$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Μέθοδος Euler : $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$

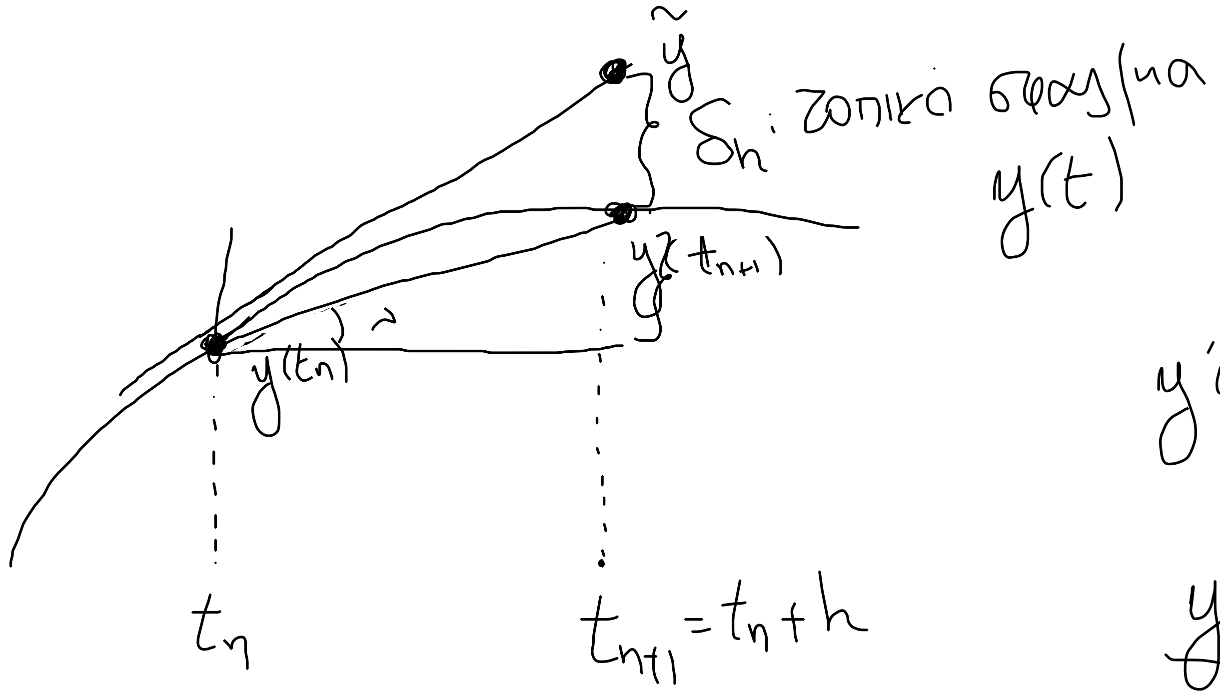
$t_n = a + h \cdot n$, $n = 0, 1, \dots, N$, $h = \dfrac{b-a}{N}$

$y_n \approx y(t_n)$

1) $\max\limits_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le C h^1$: Σύγκλιση Euler

2) $z_0, \dots, z_N$, $y_0, \dots, y_N$: Ευστάθεια Euler

$\max\limits_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le \tilde{C} |y_0 - z_0|$



$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \lambda$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \lambda (t_{n+1} - t_n)$$
$$= y(t_n) + \lambda h$$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))$$

$$\lambda \approx f(t_n, y(t_n))$$

$$y \in C^2[a,b] \quad , \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad , \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$= y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \underline{\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)}$$

$$y(t_{n+1}) \neq y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) = \tilde{y} \approx y(t_{n+1})$$

Τοπικό σφάλμα

$$(t_n, y(t_n)) \longrightarrow (t_{n+1}, \tilde{y}) \quad (\text{Μέθοδο Euler})$$

$$\neq (t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \tilde{y}$$: Τοπικό σφάλμα ή διακριτοποίησης

$$= y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) - \left(y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))\right)$$

$$= \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\max_{0 \le n \le N} |\delta_n| \le C h^2, \quad C = \frac{1}{2} \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

$$(t_0, y_0) \xrightarrow{\delta_0 \approx O(h^2)} (t_1, y_1) \xrightarrow{\delta_1 \approx O(h^2)} (t_2, y_2) \longrightarrow \dots$$

$$\longrightarrow (t_n, y_n)$$

n-βήματα $\quad O(h^2)\cdot n \quad , \quad h\cdot n = t_n \le \underline{\underline{b}}$

ολικό σφάλμα $\quad O(h)$