

# Κεφάλαιο 1

## Πεπερασμένες Διαφορές.

### 1.1 Προσέγγιση παραγώγων.

#### 1.1.1 Πρώτη παράγωγος.

Από τον ορισμό της παραγώγου για συναρτήσεις μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$ , ορίζεται ως

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της  $f'(x_0)$  από το λόγο

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

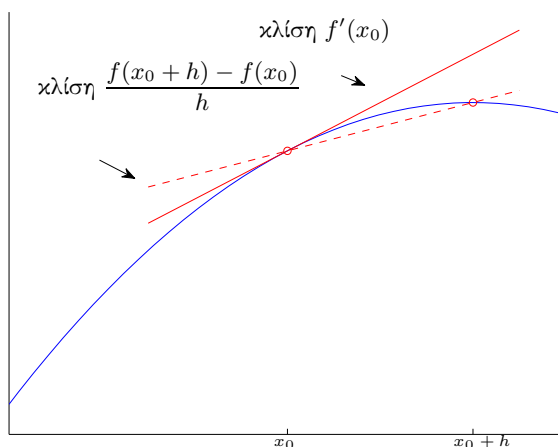
για μικρές τιμές του  $h > 0$ . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε την  $f'(x_0)$  από το λόγο

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

για μικρές τιμές του  $h > 0$ . Θα καλούμε τον πρώτο λόγο "εμπρός"-διαφορά και το δεύτερο λόγο, οπισθοδρομική διαφορά και θα θεωρήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό.

$$\begin{aligned} \delta_h^+ f(x_0) &\equiv \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, & h > 0 \\ \delta_h^- f(x_0) &\equiv \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, & h > 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Γεωμετρική ερμηνεία** Επειδή η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$ , είναι η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  του γραφήματος της  $f$ , μπορούμε γεωμετρικά να την προσεγγίσουμε με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει τα σημεία  $(x_0, f(x_0))$ , και  $(x_0+h, f(x_0+h))$ , βλέπε το γράφημα 1.1.1. Παρόμοια ισχύουν και για την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία  $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ , και  $(x_0, f(x_0))$ , βλέπε το γράφημα 1.1.1.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική ερμηνεία της  $\delta_h^+ f(x_0)$

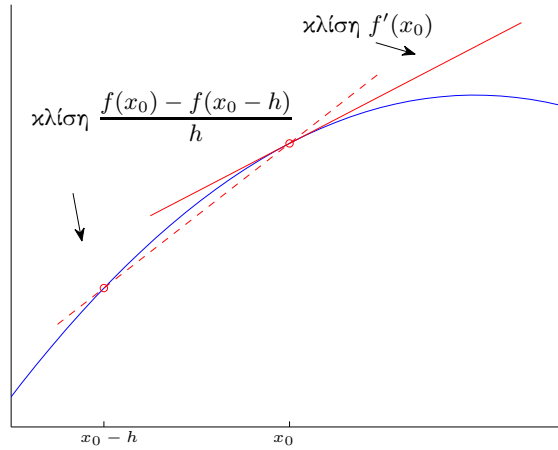
Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης της παραγώγου  $f'(x_0)$  είναι η κεντρική διαφορά, η οποία ορίζεται από τό λόγο,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h},$$

για μικρές τιμές του  $h > 0$  και θα συμβολίζουμε

$$\delta_h^c f(x_0) \equiv \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}, \quad h > 0 \quad (1.2)$$

Μια φυσική ερώτηση που δημιουργείτε είναι πόσο καλές είναι αυτές οι προσεγγίσεις για την εκτίμηση της παραγώγου. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln(x)$  και  $x_0 = 1.1$ . Στο πίνακα 1.1, δίνουμε τις τιμές των παραπάνω προσεγγίσεων για την  $f'(1.1) = 1/1.1 \approx 0.90909$ .

