Μέθοδος Euler

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + R_1(t_n)$$

$$R_1(t_n) = \frac{1}{2} y''(\xi_n) \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) \qquad (t_n, y(t_n)) \longrightarrow (t_{n+1}, \tilde{y})$$

$y_0, y_1, \ldots, y_N$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$y_0 = y(\alpha)$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\underbrace{t_{n+1} - t_n}_{h}} = ? \approx f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$$

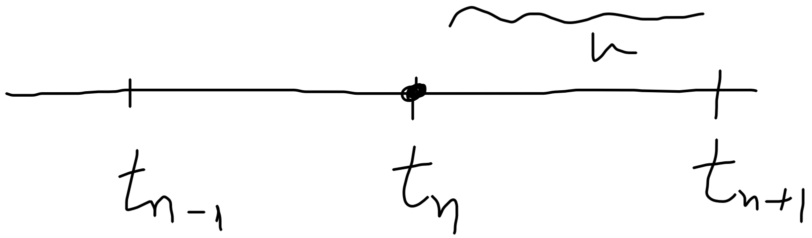
$$\frac{\tilde{y} - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'(t_n) + \frac{1}{h} R_1(t_n)$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\underbrace{t_{n+1} - t_n}_{h}} = ? \approx f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$$

$$\frac{\tilde{y} - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n)$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y'(t_n) + \frac{1}{h} R_1(t_n)$$



$$y(t_{n-1}) = y(t_n) + \underbrace{(t_{n-1}-t_n)}_{-h}\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_{n-1}, t_n]$$

$$\frac{y(t_{n-1}) - y(t_n)}{-h} = y'(t_n) - \frac{h}{2} y''(\xi_n)$$

$\overset{1}{n}$

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} = y'(t_n) - \frac{h}{2} y''(\xi_n) \qquad \tilde{R}_1(t_n)$$

$$\tilde{R}_1(t_n) = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + h\, y'(t_n) - \tilde{R}_1(t_n)$$

$$= y(t_{n-1}) + h\, f(t_n, y(t_n)) - \tilde{R}_1(t_n)$$

$y_0,\ y_1\ (;)$

$y_1 = y_0 + h\, f(t_1, y_1)$ (τι ρίζα μιας μη-γραμμικής συνάρτησης)

Έστω ότι βρίσκω $y_0, y_1, \dots, y_N$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Πεπλεγμένη Euler.

Μέθοδος Euler (άμεση) $\quad (t_n, y(t_n)) \to (t_{n+1}, \tilde{y})$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \tilde{y} = \dots = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_n) = O(h^2)$$

Πεπλεγμένη Euler $\quad (t_n, y(t_n)) \to (t_{n+1}, \tilde{y})$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h f(t_{n+1}, \tilde{y})$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \tilde{y} = y(t_n) + h y'(t_n) + O(h^2) - y(t_n) - h f(t_{n+1}, \tilde{y})$$

$$= h \big(\underbrace{y'(t_n) - f(t_{n+1}, \tilde{y})} \big) + O(h^2)$$

$$O(h^2)\ (;)$$

$$f(t_{n+1},\tilde{y}) = f(t_{n+1}, y(t_n) + h\mu) \quad , \quad \mu \equiv f(t_{n+1},\tilde{y})$$

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$$f(t_n, y(t_n)) - f(t_n + h, y(t_n) + h\mu) = O(h) \; (;)$$

$$f(t_n + h, \tilde{y}) = f(t_n, \tilde{y}) + h f_t(t_n, \tilde{y}) + O(h^2)$$

$$= f(t_n, \tilde{y}) + O(h)$$

$$f(t_n, \tilde{y}) = f(t_n, y(t_n)) + (\underbrace{\tilde{y} - y(t_n)}_{h\mu}) f_y(t_n, y(t_n)) + O((h\mu)^2)$$

$$= f(t_n, y(t_n)) + O(h)$$

$$f(t_n + h, \tilde{y}) = f(t_n, y(t_n)) + O(h)$$

$\delta_n = y(t_{n+1}) - \tilde{y} = O(h^2)$ για την πεπλεγμένη Euler!

Μέθοδο Euler (άμεση) : Τοπικό σφάλμα $O(h^2)$

$\longrightarrow$ Σύγκλιση της μεθόδου $O(\underline{\underline{h}})$

Πεπλεγμένη μέθοδο Euler : Τοπικό σφάλμα $O(h^2)$

$\xrightarrow{(;)}$ Σύγκλιση της μεθόδου $O(h)$

Ολικό σφάλμα

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le C h^1$$

Τάξη σύγκλισης της μεθόδου (αριθμητικής) είναι ο εκθέτης p στην εκτίμηση του ολικού σφάλματος της μεθόδου

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le C h^p$$

Ολικό σφάλμα $\approx 10^{-6}$

Ας υποθέσουμε ότι $C \approx 1$.

$$h \approx 10^{-6}$$

$$h = \frac{b-a}{N} \approx \frac{1}{N} \Rightarrow N \approx \underline{\underline{10^6}} \ \underline{\underline{\text{βήματα}}}$$

Υπάρχει μέθοδος τ.ω. ολικό σφάλμα $\approx 10^{-6}$

και ο αριθμός των βημάτων $\ll 10^6$ (;)

Ολικό σφάλμα $O(h)$ $\Rightarrow$ Τοπικό σφάλμα $O(h^2)$

Ολικό σφάλμα $\underline{\underline{O(h^2)}}$ $\Rightarrow$ Τοπικό σφάλμα $O(h^3)$

$$|y_n - y(t_n)| \leq C h^2 \approx 10^{-6}$$

$$h \approx (10^{-6})^{1/2} \sim 10^{-3} \Rightarrow N \approx \underline{\underline{10^3}}$$

Μέθοδοι με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης $O(h^3)$

Μέθοδοι Taylor.

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{1}{2} h^2 y''(t) + R_2(t)$$

$$R_2(t) = \frac{1}{3!} h^3 y'''(\xi), \ \xi \in (t, t+h)$$

Για να βρω. $(t_n, y(t_n)) \longrightarrow (t_{n+1}, \tilde{y})$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_n)$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(y'(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t, y(t))\right)$$

$$= f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

$$= f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

$$y''(t_n) = f_t(t_n, y(t_n)) + f_y(t_n, y(t_n)) \cdot f(t_n, y(t_n))$$

$$g(t, y) = f_t(t, y) + f_y(t, y) \cdot f(t, y)$$

$$\boxed{y''(t_n) = g(t_n, y(t_n))}$$

$$\tilde{y} = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} g(t_n, y(t_n))$$

Τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \tilde{y} = R_2(t_n) = O(h^3)$$

Μέθοδος Taylor (TS(2))

$y_0, y_1, \dots, y_N$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} g(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$