Ευστάθεια Π.Α.Τ.

Θεωρούμε 2 Π.Α.Τ. (Ίδια Δ.Ε. διαφορετικές αρχ. τιμές)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

f ικανοποιεί την "ολική" συνθήκη Lipschitz

$$\exists\, L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow$ εξασφαλίζει την ύπαρξη & μοναδικότητα των λύσεων y & z

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε $|\varepsilon(t)|$

$$\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t)$$

$$= f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

$$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big)\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2(t)\right) = \varepsilon'(t)\,\varepsilon(t) \leq |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\,|\varepsilon(t)|$$

$$\leq L\,|\varepsilon(t)|^2 = L\,|\varepsilon^2(t)| = L\,\varepsilon^2(t)$$

$$\varphi(t) = \varepsilon^2(t)$$

$$\varphi'(t) - 2L\varphi(t) \leq 0 \qquad t \in [a,b]$$

Ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2Lt}

$$e^{-2Lt}\varphi'(t) - 2Le^{-2Lt}\varphi(t) \leq 0$$

ή $$\frac{d}{dt}\left(e^{-2Lt}\varphi(t)\right) \leq 0$$

Η $e^{-2Lt}\varphi(t)$ φθίνει $[a,b]$

$$e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a)\ , \quad a\leq t\leq b$$

$$\varphi(t)=\varepsilon^2(t)$$

$$e^{-2Lt}\varepsilon^2(t) \leq e^{-2La}\varepsilon^2(a)$$

ή $$e^{-Lt}|\varepsilon(t)| \leq e^{-La}|\varepsilon(a)|$$

$$|\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)} |\varepsilon(a)|$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$$

$$|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)} |y_0 - z_0|, \quad t \in [a, b]$$

$$\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

Υποθέτουμε f ικανοποιεί "μονοπλευρη" συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\big(f(t,y_1) - f(t,y_2)\big)(y_1 - y_2) \leq 0$$

$$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Αν η f είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη δεύτερη μεταβλητή

$$f(t,y_1) \geq f(t,y_2), \quad y_1 < y_2$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$$

"Υποθέτουμε ότι y, z υπάρχουν"

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

$$\varepsilon'(t)\varepsilon(t) = \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big)\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2(t)\right) = \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big)\big(y(t) - z(t)\big) \leq 0$$

Άρα η $\varepsilon^2(t)$ φθίνουσα

$$\varepsilon^2(t) \le \varepsilon^2(a)$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon(t)| \le |\varepsilon(a)| \qquad , \; t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad \max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le |y_0 - z_0|$$

Η ευστάθεια του ΠΑΤ.

αν ξέρουμε την ύπαρξη της λύσης στο $[a,b]$

τότε ισχύει η μοναδικότητα.

Αν $z_0 = y_0$ τότε $z(t) \equiv y(t)$?

Ισχύει

Αν η f ικανοποιεί την "μονόπλευρη" συνθήκη του Lipschitz τότε το Π.Α.Τ. έχει λύση στο $[a,b]$.

Αν η f είναι γραμμική συνάρτηση ως προς y

$$f(t,y) = \lambda(t)\, y + \mu(t)$$

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \lambda(t)(y_1 - y_2)$$

Για τη "μονόπλευρη" συνθήκη του Lipschitz αρκεί να ξέρουμε τα μονότονια της $\lambda(t)$

Αν η $\lambda(t)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές ισχύει η "μονόπλευρη" συνθήκη του Lipschitz

Όπως το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f γραμμική, $f(t,s) = \lambda(t)s + \mu(t)$

$\lambda(t)$ αρνητικές τιμές ή 0

Τότε $|y(t)| \le |y_0|$, $\forall t \in [a,b]$