Προβληματα Συνοριακών Τιμών.

Ζητειται μια συναρτηση $u \in C^2[a,b]$ τ.ω.

$$(\Pi.\Sigma.T.-1) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$q, f \in C[a,b]$ και $q(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$

<u>Θεωρημα</u>: Υπαρχει μοναδική συναρτηση $u \in C^2[a,b]$ η οποια ειναι λυση του προβληματος $(\Pi.\Sigma.T)$

Παρατήρηση: Έστω g να παίρνει και αρνητικές τιμές, τότε το Π.Σ.Τ δεν έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα:
$$\begin{cases} -u''(x) - \pi^2 u(x) = 0 & \text{στο } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

έχει λύση τη $u(x) = c \cdot \sin(\pi x)$, $c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα:
$$-u''(x) - \pi^2 u(x) = \pi^2 \quad \text{στο } (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Η $u(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) - 1$ λύνει τη παραπάνω διαφορική εξίσωση.

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cos(0) - 1 = c_2 - 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1 \\ u(1) = c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) - 1 = -c_2 - 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -1 \end{array}\right\} \underline{\text{αδύνατο}}$$

Παρατήρηση: Όταν προκαθορίζουμε τις τιμές της λύσης μιας Δ.Ε. στα άκρα του διαστήματος που θέλουμε να λύσουμε, τότε αυτές οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται συνθήκες Dirichlet

Στο Π.Σ.Τ που είδαμε αυτές λέγονται ομογενείς συνθήκες Dirichlet

Έστω το Π.Σ.Τ. με μη-ομογενείς συνθήκες Dirichlet.

$$(\Pi.\Sigma.T\ 2)\quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x) & \text{στο } [a,b] \\ u(a) = c\ ,\quad u(b) = d & \text{με } c,d \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Το (Π.Σ.Τ-2) ανάγεται εύκολα σε ένα πρόβλημα της μορφής (Π.Σ.Τ-1)

Ας θεωρήσουμε $w(x) = c\,\dfrac{b-x}{b-a} + d\,\dfrac{a-x}{a-b}\ ,\quad x \in [a,b]$

Η w ικανοποιεί $w(a) = c$ και $w(b) = d$

Έστω ότι u ικανοποιεί το (Π.Σ.Τ-2), και θεωρούμε την v

$$v = u - w$$

Έχουμε $v(a) = u(a) - w(a) = 0$ & $v(b) = u(b) - w(b) = 0$

$$\begin{aligned} -v''(x) + q(x)v(x) &= -(u''(x) + w''(x)) + q(x)(u(x) + w(x)) \\ &= -u''(x) + q(x)u(x) + q(x)w(x) \\ &= f(x) + q(x)w(x) \end{aligned}$$

Συνεπώς για $g = f - qw$ η v είναι λύση του Π.Σ.Τ.

$$\begin{cases} -v''(x) + q(x)v(x) = g(x) \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$$

Επομένως αν το v λύνει το παραπάνω πρόβλημα. τότε η συνάρτηση

$$u = v + w$$ λύνει το (Π.Σ.Τ. -2)

Μέθοδοι Πεπερασμένων Διαφορών.

Αν έχουμε $v \in C^4[a,b]$, $x \in (a,b)$ και $h > 0$ τ.ω $(x-h, x+h) \subset [a,b]$ από το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο x παίρνουμε

$$v(x+h) = v(x) + h v'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + \frac{h^3}{6} v^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} v^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$v(x-h) = v(x) - h v'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) - \frac{h^3}{6} v^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} v^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

Προσθέτοντας

$$v(x-h) + v(x+h) = 2v(x) + h^2 v''(x) + \frac{h^4}{24} \left(v^{(4)}(\xi_1) + v^{(4)}(\xi_2) \right)$$

Από το θεώρημα ανάπτυξης έχουμε

$$u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) = h^2 u''(x) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h)$$

Άρα $$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |u^{(4)}(\xi)|$$

Για κατάλληλα μικρό h η $u''(x)$ προσεγγίζεται από τη διαφορά

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

και το τοπικό σφάλμα $O(h^2)$.

Έστω $h = \frac{b-a}{N+1}$ και $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τις τιμές U_i, $i = 0, \dots, N+1$
οι οποίες $U_i \approx u(x_i)$, $i = 0, \dots, N+1$.

$$U_0 = u(x_0) = u(a) = 0, \quad U_{N+1} = u(x_{N+1}) = u(b) = 0$$

Οι τιμές U_i θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση.

$$(*) \quad -\frac{1}{h^2}\left(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}\right) + q(x_i)\, U_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

Προκύπτει λόγω της

$$-\frac{1}{h^2}\Big(u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)\Big) + q(x_i)\,u(x_i) \approx f(x_i)$$

Οι εξισώσεις (*) οδηγούν στο εξής γραμμικό σύστημα.

Θέτουμε $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$ ώστε:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}\left(2U_1 - U_2\right) + q(x_1)U_1 = f(x_1) \\ &\frac{1}{h^2}\left(-U_1 + 2U_2 - U_3\right) + q(x_2)U_2 = f(x_2) \\ &\qquad \vdots \\ &\frac{1}{h^2}\left(-U_{N-1} + 2U_N\right) + q(x_N)U_N = f(x_N) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \cdot U = F$$

όπου

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 + h^2 q(x_2) & -1 & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & 0 & & -1 & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

A τριδιαγώνιος πίνακας, A συμμετρικός.