Σχήμα 1.2: Γεωμετρική ερμηνεία της  $\delta_h^- f(x_0)$ 

$h$	$\delta_h^+ f(1.1)$	$\delta_h^- f(1.1)$	$\delta_h^c f(1.1)$
0.50	0.74939	1.21227	0.98083
0.10	0.87011	0.95310	0.91161
0.05	0.88904	0.93040	0.90972
0.01	0.90498	0.91325	0.90912

Πίνακας 1.1: Πίνακας με τιμές των προσεγγίσεων της  $f'(1.1) = 1/1.1 \approx 0.90909$

**Λήμμα 1.1.** Έστω  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$  και  $h > 0$ , τότε ισχύουν τα ακόλουθα φράγματα:

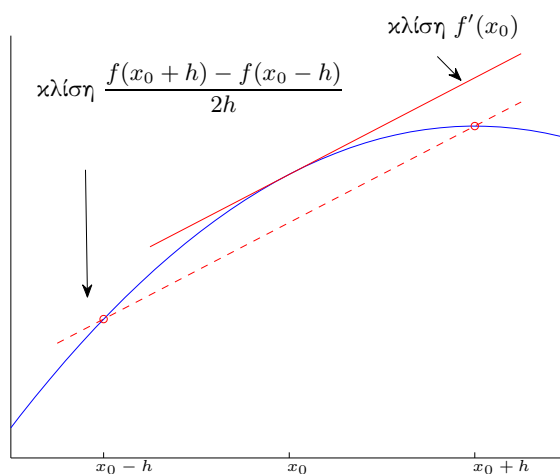
$$\begin{aligned} |\delta_h^+ f(x_0) - f'(x_0)| &\leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \\ |\delta_h^- f(x_0) - f'(x_0)| &\leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Αν επιπλέον  $f \in C^3[a, b]$ , τότε

$$|\delta_h^c f(x_0) - f'(x_0)| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|. \quad (1.4)$$

Απόδειξη. Αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h), \quad h > 0. \quad (1.5)$$

Σχήμα 1.3: Γεωμετρική ερμηνεία της  $\delta_h^c f(x_0)$ 

Επίσης,

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_0 - h, x_0), \quad h > 0. \quad (1.6)$$

Από τις σχέσεις (1.5) και (1.6) εύκολα προκύπτει η ζητούμενη σχέση (1.3). Αν τώρα η  $f \in C^3[a, b]$ , μπορούμε να αναπτύξουμε και πάλι κατά Taylor και να πάρουμε τις παρακάτω δύο σχέσεις.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\zeta_1), \quad \zeta_1 \in (x_0, x_0 + h), \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(\zeta_2), \quad \zeta_2 \in (x_0 - h, x_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

με  $h > 0$ . Αφαιρώντας τώρα κατά μέλη τις 2 σχέσεις της (1.7) έχουμε

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{6}(f'''(\zeta_1) + f'''(\zeta_2)),$$

από όπου εύκολα προκύπτει η ζητούμενη σχέση (1.4).  $\square$

**Παρατήρηση:** Από το Λήμμα 1.1, φαίνεται ότι το σφάλμα της προσέγγισης  $\delta_h^c f(x_0)$  είναι μικρότερο από τα αντίστοιχα των προσεγγίσεων  $\delta_h^+ f(x_0)$  και

$\delta_h^- f(x_0)$ , για  $h < 1$  και εξηγεί γιατί στον Πίνακα 1.1 η  $\delta_h^c f(1.1)$  προσεγγίζει καλύτερα την  $f'(1.1)$  από τις  $\delta_h^+ f(1.1)$  και  $\delta_h^- f(1.1)$ . Η συμμετρία που υπάρχει στον ορισμό της προσέγγισης  $\delta_h^c f(x_0)$  είναι ο λόγος γιατί το σφάλμα (1.4) είναι μικρότερο από αυτών των  $\delta_h^+ f(1.1)$  και  $\delta_h^- f(1.1)$ . Αυτό φαίνεται στην (1.7), όπου οι όροι  $\frac{h^2}{2} f''(x_0)$  αλληλοαναιρούνται αφαιρώντας τις δύο σχέσεις.

