Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ ικανοποιεί την "ομαλή" συνθήκη Lipschitz

$\exists L>0 \ \forall t\in[a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$

$y_0, y_1, \dots, y_N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$t_n = a + nh, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad y_n \simeq y(t_n)$

Θεώρημα: $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$, πληροί τη συνθήκη ("ολική") του Lipschitz και y είναι λύση του Π.Α.Τ $y \in C^2[a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $y_0, \dots, y_N$ προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler, για τον διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$ τότε

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t_n) - y_n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|$$

Απόδειξη:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

$$e_n = y(t_n) - y_n$$

$$e_{n+1} = e_n + h\left(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)\right) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hL\left|y(t_n) - y_n\right| + \frac{h^2}{2} M$$

$$|e_{n+1}| \leq (1+hL)|e_n| + \frac{h^2 M}{2} \quad , \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$|e_1| \le (1+hL)\cancel{|e_0|}^{\,0} + \frac{Mh^2}{2}$$

$$|e_2| \le (1+hL)|e_1| + \frac{Mh^2}{2} \le (1+hL)\frac{Mh^2}{2} + \frac{Mh^2}{2}$$

$$|e_3| \le (1+hL)\left((1+hL)\frac{Mh^2}{2} + \frac{Mh^2}{2}\right) + \frac{Mh^2}{2}$$

$$= \frac{Mh^2}{2}\left(1 + (1+hL) + (1+hL)^2\right)$$

$$\vdots$$

$$|e_n| \le \frac{Mh^2}{2}\left(1 + (1+hL) + \dots + (1+hL)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{Mh^2}{2}\,\frac{(1+hL)^n - 1}{1+hL-1} = \frac{Mh}{2L}\left((1+hL)^n - 1\right)$$

$$(1+hL)^n \leq e^{nhL}$$

$$t_n = a + nh \Rightarrow nh = t_n - a \leq b - a$$

$$(1+hL)^n \leq e^{L(b-a)}$$

$$|e_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)$$

$$|e_n| = O(h)$$

Δεν μπορούμε να βελτιώσουμε τη δύναμη του σφάλματος στο h.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{cases} y' = 1 & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Η $y(t) = t$ είναι η λύση του Π.Α.Τ.

$$y'(t) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) = y_0 + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h$$

$$e_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = t_{n+1} - (y_n + h)$$

$$= (n+1)h - y_n + h = n \cdot h - y_n = t_n - y_n = y(t_n) - y_n$$

$$= e_n = \ldots = e_1 = e_0 = y(t_0) - y_0 = 0 - 0 = 0$$

<u>Παράδειγμα</u>: $\begin{cases} y'(t) = 2t & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Η ακριβής λύση $y(t) = t^2$, $\quad (y''(t) = 2)$

Μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h \cdot 2 \cdot t_n = y_n + h \cdot 2 \cdot (hn)$$

$$= y_n + 2h^2 n \quad , \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$y_{n+1} = y_n + 2h^2 n = y_{n-1} + 2h^2(n-1) + 2h^2 n$$

$$= \dots = y_0 + 2h^2 (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n)$$

$$y_n = y_0 + 2h^2(1+2+\dots+n-1) = y_0 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2h^2$$
$$= (n-1)\cdot n h^2$$

$$y_N = N(N-1)h^2 = (Nh)(N-1)\cdot h \qquad , h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N}$$
$$= (N-1)h = 1-h$$

Συνεπώς $e_N = y(t_N) - y_N = y(1) - y_N = 1-(1-h) = h$

Δεν μπορούμε στη μέθοδο Euler να βελτιώσουμε το σφάλμα (τη δύναμη του h).