Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$t_n = a + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$$\frac{y_0, y_1, \dots, y_N}{y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

Θεώρημα: Αν f "ολικά" συνθήκη Lipschitz

$$\exists L>0 \ \forall t\in[a,b] \ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R} \quad |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$$

Έστω $y(t)$ η ακριβής λύση του Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = f(t,y(t)) \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

και $y_0, y_1, \ldots, y_N$ οι προσεγγίσεις της $y(t_n)$ με τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Τότε

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t_n)-y_n| \leq Ch$$

(Το αντίστοιχο είχαμε δείξει και για τη "απλή" μέθοδο του Euler)

Απόδειξη

$$\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$$

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) + \underbrace{(t_n - t_{n+1})}_{-h} y'(t_{n+1}) + \frac{(t_n - t_{n+1})^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_{n+1}) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\left(f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + hL|\varepsilon_{n+1}| + \frac{h^2}{2} \cdot M, \quad M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|$$

$$(1-hL)|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + \frac{h^2}{2} M$$

Υποθέτουμε ότι h είναι κατάλληλα μικρό $h>0$, $1-hL>0$.

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{1}{1-hL} |\varepsilon_n| + \frac{1}{1-hL} \frac{M}{2} \cdot h^2$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $C>0$ (επίσης $C>L$)

τ.ω. $\frac{1}{1-hL} \leq 1 + Ch$ και $\frac{1}{1-hL} \leq C$

$$\underbrace{\frac{1}{1-hL} \leq 1 + Ch}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq (1+Ch)(1-hL)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq 1 - hL + Ch - CLh^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq (C-L)h - CLh^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq C - L - CLh$$

$$\Leftrightarrow \quad L \leq C(1-Lh)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L}{1-hL} \leq C$$

$$\frac{1}{1-hL} \leq C \quad \text{si} \quad 1 \leq C(1-hL)$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1+Ch)\,|\varepsilon_n| + C\frac{M}{2}h^2$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1+Ch)\left((1+Ch)|\varepsilon_{n-1}| + \frac{CM}{2}h^2\right) + \frac{CM}{2}h^2$$

$$\leq \dots$$

$$\leq (1+Ch)^n \cancel{|\varepsilon_0|}^{0} + \frac{CM}{2}h^2\left(1 + (1+Ch) + (1+Ch)^2 + \dots + (1+Ch)^{n}\right)$$

$$|\varepsilon_n| \leq T \sum_{j=0}^{n-1} (1+Ch)^j, \qquad T = \frac{CM}{2}h^2$$

$$|\varepsilon_n| \leq T \cdot \frac{(1+Ch)^n - 1}{1+Ch-1} \leq \frac{T}{Ch}\left(e^{nh\cdot C} - 1\right)$$

$$= \frac{CM}{C} h \left(e^{(b-a)C} - 1\right) \leq \underline{\underline{\tilde{C}}}\, h$$