

## 8ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler, αλλά και άμεσες 2-βηματικές όπως η Adams Bashforth (2) και η μέθοδος του μέσου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του  $[a, b]$ , στα σημεία  $t_n = a + nh$ ,  $n = 0, \dots, N$ , με βήμα  $h = \frac{b-a}{N}$ , υπολογίζουμε τις τιμές  $y_n$  που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές  $y(t_n)$ ,  $n = 0, \dots, N$

### Άμεση Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

**Μέθοδος του μέσου** Για δοσμένα  $y_0, y_1$ ,

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

**Μέθοδος Adams Bashforth(2)** Για δοσμένα  $y_0, y_1$ ,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

**Άσκηση 1:** Έστω  $y(t) = e^{0.25-(t-0.5)^2}$ , στο  $[0, 4]$  η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), \quad t \in [0, 4], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρήστε τη μέθοδο του μέσου και τη μέθοδο Adams-Bashforth (2). Θεωρήστε ένα διαμερισμό του  $[0, 4]$  σε  $N + 1$  σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές  $y_0 = 1$  και  $y_1 = y(h) = e^{0.25-(h-0.5)^2}$ . Για  $N = 50$ , κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι δύο μέθοδοι, δημιουργήστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα  $[0,4]$ . Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα  $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ . Για  $N = 100, 200, 300, 400, 500$  βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [ ]:

```
def f(t,y):
    s=(1-2*t)*y
    return s
def y_exact(t):
    w=0.25-(t-0.5)**2
    s=np.exp(w)
    return s
```

In [ ]:

```
N=50
t=np.linspace(0,4,N+1)
h=t[1]-t[0]

y_mid=np.zeros(N+1)
y_ab=np.zeros(N+1)

y_mid[0]=1
y_ab[0]=1

### Εισαγουμε την 1η προσεγγιση για να ξεκινήσει η διβηματική μεθοδος
y_mid[1]=y_exact(t[1])
y_ab[1]=y_exact(t[1])

# Προσοχή στον αριθμο των επαναλήψεων
#Στη διβηματική μεθοδο κανουμε 1 λιγοτερη επαναληψη
for i in range(N-1):
    #midpoint
    y_mid[i+2]=y_mid[i]+2*h*f(t[i+1],y_mid[i+1])
    #AB(2)
    y_ab[i+2]=y_ab[i+1]+h*((3./2)*f(t[i+1],y_ab[i+1])-(1./2)*f(t[i],y_ab[i]))
```

**Άσκηση 2:** Επαναλάβετε την Άσκηση 1, αλλά τώρα η τιμή  $y_1$  θα δίνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler, δηλαδή  $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ . Αλλάζει η τάξη σύγκλισης;

In [ ]:

```
# Το μόνο που αλλάζει είναι οτι y1 προκύπτει με την άμεση Euler
### Εισαγουμε την 1η προσεγγιση για να ξεκινήσει η διβηματική μεθοδος
y_mid[1]=y_mid[0]+h*f(t[0],y_mid[0])
y_ab[1]=y_ab[0]+h*f(t[0],y_ab[0])
```

**Άσκηση 3:** Για το ΠΑΤ που έχετε θεωρήσει μέχρι τώρα φτιάξτε ένα πίνακα των σφαλμάτων της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, η  $y_1$  θα δίνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler,

N	Άμεση Euler	p	Μέθοδος Μέσου	p	AB(2)	p
100						
200						
300						
400						
500						

Ποιά μέθοδο θα προτιμήσετε;

**Πεπλεγμένες πολυβηματικές μέθοδοι** Μια πεπλεγμένη μονοβηματική μέθοδος είναι η πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή  $y_{n+1}$  χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η  $f$  είναι μη γραμμική ως προς  $y$ ) μια μη γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση της άσκησης 1, η  $f$  είναι γραμμική ως προς  $y$ . Οπότε η πεπλεγμένη Euler παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - 2t_{n+1})y_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Οπότε λύνοντας ως προς  $y_{n+1}$  παίρνουμε

$$(1 - h(1 - 2t_{n+1}))y_{n+1} = y_n \quad n = 0, \dots, N - 1$$

ή

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h(1 - 2t_{n+1})} y_n, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Μια πεπλεγμένη διβηματική μέθοδος είναι η μέθοδος του Simpson

**Μέθοδος του Simpson** Για δοσμένα  $y_0, y_1$ ,

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή  $y_{n+1}$  χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η  $f$  είναι μη γραμμική ως προς  $y$ ) μια μη γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση της άσκησης 1, η  $f$  είναι γραμμική ως προς  $y$ . Οπότε η πεπλεγμένη Euler παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}((1 - 2t_{n+2})y_{n+2} + 4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n), \quad n = 0, \dots, N$$

Οπότε λύνοντας ως προς  $y_{n+2}$  παίρνουμε

$$\left(1 - \frac{h}{3}(1 - 2t_{n+2})\right)y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n) \quad n = 0, \dots, N$$

ή

$$y_{n+2} = \frac{1}{1 - \frac{h}{3}(1 - 2t_{n+1})} \left( y_n + \frac{h}{3}(4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n) \right) \quad n = 0, \dots, N$$

Άλλες πεπλεγμένες διβηματικές μέθοδοι είναι η μέθοδος Adams Multon(2) και η BDF(2)

**Μέθοδος Adams Multon(2)** Για δοσμένα  $y_0, y_1$ ,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{5}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n) \right), \quad n = 0, \dots, N$$

**Μέθοδος BDF(2)** Για δοσμένα  $y_0, y_1$ ,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

**Άσκηση 4:** Για το ΠΑΤ της Άσκησης 1 θεωρήστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα  $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ . Για  $N = 100, 200, 300, 400, 500$  βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

**Άσκηση 4:** Για το ΠΑΤ που έχετε θεωρήσει μέχρι τώρα φτιάξτε ένα πίνακα των σφαλμάτων της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, η  $y_1$  θα δίνεται χρησιμοποιώντας τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler,

N	Πεπλεγμένη Euler	p	Μέθοδος Simpson	p	AM(2)	p	BDF(2)	p
100								
200								
300								
400								
500								

Ποιά μέθοδο θα προτιμήσετε;

In [ ]:

```

def f(t,y):
    s=g(t)*y
    return s
def y_exact(t):
    w=0.25-(t-0.5)**2
    s=np.exp(w)
    return s
def g(t):
    s=(1-2*t)
    return s

```

In [ ]:

```

#### Μεθοδος Simpson για N=50
#### Οι αλλες υλοποιούνται ανάλογα

t=np.linspace(0,4,N+1)
h=t[1]-t[0]

y_simp=np.zeros(N+1)

y_simp[0]=1

### Εισαγουμε την 1η προσεγγιση για να ξεκινήσει η διβηματικη μεθοδος
### Παράδειγματος χάριν y1 προκηπτει με την πεπλεγμενη Euler
y_simp[1]=y_simp[0]/(1-h*g(t[1]))

# Προσοχή στον αριθμο των επαναλήψεων
#Στη διβηματικη μεθοδο κανουμε 1 λιγοτερη επαναληψη
for i in range(N-1):

    #simpson
    y_simp[i+2]=(y_simp[i]+(h/3)*(4*f(t[i+1],y_simp[i+1])+f(t[i],y_simp[i]))

```