$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & 0 \le t \le t_f \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(t, y) = \lambda y + \mu(t) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ \mu \in C^1$$

Θεώρημα Για το Π.Α.Τ. (*) η μέθοδος του Euler συγκλίνει και το ολικό σφάλμα σε κάθε $t \in [0, t_f]$ είναι $O(h)$, $(|e_n| = O(h))$

Ολικό σφάλμα στο t,

h, $t_n = t$, $t_n = n \cdot h$, $h = \dfrac{t_f}{N}$

$e_n = y(t_n) - y_n$, $y(t_n) = y(t)$

Απόδειξη h, $\quad t_n = t_0 + n \cdot h = nh$, $\quad n = 0, \dots, N$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

$$= y_n + h(\lambda y_n + \mu(t_n)) = (1 + h\lambda) y_n + h\mu(t_n)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + h y'(t_n) + R_1(t_n)$$

$$= y(t_n) + h(\lambda y(t_n) + \mu(t_n)) + R_1(t_n)$$

$$= (1 + h\lambda) y(t_n) + h\mu(t_n) + R_1(t_n)$$

$$e_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = (1 + h\lambda) e_n + R_1(t_n) = (1 + h\lambda) e_n + T_{n+1}$$

$$T_{n+1} = R_1(t_n)$$

$$e_1 = (1+h\lambda)e_0 + T_1 = T_1$$

$$e_2 = (1+h\lambda)e_1 + T_2 = (1+h\lambda)T_1 + T_2$$

$$e_3 = (1+h\lambda)e_2 + T_3 = (1+h\lambda)^2 T_1 + (1+h\lambda)T_2 + T_3$$

$$\vdots$$

$$e_n = (1+h\lambda)^{n-1}T_1 + (1+h\lambda)^{n-2}T_2 + \dots + T_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (1+h\lambda)^{n-j} T_j$$

Παρατηρηση: $x \geq 0$, $1+x \leq e^{x}$

$$|1+h\lambda| \leq 1+h|\lambda| \leq e^{h|\lambda|}$$

$$|1+h\lambda|^{n-j} \leq e^{h(n-j)|\lambda|} = e^{t_{n-j}|\lambda|} \leq e^{t_f \cdot |\lambda|}$$

$$|R_1(t_j)| \leq h^2 \frac{1}{2} \cdot \max_{0 \leq \xi \leq t_f} |y''(\xi)| \leq Ch^2$$

$$R_1(t_j) = O(h^2)$$

$$|T_j| \leq Ch^2, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

$$|(1+h\lambda)^{n-j}T_j| \leq Ch^2 e^{|\lambda| t_f}$$

$$|e_n| \leq \sum_{j=1}^{n} |1+h\lambda|^{n-j} |T_j| \leq \sum_{j=1}^{n} Ch^2 e^{|\lambda| t_f}$$

$$\leq n \cdot h^2 C e^{|\lambda| t_f} = t_n \cdot h C e^{|\lambda| t_f}$$

$$\leq \underline{C} h \underline{t_f} \cdot \underline{e^{|\lambda| t_f}} = \tilde{C} h$$

$$e_n = O(h)$$