Άσκηση: Έστω $y'(t)=y(t)$ $\quad y(0)=1$ Δείξτε ότι η κλασσική μέθοδος RK έχει τάξη ακριβείας 4. (τουλάχιστον)

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 &
\end{array}
$$

Απόδειξη: Θέλω να δείξω ότι $\delta_n = O(h^5)$

$$Y_{n,1} = y(t_n)$$

$$Y_{n,2} = y(t_n) + \frac{h}{2} y(t_n) = y(t_n)\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

$$Y_{n,3} = y(t_n) + \frac{h}{2} Y_{n,2} = y(t_n) + \frac{h}{2}\left(1+\frac{h}{2}\right) y(t_n) = y(t_n)\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right)$$

$$Y_{n,4} = y(t_n) + h Y_{n,3} = y(t_n)\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + \frac{h}{6} Y_{n,1} + \frac{h}{3} Y_{n,2} + \frac{h}{3} Y_{n,3} + \frac{h}{6} Y_{n,4} \right\}$$

$$= y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(t_n) - y(t_n)\left\{ 1 + \frac{h}{6} + \frac{h}{3}\left(1+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{3}\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right) + \frac{h}{6}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{4}\right) \right\} + O(h^5)$$

$$\delta_y = y(t_n)\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right) - y(t_n)\left(1 + h\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{h^3}{6}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \frac{h^4}{6\cdot 4}\cdot 1\right) + O(h^5)$$

$$= O(h^5)$$

Άσκηση: Δείξτε ότι η RK

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

είναι συνεπής.

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι $\delta_n = O(h^2)$

$$Y_{n,1} = y(t_n), \quad Y_{n,2} = y(t_n) + h f(t_{n,1}, Y_{n,1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_{n,1}, Y_{n,1}) + \frac{h}{2} f(t_{n,2}, Y_{n,2}) \right\} \\ y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + O(h^2) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + O(h^2) \\ f(t_{n,1}, Y_{n,1}) = f(t_n, y(t_n)) \\ f(t_{n,2}, Y_{n,2}) = f(t_n + h, y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))) = f(t_n, y(t_n)) + O(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\delta_n = y(t_n) + h\,f(t_n, y(t_n)) + O(h^2)$$

$$- \left\{ y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + O(h^2) \right\} = O(h^2)$$

Άσκηση: Για τη μέθοδο RK

$$
\begin{array}{cc|c}
\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\
\hline
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

Δείξτε για το ΠΑΤ $y'(t) = y(t)$, $y(0) = 1$ έχει τάξη ακρίβειας (συνέπειας) 3.

$$(\delta_n = O(h^4))$$

Λύση:

$$J_{n,1} = y(t_n) + h\frac{5}{12}J_{n,1} - h\frac{1}{12}J_{n,2}$$

$$J_{n,2} = y(t_n) + h\frac{3}{4}J_{n,1} + h\frac{1}{4}J_{n,2}$$

Η προσέγγιση για το επόμενο σημείο t_{n+1},

$$y(t_n) + h\frac{3}{4}J_{n,1} + h\cdot\frac{1}{4}J_{n,2}$$

$$J_{n,1} = y(t_n) + h\frac{5}{12}\left(y(t_n) + h\frac{5}{12}J_{n,1} - h\frac{1}{12}J_{n,2}\right) - h\frac{1}{12}\left(y(t_n) + h\frac{3}{4}J_{n,1} + h\frac{1}{4}J_{n,2}\right)$$

$$= y(t_n) + h\,y(t_n)\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{12}\right) + h^2 J_{n,1}\left(\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \frac{3}{12\cdot 4}\right) - h^2 J_{n,2}\left(\frac{5}{12^2} + \frac{1}{12\cdot 4}\right)$$

$$= y(t_n) + h\,y(t_n)\,\frac{1}{3} + h^2\left(\frac{16}{12^2}J_{n,1} - \frac{8}{12^2}J_{n,2}\right)$$

$$= y(t_n) + h/_3\, y(t_n) + h^2\left(\frac{16}{12^2}\left(y(t_n) + O(h)\right) - \frac{8}{12^2}\left(y(t_n) + O(h)\right)\right)$$

$$= y(t_n) + \frac{h}{3}y(t_n) + h^2 \cdot \frac{1}{3\cdot 6}y(t_n) + O(h^3)$$

$$J_{n,2} = y(t_n) + h\frac{3}{4}\left(y(t_n) + \frac{h}{3}y(t_n) + O(h^2)\right) + \frac{h}{4}\left(y(t_n) + h\frac{3}{4}\left(y(t_n) + O(h)\right) + \frac{h}{4}\left(y(t_n) + O(h)\right)\right)$$

$$= y(t_n) + h\,y(t_n)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + h^2 y(t_n)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 4}\right) + O(h^3)$$

$$= y(t_n)\left(1 + h + h^2\frac{1}{2}\right) + O(h^3)$$

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + \frac{3}{4} h J_{n,1} + \frac{1}{4} h J_{n,2} \right\} \\
&= y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + O(h^4) \\
&\quad - \left\{ y(t_n) + \frac{3}{4} h y(t_n) \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{3 \cdot 6} \right) + \frac{1}{4} h y(t_n) \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right) \right\} \\
&= y(t_n) \left(1 + h + h^2/2 + h^3/3! \right) + O(h^4) \\
&\quad - y(t_n) \left(1 + h \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + h^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + h^3 \left(\frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 2} \right) \right) + O(h^4) \\
&= O(h^4)
\end{aligned}
$$