Ευστάθεια Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Αν η f ικανοποιεί την "ολική" Lipschitz

$\exists L > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$

Τότε

$$|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)} |y(a) - z(a)| \quad a \le t \le b$$

& για το max.

Ισχυει το αναλογο αποτελεσμα για τις προσεγγισεις που προκυπτουν με τη μεθοδο του Euler.

Εστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$

$y_n \approx y(t_n)$ & $z_n \approx z(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{n+1} - z_{n+1} = y_n - z_n + h\left(f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)\right)$$

$$\Rightarrow |y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + h\left|f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)\right|$$

$$\leq (1 + hL)\,|y_n - z_n|$$

$$|y_n - z_n| \le (1+hL)^n |y_0 - z_0| \le (e^{hL})^n |y_0 - z_0| = e^{nhL} |y_0 - z_0|$$

$$t_n - a = nh$$

$$|y_n - z_n| \le e^{(t_n - a)L} |y_0 - z_0|$$

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y_n - z_n| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

Ευσταθεια για τη μεθοδο του Euler.