~~Άσκηση~~: Βρείτε την επαναληπτική σχέση που δίνει η μέθοδος του Euler για το ΠΑΤ.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & , \lambda = -10 \quad , t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Στην περίπτωση $h = \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$, υπολογίστε τα y_1, y_2, y_3

Ποιά είναι η μέγιστη τιμή του h που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εξασφαλίσουμε ότι $y_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Υπενθύμιση: $y(t) = e^{\lambda t}$, ακριβής λύση

$h = \frac{1}{6}$ $\qquad y_{n+1} = y_n + h f(t, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1 + \lambda h) y_n$

$$y_1 = y_0 \left(1 + \frac{1}{6} \cdot (-10)\right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{10}{6}\right) = -\frac{4}{6} < 0$$

$$y_2 = y_1(1+h\lambda) = -\frac{4}{6}\left(1 - \frac{10}{6}\right) = -\frac{4}{6}\cdot\left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} > 0$$

$$y_3 = y_2(1+h\lambda) = \frac{4}{9}\left(-\frac{4}{6}\right) < 0$$

$$h = \frac{1}{12}, \quad y_1 = y_0(1+h\lambda) = 1\cdot\left(1 - \frac{10}{12}\right) = 1\cdot\left(\frac{2}{12}\right) = \frac{2}{12} > 0$$

$$y_2 = y_1(1+h\lambda) = \frac{2}{12}\cdot\left(1 - \frac{10}{12}\right) = \frac{4}{12\cdot 12} > 0$$

$$y_3 = y_2(1+h\lambda) = \frac{1}{6\cdot 6}\left(\frac{2}{12}\right) > 0$$

h , $y_{n+1} = y_n(1-10h) > 0$

$y_n > 0$ & $(1-10h) > 0$

$\cancel{y_n < 0 \ \& \ (1-10h) < 0}$ απορίπτ.

$1-10h > 0 \Rightarrow \underline{h < \frac{1}{10}} \Rightarrow y_n > 0 \ , n=1,2,\dots$

Άσκηση: Εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler στο ΠΑΤ.

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t - y(t), & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Βρείτε τα $y_1, y_2, \ldots$ και την έκφραση της y_n για την προσέγγιση της λύσης στο $t_n = n \cdot h$, $n = 1, 2, \ldots$

Και βρείτε την έκφραση του ολικού σφάλματος.

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) = y_0 + h(1 + t_0 - y_0) = 0 + h(1 + 0 - 0) = h$$

$$y_2 = y_1 + h(1 + t_1 - y_1) = h + h(1 + h - h) = 2h$$

$$y_3 = y_2 + h(1 + t_2 - y_2) = 2h + h(1 + 2h - 2h) = 3h$$

Υπόθεση : $y_n = nh$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $y_{n+1} = (n+1)h$

$$y_{n+1} = y_n + h(1 + t_n - y_n) = nh + h(1 + nh - nh) = (n+1)h$$

ΤΟ ΔΕΙΞΑΜΕ : $y_n = nh$, $n = 1, 2, \dots$

$= t_n$

Αν θεωρήσω $\underline{y(t)=t}$.

$y'(t)=1$, $\quad f(t,y(t)) = 1+t-y(t) = 1+t-t = 1$

$y(0)=0$

$$e_n = y(t_n) - y_n = t_n - t_n = 0$$