3ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε τη μέθοδο του Euler. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$, όπου

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Η συνάρτηση f μπορεί να είναι διανυσματική συνάρτηση. Οπότε το Π.Α.Τ. είναι ένα σύστημα Δ.Ε. με αρχική "τιμή" $y(0) \in \mathbb{R}^m$, ένα διάνυσμα.

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),\ t \in [0, 2\pi], x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

Η ακριβή λύση είναι απλό να δούμε ότι είναι $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί ως σύστημα Δ.Ε.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi],\ \mu\varepsilon\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1: Θεωρείστε μια διαμέριση του $[0, 2\pi]$, με $N = 100$ και δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t. Επίσης δημιουργείστε τη ανάμεσα στις $(x(t), y(t))$ με πεδίο αξόνων xy. Παρατηρήστε ότι το γράφημα είναι κύκλος στο πεδίο xy. αυτό συμβαίνει επειδή $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$

Άσκηση 2: Θεωρείστε μια διαμέριση του $[0, 2\pi]$, με $N = 100$ και εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n))$, $n = 0, \ldots, N$.

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t.
2. Επειδή $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, δημιουργείστε τη γραφική παράσταση ανάμεσα στις $(x(t), y(t))$. Παρατηρήστε ότι είναι κύκλος στο πεδίο xy.
3. Βρείτε το $\max_{0 \le n \le N}(x_n^2 + y_n^2)$. Ισχύει $x_n^2 + y_n^2 = 1$; Στη συνέχεια δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy. Δημιουργείτε ένας κύκλος;
4. Δοκιμάστε να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n))$, $n = 0, \ldots, N$, με $N = 200, 400, 800$. Στη συνέχεια δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy. Τι παρατηρείται;

Μέθοδος Taylor (2)

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$. θεωρήσαμε τη μέθοδο Taylor (2) όπου υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$, σύμφωνα με

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} g(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

όπου $g(t, y(t)) = \dfrac{d}{dt} f(t, y(t))$.

Άσκηση 3: Έστω $y(t) = e^{-t} + sin(t)$, στο $[0, 5]$ η οποία είναι λύση του ΠΑΤ

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t) + \sin(t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1.$$

1. Βρείτε τη συνάρτηση $g(t, y(t)) = \dfrac{d}{dt} f(t, y(t))$ του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών
2. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Taylor (2)
3. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης y_n και της ακριβούς λύσης $y(t)$ στο διάστημα [0,5]. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$.
4. Επαναλάβατε το προηγουμενο για τη μέθοδο Euler και συγκρίνεται τα δύο σφάλματα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$.
5. Θεωρείστε τις διαμερίσεις του $[0, 5]$, με $N = 10, 20, 30, \ldots, 100$. Υπολογίστε τα σφάλματα err_N και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Taylor (2). Είναι $p \approx 2$; Συγκρίνετε τα σφάλματα με τα αντίστοιχα για τη μέθοδο Euler.
6. Επαναλάβετε για $N = 200, 210, \ldots, 300$.

```
In [ ]:
```