Σύγκλιση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

Π.Σ.Τ.
$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x) & x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$U_i \approx u(x_i)$, $i=0,\dots,N+1$, $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,N+1$, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$

$U_0 = U_{N+1} = 0$

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i=1,\dots,N.$$

$$AU = F, \quad A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2+h^2q(x_N) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Θεώρημα: Έστω U_i, $i=0,\dots,N+1$ οι τιμές που δίνει η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για το Π.Σ.Τ. και $g_{min} = \min\limits_{x\in[a,b]} g(x) > 0$. Τότε υπάρχει $C>0$ ανεξάρτητη του h τ.ω.

$$\max_{0\le i\le N+1} |U_i| \le C \cdot \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Απόδειξη:

$$\left(2 + h^2 g(x_i)\right) U_i = U_{i+1} + U_{i-1} + h^2 f(x_i), \quad i=1,\dots,N$$

$$\left(2 + h^2 g_{min}\right) |U_i| \le |U_{i+1}| + |U_{i-1}| + h^2 |f(x_i)|$$

$$\le 2 \max_{0\le i\le N+1} |U_i| + h^2 \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad i=1,\dots,N.$$

$$\left(2 + h^2 g_{min}\right) \max_{0\le i\le N+1} |U_i| \le 2 \max_{0\le i\le N+1} |U_i| + h^2 \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω U_i $i=0,\ldots,N+1$ οι τιμές που δίνει η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για το Π.Σ.Τ και η u είναι η ακριβής λύση του Π.Σ.Τ. Αν $q_{min} = \min_{x\in[a,b]} q(x) > 0$

τότε υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη του h τ.ω.

$$\max_{0\le i\le N+1} |U_i - u(x_i)| \le C h^2$$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε $E_i = U_i - u(x_i)$, $i=0,\ldots,N+1$ $\left(E_0 = E_{N+1} = 0\right)$

Επίσης ισχύει

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + \rho_i$$

$$\max_{1\le i\le N} |\rho_i| \le C h^2 \max_{a\le x\le b} |u^{(4)}(x)|$$

Άρα για E_i ισχύει $-\dfrac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{h^2} + q(x_i)E_i = -\rho_i$

Έχουμε τώρα $(2+h^2 q(x_i)) E_i = E_{i+1} + E_{i-1} - h^2 \rho_i$

$$(2+h^2 q_{min})|E_i| \leq |E_{i+1}| + |E_{i-1}| + h^2 \max_{1\leq i\leq N} |\rho_i|$$

$$(2+h^2 q_{min})|E_i| \leq 2 \max_{0\leq i\leq N+1} |E_i| + h^2 \max_{1\leq i\leq N} |\rho_i|$$