### 1.1.2 Δεύτερη παράγωγος.

Από τον ορισμό της δεύτερης παράγωγου μιας συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  έχουμε

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

Οπότε, μπορούμε να την προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας μία από τις προσεγγίσεις  $\delta_h^+ f'(x_0)$ ,  $\delta_h^- f'(x_0)$  ή  $\delta_h^c f'(x_0)$ . Αν όμως θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τιμές της  $f$ , θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την  $f'(x_0)$  με κάποια προσέγγιση της. Έτσι ένας τρόπος είναι

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \delta_h^+ f'(x_0) = \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \approx \frac{\delta_h^- f(x_0 + h) - \delta_h^- f(x_0)}{h} \\ &= \delta_h^+ \delta_h^- f(x_0). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό των  $\delta_h^+$  και  $\delta_h^-$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \delta_h^+ \delta_h^- f(x_0) &= \frac{1}{h} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right) \\ &= \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε την  $f''(x_0)$  ως

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \delta_h^- f'(x_0) = \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - h)}{h} \approx \frac{\delta_h^+ f(x_0 + h) - \delta_h^+ f(x_0)}{h} \\ &= \delta_h^- \delta_h^+ f(x_0). \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta_h^- \delta_h^+ f(x_0) &= \frac{1}{h} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right) \\ &= \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \end{aligned}$$

$h$	$\delta_{h,2}^c f(1.1)$
0.50	-0.92577
0.10	-0.82988
0.05	-0.82730
0.01	-0.82648

Πίνακας 1.2: Πίνακας με τιμές των προσεγγίσεων της  $f''(1.1) = -1/(1.1)^2 \approx -0.82645$

Επίσης από τον ορισμό της  $\delta_h^c$  έχουμε

$$\begin{aligned} \delta_{h/2}^c \delta_{h/2}^c f(x_0) &= \frac{\delta_{h/2}^c f(x_0 + h/2) - \delta_{h/2}^c f(x_0 - h/2)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{f(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} - \frac{f(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} \right) \\ &= \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε λοιπόν

$$\delta_{h,2}^c f(x_0) \equiv \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}, \quad (1.8)$$

και αυτός ο λόγος θα αποτελεί προσέγγιση της  $f''(x_0)$ . Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι

$$\delta_{h,2}^c f(x_0) = \delta_h^+ \delta_h^- f(x_0) = \delta_h^- \delta_h^+ f(x_0) = \delta_{h/2}^c \delta_{h/2}^c f(x_0).$$

Στο πίνακα 1.2, δίνουμε τιμές για παραπάνω προσέγγισης για τη συνάρτηση  $f(x) = \ln(x)$  και  $x_0 = 1.1$ , όπου  $f''(1.1) = -1/(1.1)^2 \approx -0.82645$ .

**Λήμμα 1.2.** Έστω  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^4[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$  και  $h > 0$ , τότε ισχύει το ακόλουθο φράγμα:

$$|\delta_{h,2}^c f(x_0) - f''(x_0)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (1.9)$$

*Απόδειξη.* Αν τώρα η  $f \in C^4[a, b]$ , μπορούμε να αναπτύξουμε και πάλι κατά Taylor και να πάρουμε τις παρακάτω δύο σχέσεις.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\zeta_1), \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\zeta_2), \end{aligned} \quad (1.10)$$

με  $\zeta_1 \in (x_0, x_0 + h)$ ,  $\zeta_2 \in (x_0 - h, x_0)$  και  $h > 0$ . Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2 σχέσεις της (1.10) έχουμε

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\zeta_1) + f^{(4)}(\zeta_2)).$$

Συνεπώς από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (\zeta_2, \zeta_1), \quad (1.11)$$

από όπου εύκολα προκύπτει η ζητούμενη σχέση (1.9).  $\square$





## Κεφάλαιο 2

# Το πρόβλημα 2 σημείων.

### 2.1 Το πρόβλημα 2 σημείων

Θεωρούμε το πρόβλημα δύο σημείων για μια συνήθη διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε.) δεύτερης τάξης: Ζητείται μια συνάρτηση  $u \in C^2[a, b]$ , τέτοια ώστε

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad \text{με } u(a) = u(b) = 0, \quad (2.1)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $q, f \in C[a, b]$  και  $q(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

Θα θεωρήσουμε ένα φυσικό αριθμό  $N$  και μια διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$  από ισαπέχοντα  $N + 2$  σημεία  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , όπου  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Τότε σε κάθε σημείο του διαμερισμού  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , θα ισχύει:

$$-u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις των τιμών  $u(x_i)$  της ακριβούς λύσης του (2.1), τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ . Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι  $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$ , θέτουμε λοιπόν  $U_0 = U_{N+1} = 0$ . Οι τιμές των  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο.

