6ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

μπορούμε να θεωρήσουμε και τις μεθόδους Runge - Kutta. Αυτές οι μέθοδοι είναι μονοβηματικές περιγράφονται από ένα μητρώο Butcher q σταδίων, που δίνεται ως

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline \\ b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

και χρησιμοποιούν προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης σε σημεία ενδιάμεσα των t_n και t_{n+1}, $t_{n,i} = t_n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$, ως εξής: Κατασκευάζουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$, σύμφωνα με

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$

και

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Αν ισχύει ότι $a_{ij} = 0$, $i \leq j$ τότε έχουμε μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta γιατί ο προσδιορισμός των τιμών $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$ γίνεται με άμεσο τρόπο, χωρίς τη λύση κάποιου συστήματος.

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της, y, τότε για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους. Αν $a_{ij} = 0$, $i < j$ και $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$ τότε έχουμε μια ημιπεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta. Αν $a_{ij} \neq 0$, $i < j$ $i = 1, \dots, q$ τότε έχουμε μια πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta.

Παραδείγματα άμεσων μεθόδων Runge-Kutta

1. Runge-Kutta 1-σταδίου

$$
\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & \\
1 &
\end{array}
$$

2. Runge-Kutta 2-σταδίων

$$
\begin{array}{cc|c}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & & \\
0 & 1 &
\end{array}
$$

3. Runge-Kutta 3-σταδίων

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{1}{3} & 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \\
0 & \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{2}{3} \\
\hline
 & & & \\
\dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{3}{4} &
\end{array}
$$

Για να υλοποιήσουμε τις άμεσες Runge-Kutta μπορούμε να ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία: Αν έχουμε μια άμεση Runge-Kutta q-σταδίων θεωρούμε τις βοηθητικές μεταβλητές $k_1, \ldots, k_q$ οι οποίες ορίζονται ως εξής

$$k_i = f(t_{n,i}, y_{n,i}), \quad i = 1, \ldots, q$$

Οπότε οι προσεγγίσεις $y_{n,i}$ στα ενδιάμεσα σημεία $t_{n,i}$ μπορούν να υπολογιστούν ως

$$
\begin{aligned}
y_{n,1} &= y_n, \quad k_1 = f(t_{n,1}, y_{n,1}) && (1)\\
y_{n,2} &= y_n + a_{21} h k_1, \quad k_2 = f(t_{n,2}, y_{n,2}) && (2)\\
y_{n,3} &= y_n + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2, \quad k_3 = f(t_{n,2}, y_{n,2}) && (3)\\
&\vdots && (4)\\
y_{n,q} &= y_n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} k_j, \quad k_q = f(t_{n,q}, y_{n,q}) && (5)\\
y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i k_i && (6)
\end{aligned}
$$

στα ενδιάμεσα σημεία

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q,$$

Άσκηση 1: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0, 10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 1. Όσο και η άμεση Euler. </p>

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s

N=20
y=np.zeros(N+1)
y0=0

## αμεση Euler (για συγκριση αποτελεσματων)

t=np.linspace(0,10,N+1)
h=t[1]-t[0]
y[0]=y0

# Υπολογισμός των προσεγγισεων και εκτυπωση αποτελεσμάτων



## Μια αμεση Runge-Kutta 2 σταδιων

N=20
y=np.zeros(N+1)
t=np.linspace(0,10,N+1)
h=t[1]-t[0]
y[0]=y0

a=1./2
t2=a # το βήμα για το 2ο ενδιαμεσο σημειο

for i in range(N):


     ### Υπολογισμός 1ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της 


    ### Υπολογισμός 2ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f


     #### Υπολογισμος της επομενης προσεγγισης (χρησιμοποιουμε τις ενδιαμε


# Εκτυπωση αποτελεσμάτων



####Υπολογισμος ταξης ακριβειας
```

Άσκηση 2: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler και την μεθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων της προηγούμενης άσκησης

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 2. Η απλή μονοβηματικη μέθοδος Euler έχει τάξη κατά ένα λιγότερο. </p>

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s


N=20
y=np.zeros(N+1)
y0=0

## Μια αμεση Runge-Kutta 2 σταδιων




# Εκτυπωση αποτελεσμάτων


####Υπολογισμος ταξης ακριβειας
```

Άσκηση 3: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 3-σταδίων

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} &
\end{array}
$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 3 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 3. </p>

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s


N=20
y=np.zeros(N+1)
y0=0

## Μια αμεση Runge-Kutta 3 σταδιων

t=np.linspace(0,10,N+1)
h=t[1]-t[0]
y[0]=y0

a2=1./3
t2=a2 # το βήμα για το 2ο ενδιαμεσο σημειο
a3=2./3
t3=a3 # το βήμα για το 3ο ενδιαμεσο σημειο

for i in range(N):

     ### Υπολογισμός 1ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της 


    ### Υπολογισμός 2ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f


    ### Υπολογισμός 3ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f


     #### Υπολογισμος της επομενης προσεγγισης (χρησιμοποιουμε τις ενδιαμεσ


# Εκτυπωση αποτελεσμάτων


####Υπολογισμος ταξης ακριβειας
```

Άσκηση 4: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 3-σταδίων

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 3 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 1. </p>

Άσκηση 5: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 4-σταδίων

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 4 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 4. </p>

In [ ]:

```
```