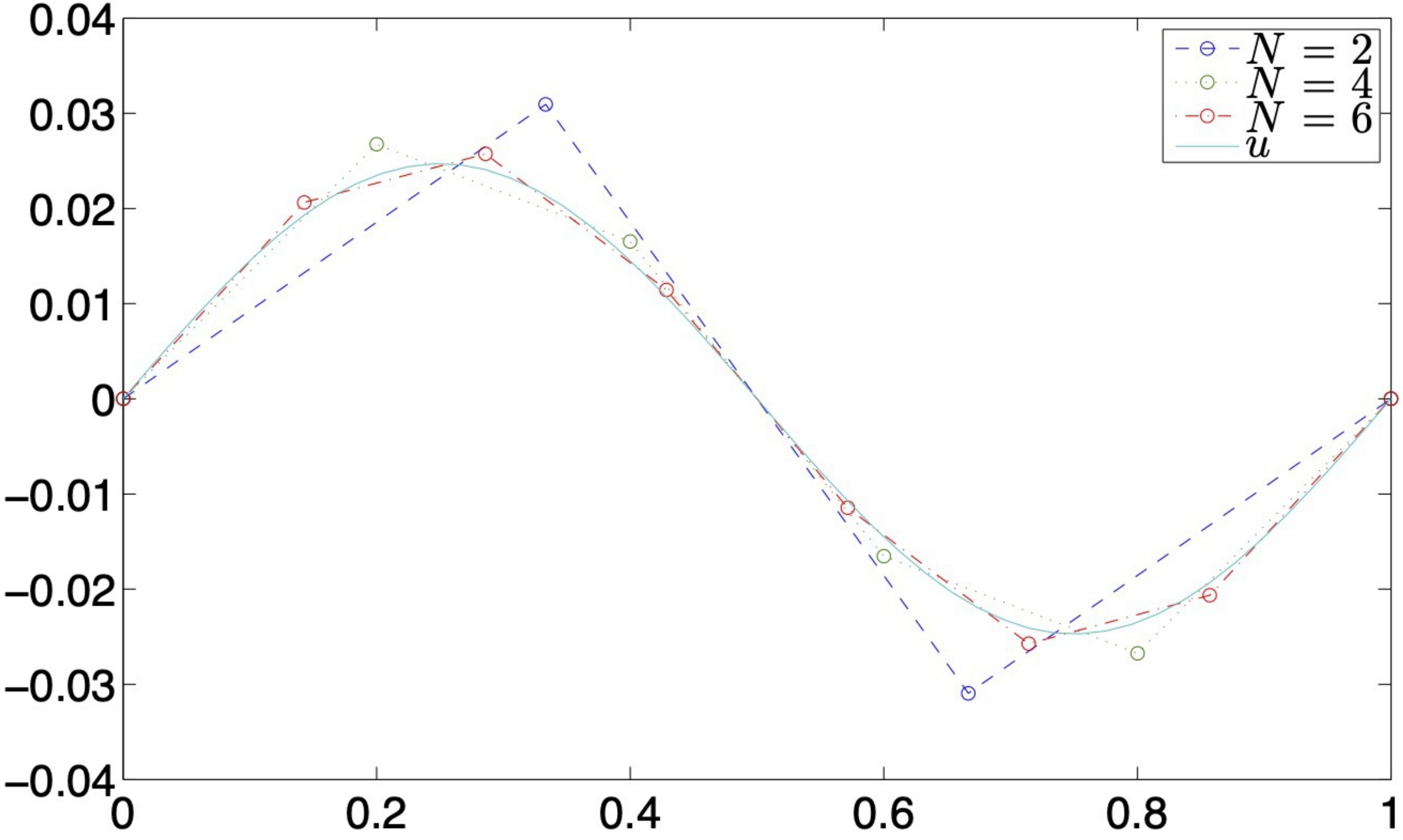
$$\Rightarrow \max_{0\leq i\leq N+1} |E_i| \leq C \max_{1\leq i\leq N} |\rho_i|$$

Άρα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

N	x_1	$\lvert U_1 - u(x_1)\rvert$	x_3	$\lvert U_3 - u(x_3)\rvert$	$\max\limits_{0\le i\le N+1} \lvert U_i - u(x_i)\rvert$
5	0.2	0.0051	0.6	0.046	0.0080
7	0.1429	0.0021	0.4286	0.0072	0.0072
9	0.1111	0.0010	0.3333	0.0056	0.0070
11	0.0909	0.0005	0.2727	0.0041	0.0069

$$-u''(x) + u(x) = \sin(2\pi x) \qquad 0 \le x \le 1 \quad u(0) = u(1) = 0$$

$$u(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{1 + 4\pi^2}$$


0.04
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
−0.03
−0.04
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
N = 2
N = 4
N = 6
u

Θεωρούμε τώρα το Π.Σ.Τ. (ομογενείς συνοριακές τιμές Dirichlet)

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N+1$$

$$-u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})\right) \simeq u''(x_i)$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2) \qquad \xi_2 \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2h u'(x_i) + \frac{h^3}{6}\left(u^{(3)}(\xi_1) + u^{(3)}(\xi_2)\right)$$

$$= 2h u'(x_i) + 2\frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi) \quad , \quad \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = u'(x_i) + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\xi)$$

Επομένως θα θεωρήσουμε ως $U_i \approx u(x_i)$

$$-\frac{1}{h^2}\left(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}\right)+p(x_i)\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}+q(x_i)U_i=f(x_i), \quad i=1,\dots,N$$

$$U_0=U_{N+1}=0.$$

Αυτό γράφεται ως γραμμικό σύστημα με

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+q(x_1)h^2 & -1+p(x_1)\frac{h}{2} & 0 & & 0 \\ -1-p(x_2)\frac{h}{2} & 2+q(x_2)h^2 & -1+p(x_2)\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -1+p(x_{N-1})\frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1-p(x_N)\frac{h}{2} & 2+q(x_N)h^2 \end{pmatrix}$$