Για να προσεγγίσουμε την  $u''(x)$  στα σημεία  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\delta_{h,2}^c$  που θεωρήσαμε στην (1.8), έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u \in C^4[a, b]$ , λόγω της (1.11) η (2.2) γίνεται,

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

όπου  $|\eta_i| = \frac{h^2}{12}|u^{(4)}(\xi_i)|$ , με  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . Για να κατασκευάσουμε λοιπόν προσεγγίσεις  $U_i$  των  $u(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , θεωρούμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U \in \mathbb{R}^N$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$ , το σύστημα των εξισώσεων (2.4) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα με το γραμμικό σύστημα

$$AU = F, \quad (2.5)$$

όπου  $A$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 + h^2q(x_2) & -1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -1 & 2 + h^2q(x_{N-1}) & -1 \\ & & & -1 & 2 + h^2q(x_N) \end{pmatrix}$$

και  $F = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ . Ένα ερώτημα που δημιουργείται είναι αν το γραμμικό σύστημα (2.5) έχει μοναδική λύση, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ο πίνακας  $A$  είναι τριδιαγώνιος, δηλαδή τα στοιχεία  $a_{ij} = 0$  αν  $|i - j| > 1$  και έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο αν  $q(x) > 0$  για  $x \in [a, b]$ . Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν εύκολα υλοποιήσιμοι αλγόριθμοι για την ανάλυση  $LU$  ενός αντιστρέψιμου τριδιαγώνιου πίνακα.

### 2.1.1 Επίλυση τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα  $Ay = z$ , δηλαδή να βρούμε το  $y \in \mathbb{R}^N$ , όπου  $A$  είναι ένας  $N \times N$  τριδιαγώνιος πίνακας με στοιχεία

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & c_N & a_N \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

και  $z \in \mathbb{R}^N$  ένα δοσμένο διάνυσμα. Για τα στοιχεία του πίνακα  $A$ , θα κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις

$$|a_1| > |b_1|, \quad |a_k| \geq |b_k| + |c_k|, \quad k = 2, \dots, N-1, \quad |a_N| > |c_N|. \quad (2.7)$$

Για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα  $Ay = b$  μπορούμε να εφαρμόσουμε διάφορους αλγόριθμους όπως είναι η απαλοιφή Gauss. Στην περίπτωση όμως του πίνακα  $A$ , είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε έναν αλγόριθμο που να εφαρμοστεί ειδικά για τριδιαγώνιους πίνακες, όπως ο ακόλουθος:

Ο πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πινάκων  $LU$  που έχουν τη μορφή

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ c_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & c_N & d_N \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & & \\ & 1 & e_2 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

δηλαδή έχουν μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και ο  $L$  στην πρώτη υποδιαγώνιο και ο  $U$  στην πρώτη υπερδιαγώνιο. Είναι απλό να δούμε ότι οι αριθμοί  $d_1, \dots, d_N$  και  $e_1, \dots, e_{N-1}$  προκύπτουν με τον ακόλουθο αλγόριθμο,

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1, e_1 = b_1/d_1 \\ \text{για } k &= 2, 3, \dots, N-1 \\ d_k &= a_k - c_k e_{k-1} \\ e_k &= b_k/d_k \\ \text{τέλος για} \\ d_N &= a_N - c_N e_{N-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Η ύπαρξη των πινάκων  $L$  και  $U$ , και η ολοκλήρωση του αλγορίθμου (2.9) αποδεικνύεται στο ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 2.1.** Έστω  $A$  ένας τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής (2.6) τέτοιος ώστε ισχύουν οι υποθέσεις (2.7), τότε υπάρχουν πίνακες  $L$  και  $U$  και ο αλγόριθμος (2.9) είναι καλά ορισμένος και ολοκληρώνεται.

