέθοδος να υπολογίζει ακριβώς τη λύση του ΠΑΤ; ($\delta_n=0$)

Απόδειξη: $y(t_{n+1}) = \dfrac{t_{n+1}^3}{3} = \dfrac{(n+1)^3h^3}{3}$ $\quad y(t_n)=\dfrac{n^3h^3}{3}$

$$Y_{n,1}=y(t_n)\ ,\quad Y_{n,2}=y(t_n)+a\cdot h\, f(t_{n,1},Y_{n,1}) = y(t_n)+a\cdot h\,(t_{n,1})^2 = y(t_n)+a h t_n^2$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + (1-\theta)h\, f(t_{n,1},Y_{n,1}) + \theta h\, f(t_{n,2},Y_{n,2}) \right\}$$

$$\delta_\eta = \frac{(n+1)^3 h^3}{3} - \left\{ \frac{n^3 h^3}{3} + h(1-\vartheta)\, n^2 h^2 + h\vartheta \cdot (nh + ah)^2 \right\}$$

$$= \frac{(n+1)^3 h^3}{3} - h^3 \left\{ \frac{n^3}{3} + (1-\vartheta) \cdot n^2 + \vartheta\left(n^2 + a^2 + 2na\right) \right\}$$

$$= h^3 \left(\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \left(n^3 + 3n^2 - 3n^2\vartheta + 3\vartheta n^2 + 3a^2\vartheta + 6na\vartheta\right)}{3} \right)$$

$$= h^3 \, \frac{3n + 1 - 3a^2\vartheta - 6na\vartheta}{3} =$$

Για να είναι $\delta_\eta = 0$ θα πρέπει $3n - 6na\vartheta = 0$ ή $2a\vartheta = 1$

και $3a^2\vartheta = 1$

Άρα $a\vartheta = 1/2$ και τότε $3a(a\vartheta) = 1$ ή $3a \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = 2/3$

τότε $\vartheta = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

-Άσκηση: Δείξτε ότι μια μέθοδος RK δεν συγκλίνει για το πρόβλημα

$$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

παρά μόνο αν $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Απόδειξη: $y(t) = t$

Συνεπώς για μια μέθοδο RK $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i}) = y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i$

Έστω ότι η μέθοδος συγκλίνει. Αν t^* και $nh = t_n \to t^*$ καθώς $n \to \infty$, $h \to 0$

θα έχουμε $y_n \to y(t^*) = t^*$

Αν $h = \frac{1}{N}$ και $s = \sum_{i=1}^{q} b_i$ τότε $y_0 = 0$, $y_1 = y_0 + hs = hs$, $y_2 = y_1 + hs = 2hs$

$y_N = N \cdot h \cdot s$. Οπότε επειδή η μέθοδος συγκλίνει $y_N \to y(1) = 1$, $h \to 0$.

$\underbrace{N \cdot h}_{1} \cdot s \to 1$ ή $s \to 1$, $\underline{\underline{s = 1}}$

Αν λοιπόν $s=1$, τότε για τα προσεγγίσματα θα έχουμε. $y_n = n \cdot h \cdot s = nh = t_n$

Οπότε αν $\underset{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}}{t_n} \to t^*$ θα έχουμε $y_n \to y(t^*)$ επειδή $y_n = t_n$ & $y(t^*) = t^*$.

Άσκηση: Δείξτε ότι οι μέθοδοι

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 2/3 & 0 & 2/3 \\
\hline
1/4 & 0 & 3/4 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
-1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
1/6 & 2/3 & 1/6 &
\end{array}
$$

έχουν την ίδια περιοχή απόλυτης ευστάθειας.

Απόδειξη: Για το πρόβλημα $y'(t)=\lambda y(t)$, $y(0)=1$.

Για την 1η μέθοδο: $y_{n,1}=y_n$, $y_{n,2}=y_n+h\lambda\frac{1}{3}y_n=y_n\left(1+\frac{h\lambda}{3}\right)$

$$y_{n,3}=y_n+h\lambda\frac{2}{3}\left(y_n\left(1+\frac{h\lambda}{3}\right)\right)=y_n\left(1+\frac{2}{3}h\lambda+\frac{2}{9}(h\lambda)^2\right)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{4}h\lambda y_n+\frac{3}{4}h\lambda\, y_n\left(1+\frac{2}{3}h\lambda+\frac{2}{9}(h\lambda)^2\right)=y_n\left(1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3\right)$$

Άρα για να βρούμε για τη 1η μεθόδους τη περιοχή απόλυτης ευστάθειας αρκεί $|r_1(z)| \le 1$, $r_1(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$

Για τη δεύτερη μέθοδο: $y_{n,1} = y_n$, $y_{n,2} = y_n\left(1+\frac{h\lambda}{2}\right)$, $y_{n,3} = y_n\left(1+h\lambda+(h\lambda)^2\right)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{6}y_n + \frac{2}{3}h\lambda\, y_n\left(1+\frac{h\lambda}{2}\right) + \frac{1}{6}h\lambda\, y_n\left(1+h\lambda+(h\lambda)^2\right)$$

$$= y_n\left(1 + h\lambda + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3\right) = y_n\, r_2(h\lambda).$$

$$r_2(z) = 1 + z + z^2\frac{1}{2} + z^3\frac{1}{6}$$

Συνεπώς το $r_1 \equiv r_2$ άρα οι μέθοδοι έχουν την ίδια περιοχή απόλυτης ευστάθειας