$$AU = F \quad , \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Κριτηριο για να εχω <u>ευσταθεια</u>

$$\max_{x \in [a,b]} |p(x)| \cdot \frac{h}{2} < 1 \qquad \text{τοτε}$$

$$\max_{0 \le i \le N+1} |U_i - u(x_i)| \le C h^2 .$$

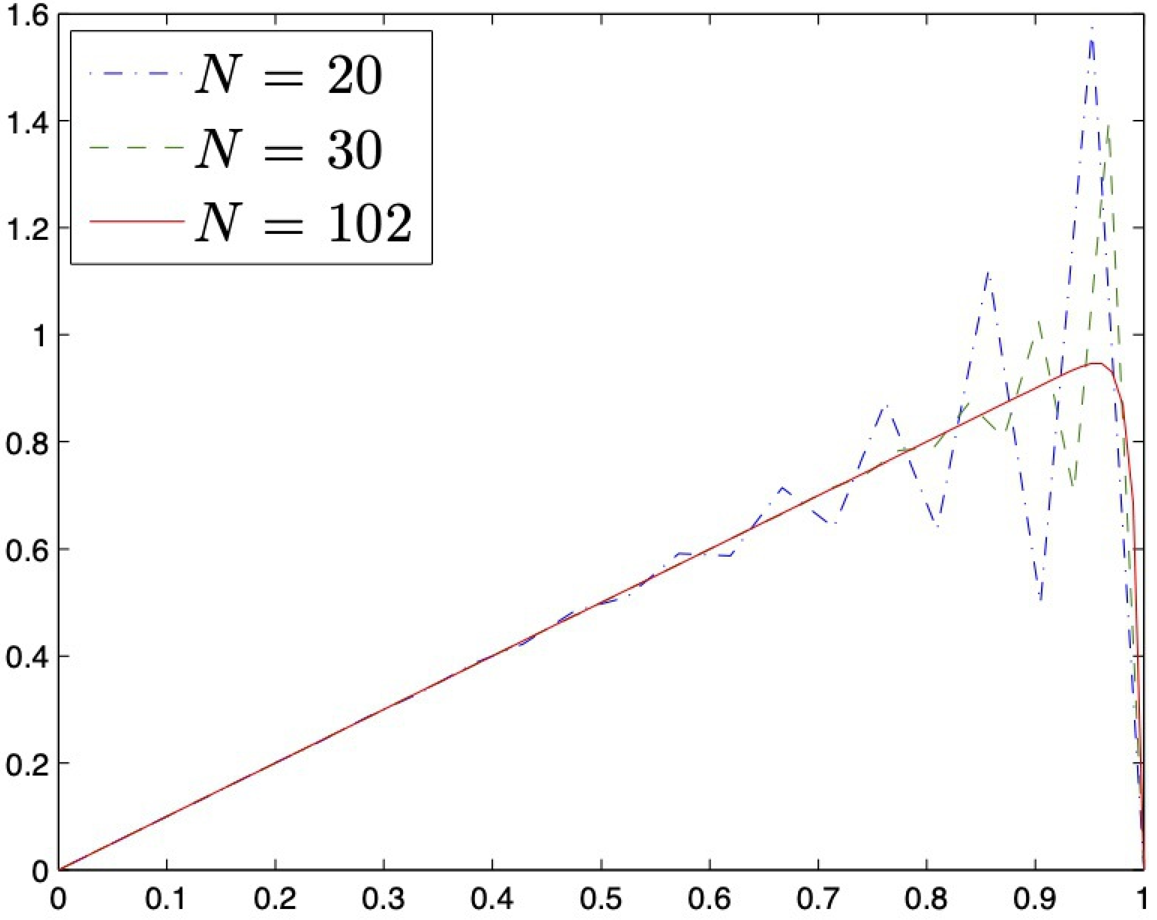
$$-u''(x) + pu'(x) + u(x) = f(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

$$p = 200 \;, \qquad f(x) = 9900\,x^{98} + p(1 - 100\,x^{99}) + x - x^{100}$$

$$u(x) = x - x^{100}$$

$$h = \frac{1}{N+1} \qquad p \cdot \frac{h}{2} < 1 \;, \qquad \frac{200}{2} \cdot h = \frac{100}{N+1} < 1 .$$



N = 20
N = 30
N = 102
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1