*Απόδειξη.* Για να είναι ο αλγόριθμος (2.6) καλά ορισμένος και συνεπώς να υπάρχει η ανάλυση του  $A=LU$  (2.8), αρκεί να ισχύει,  $d_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Από τις υποθέσεις (2.7) έχουμε ότι  $|a_1| > |b_1|$ , οπότε  $|e_1| < 1$ . Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d_k \neq 0, k = 1, \dots, N, \quad |e_k| < 1$$

Έστω ότι ισχύει  $d_{k-1} \neq 0$ ,  $|e_{k-1}| < 1$  για κάποιο  $k$ . Τότε  $|d_k| = |a_k - c_k e_{k-1}| \geq |a_k| - |c_k| |e_{k-1}| > |a_k| - |c_k| \geq |b_k| > 0$ . Επιπλέον  $|e_k| = |b_k|/|d_k| < 1$

□

Εφόσον έχουμε δείξει ότι  $A = LU$ , για να λύσουμε τώρα το γραμμικό σύστημα  $LUy = z$ , λύνουμε πρώτα το  $Lw = z$  εφαρμόζοντας τον ακόλουθο αλγόριθμο

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1/d_1 \\ \text{για } k &= 2, 3, \dots, N-1 \\ w_k &= (z_k - c_k w_{k-1})/d_k \\ \text{τέλος για} \end{aligned} \tag{2.10}$$

και στη συνέχεια το διάνυσμα  $y$  προκύπτει ως λύση του γραμμικού συστήματος  $Uy = w$

$$\begin{aligned} y_N &= w_N \\ \text{για } k &= N-1, N-2, \dots, 1 \\ y_k &= w_k - e_k y_{k+1} \\ \text{τέλος για} \end{aligned} \tag{2.11}$$

**Παράδειγμα 1:** Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$-u''(x) + u(x) = \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad \text{με } u(0) = u(1) = 0. \tag{2.12}$$

Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι η

$$u(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{1 + 4\pi^2}. \tag{2.13}$$

Η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών (2.4) γίνεται τώρα

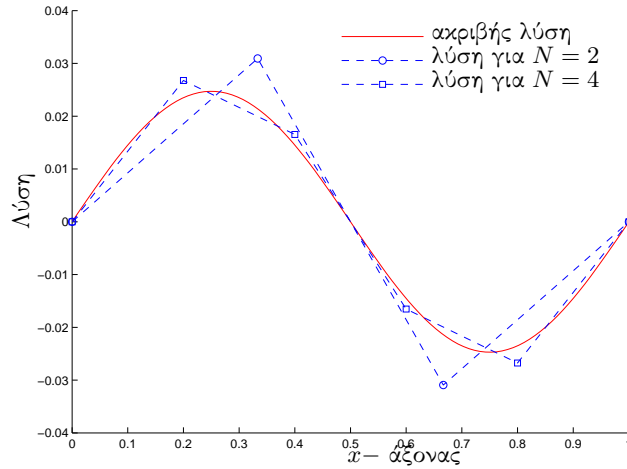
$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + U_i = \sin(2\pi x_i), \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.14}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο, μπορούμε να βρούμε διακριτές λύσεις που προσεγγίζουν την ακριβή λύση, όπως φαίνεται από το γράφημα 2.1.1

### 2.1.2 Ανάλυση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

**Θεώρημα 2.1.** Έστω  $U \in \mathbb{R}^N$  η λύση του προβλήματος (2.4), με  $U_0 = U_{N+1} = 0$ . Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x_i)|. \tag{2.15}$$



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα 1: Ακριβής και προσεγγιστικές λύσεις

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.4), εύκολα παίρνουμε

$$(2 + h^2 q(x_i))U_i = U_{i+1} + U_{i-1} + f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Στη συνέχεια, επειδή  $q$  συνεχής και  $q(x) > 0$ , για  $x \in [a, b]$ , αν θέσουμε  $q_{\min} = \min_{x \in [a, b]} q(x)$ , η παραπάνω ισότητα δίνει για κάθε  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} (2 + h^2 q_{\min})|U_i| &\leq |U_{i+1}| + |U_{i-1}| + |f(x_i)| \\ &\leq 2 \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i| + \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \end{aligned}$$

