Άσκηση:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t)y'(t) + 4y(t) = t^2, & t \geq 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ξαναγράψτε το Π.Α.Τ ως σύστημα πρώτης τάξης και εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler με $h = 0.1$ για να βρείτε τη προσέγγιση της $y(0.2)$ και $y'(0.2)$

$$\left.\begin{aligned} u &= y \\ v &= y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u' &= y' = v \\ v' &= y'' = t^2 - y(t)y'(t) - 4y(t) = t^2 - uv - 4u \end{aligned}$$

$$F(t,u,v) = \begin{pmatrix} v \\ t^2 - uv - 4u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(t,u,v), \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μέθοδος του Euler. h βήμα.

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad w' = F(t, w)$$

$$w_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w_1 = w_0 + hF(t_0, w_0)}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_0 \\ t_0^2 - u_0 v_0 - 4u_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 - 0 - 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.\underline{1} \\ \underline{1} \end{pmatrix}$$

$$w_1 \approx \begin{pmatrix} y(0.1) \\ y'(0.1) \end{pmatrix}, \quad w_2 \approx \begin{pmatrix} y(0.2) \\ y'(0.2) \end{pmatrix}$$

$$w_2 = w_1 + h \cdot F(t_1, w_1)$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ t_1^2 - u_1 v_1 - 4u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ (0.1)^2 - 0.1 - 4 \cdot 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 + 0.001 - 0.01 - 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 - 0.049 \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση</u> : Π.Α.Τ. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) & x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) & y(0) = 0 \end{cases}$, $t \geq 0$.

Η ακριβής λύση του συστήματος είναι $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x(t)$$

Ισχύει ότι $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, $t \geq 0$

Έστω h βήμα διαμερίσεων και (x^n, y^n) προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler. Δείξτε ότι

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

Μέθοδος Euler

h σταθερό, $t^n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$h = 0.1$ $\quad t_0 = 0 \quad t_1 = 0.1 \quad t_2 = 0.2 \quad \ldots \quad t_{10} = 1 \quad \ldots \quad t_{100} = 10$

$h = 0.01$ $\quad t_0 = 0 \quad t_{100} = 1 \quad t_{1000} = 10$

$h =$ σταθερό, $(x^n)^2 + (y^n)^2 \longrightarrow \infty$, $n \to \infty$.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -y_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - h y_n \\ y_n + h x_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + h(-y_0) = 1 + h \cdot 0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h x_0 = 0 + h \cdot 1 = h$$

$$x_2 = x_1 - h y_1 = 1 - hh = 1 - h^2$$

$$y_2 = y_1 + h x_1 = h + h1 = 2h$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 + h^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = (1-h^2)^2 + 4h^2 = 1 + h^4 - 2h^2 + 4h^2 = 1 + h^4 + 2h^2 = (1 + h^2)^2$$

Επαγωγική υπόθεση $\quad x_n^2 + y_n^2 = (1 + h^2)^n$

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (x_n - h y_n)^2 + (y_n + h x_n)^2$$

$$= x_n^2 + h^2 y_n^2 - \underline{2h x_n y_n} + y_n^2 + h^2 x_n^2 + \underline{2h x_n y_n}$$

$$= (x_n^2 + y_n^2)(1+h^2) = (1+h^2)^n (1+h^2)^1 = (1+h^2)^{n+1}$$

<u>Ισχύει</u>: $\underline{x_n^2 + y_n^2 = (1+h^2)^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Προφανές ότι $x_n^2 + y_n^2 = \underbrace{(1+h^2)}_{= \text{ h } \underline{\text{σταθερό.}}}{}^n \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$