

Εργαστήριο 6. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Έστω u η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b].$$

- (1) Γράψτε μια συνάρτηση η οποία να υλοποιεί την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Ως όρισμα να δέχεται τα άκρα ενός διαστήματος $[a, b]$, δύο πραγματικούς αριθμούς $T \geq t > 0$, δύο φυσικούς αριθμούς N, M και να επιστρέφει ως αποτέλεσμα δύο διάνυσματα $N + 2$ -θέσεων, το ένα να περιέχει τα σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού με βήμα $(b - a)/(N + 1)$ και το δεύτερο τη λύση στο χρόνο t .
- (2) Θεωρούμε στο διάστημα $[0, 1]$, $g(x) = \sin(2\pi x)$. Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$. Θέλουμε να βρούμε τη λύση αν $T = 0.1$, με $M = 5, 10, 20, 90$, $N = 20$, στο χρόνο $t = 0.02$. Σχεδιάστε την ακριβή λύση και τις τέσσερις προσεγγιστικές λύσεις στο χρόνο $t = 0.02$. Επαναλάβεται για $t = 0.04$ και $t = 0.1$. Βρείτε το λόγο $\lambda = k/h^2$ στις παραπάνω περιπτώσεις. Συγκρίνεται με την άμεση μέθοδο του Euler.
- (3) Γράψτε μια συνάρτηση η οποία να υλοποιεί την πεπλεγμένη μέθοδο Crank–Nicolson. Επαναλάβετε για τα παραπάνω.