Οπότε

$$(2 + h^2 q_{\min}) \max_{1 \leq i \leq N} |U_i| \leq 2 \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i| + \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

η οποία εύκολα δίνει τη ζητούμενη σχέση (2.15).  $\square$

**Ευστάθεια:** Μια αριθμητική μέθοδος λέγεται *ευσταθής* αν μικρές μεταβολές των δεδομένων οδηγούν σε μικρές μεταβολές της αριθμητικής λύσης. Στην ειδική περίπτωση που η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική όπως είναι η (2.1), ζητούμε η αριθμητική λύση να φράσσεται με μια σταθερά επί τα δεδομένα, όπως η σχέση (2.15).

Η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος είναι εσωτερική ιδιότητα του σχήματος, δηλαδή δεν έχει σχέση με τη συγκεκριμένο πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε.

Από το Θεώρημα 2.1 μπορούμε να δείξουμε ότι το γραμμικό σύστημα που οδηγεί η (2.4) έχει μοναδική λύση. Αν θεωρήσουμε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα, τότε από το Θεώρημα 2.1, οδηγούμαστε ότι η μοναδική λύση είναι η μηδενική λύση  $U_i = 0, i = 0, \dots, N + 1$ .

**Συνέπεια:** Αν αντικαταστήσουμε στο αριθμητικό σχήμα που ικανοποιεί η προσεγγιστική λύση  $U$ , (2.4), με την ακριβή λύση  $u$ , τότε θα πάρουμε τη σχέση (2.3). Φυσικά το διάνυσμα με συνιστώσες  $u(x_i), i = 1, \dots, N$  δεν θα ικανοποιεί τη (2.4) και θα υπάρχει ένα σφάλμα, όπως φαίνεται από τη (2.3). Αν αυτό το σφάλμα  $\eta_i$ , τείνει στο μηδέν καθώς το  $h$  τείνει στο μηδέν, όπως γίνεται στη περίπτωση του σχήματος που μελετούμε, τότε η μέθοδος λέγεται *συνεπής*.

**Θεώρημα 2.2.** Έστω ότι η λύση  $u$  του προβλήματος (2.1) είναι αρκετά ομαλή,  $u \in C^4[a, b]$ , τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$ , ανεξάρτητη του  $h$ , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i - u(x_i)| \leq Ch^2. \quad (2.16)$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $E_i = U_i - u(x_i), i = 0, \dots, N + 1$ , όπου λόγω των σχέσεων  $U_0 = u(a) = 0$  και  $U_{N+1} = u(b) = 0$ , έχουμε  $E_0 = E_{N+1} = 0$ . Αφαιρούμε τώρα κατά μέλη τις (2.4) και (2.3), οπότε παίρνουμε

$$E_{i+1} - (2 + q(x_i)h^2)E_i + E_{i-1} = h^2\eta_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

όπου λόγω του Λήμματος 1.2,

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\eta_i| \leq \frac{h^2}{12} \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|.$$

Θέτουμε στη συνέχεια  $\bar{E} = \max_{1 \leq i \leq N} |E_i|$ ,  $\bar{\eta} = \max_{1 \leq i \leq N} |\eta_i|$  και επειδή  $q$  συνεχής και  $q(x) > 0$ , για  $x \in [a, b]$ ,  $q_{\min} = \min_{x \in [a, b]} q(x)$ . Συνεπώς

$$(2 + q(x_i)h^2)E_i = E_{i+1} + E_{i-1} + h^2\eta_i,$$

οπότε

$$(2 + q_{\min}h^2)|E_i| \leq 2\bar{E} + h^2\bar{\eta}.$$

Από όπου προκύπτει

$$q_{\min}h^2 \max_{1 \leq i \leq N} |E_i| \leq h^2\bar{\eta}$$

η οποία δίνει τη ζητούμενη ανισότητα

$$\max_{1 \leq i \leq N} |E_i| \leq \bar{\eta} \leq Ch^2$$

□

### 2.1.3 Συνοριακές Συνθήκες Neumann

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα δύο σημείων (2.1), με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή το εξής:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad \text{με } u'(a) = u'(b) = 0, \quad (2.17)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $q, f \in C[a, b]$  και  $q(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο να ισχύει ότι  $q > 0$  στο  $[a, b]$ , γιατί διαφορετικά δεν έχουμε μοναδική λύση του (2.17). Πράγματι, το πρόβλημα

$$-u''(x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad \text{με } u'(a) = u'(b) = 0, \quad (2.18)$$

έχει ως λύση όλες τις σταθερές συναρτήσεις στο  $[a, b]$ .

Θεωρούμε και πάλι ένα φυσικό αριθμό  $N$  και μια διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$  από ισαπέχοντα  $N+2$  σημεία  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , όπου  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Σκοπός μας είναι και πάλι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις  $U_i$  των τιμών  $u(x_i)$  της ακριβούς λύσης του (2.17). Όμως σε αντίθεση με προηγουμένως δεν γνωρίζουμε τις τιμές  $u(x_0)$  και  $u(x_{N+1})$ . Έτσι τώρα θα χρειαστούμε 2 επιπλέον εξισώσεις εκτός από τις (2.4), για να υπολογίσουμε τα  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ .

Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να θεωρήσουμε ότι η  $u$  επεκτείνεται άρτια αριστερά του  $a$  και δεξιά του  $b$ , δηλαδή  $u(a+h) = u(a-h)$  και  $u(b-h) = u(b+h)$ ,  $h > 0$ . Ο λόγος που θεωρούμε άρτια επέκταση είναι διότι αν π.χ. η  $u$  είναι άρτια γύρω από το  $a$ , τότε  $u'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (u(a+h) - u(a-h))/(2h) = 0$ . Επομένως η προσέγγιση της  $u''(a)$ ,  $\delta_{h,2}^c u(a)$  γίνεται

$$\delta_{h,2}^c u(a) = \frac{u(a+h) - 2u(a) + u(a-h)}{h^2} = 2 \frac{u(a+h) - u(a)}{h^2}.$$

Συνεπώς οι δύο επιπλέον σχέσεις που συμπληρώνουν τις (2.4) εδώ είναι

$$\begin{aligned} -2 \frac{U_1 - U_0}{h^2} + q(x_0)U_0 &= f(x_0) \\ -2 \frac{U_N - U_{N+1}}{h^2} + q(x_{N+1})U_{N+1} &= f(x_{N+1}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U \in \mathbb{R}^{N+2}$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_0, \dots, U_{N+1})^T$  το νέο σύστημα εξισώσεων μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα

$$AU = F, \quad (2.20)$$

όπου  $A$  είναι ο  $(N+2) \times (N+2)$  πίνακας

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_0) & -2 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 + h^2q(x_1) & -1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -1 & 2 + h^2q(x_N) & -1 \\ & & & -2 & 2 + h^2q(x_{N+1}) \end{pmatrix}$$

και  $F = (f(x_0), \dots, f(x_{N+1}))^T$ . Προκύπτει λοιπόν ένα τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο διότι  $q > 0$ . Με όμοια επιχειρήματα όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 2.1, προκύπτει

**Θεώρημα 2.3.** Έστω  $U \in \mathbb{R}^{N+2}$  η λύση του προβλήματος (2.17). Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x_i)|. \quad (2.21)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη προκύπτει με ανάλογο τρόπο όπως και αυτή του Θεωρήματος 2.1  $\square$

Και σε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να δείξουμε ότι η προσεγγιστική λύση θα συγκλίνει στην ακριβή λύση του (2.17).

**Θεώρημα 2.4.** Έστω ότι η λύση  $u$  του προβλήματος (2.17) είναι αρκετά ομαλή,  $u \in C^4[a, b]$ , τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$ , ανεξάρτητη του  $h$ , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i - u(x_i)| \leq Ch. \quad (2.22)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη προκύπτει με ανάλογο τρόπο όπως και αυτή του Θεωρήματος 2.2  $\square$

**Παρατήρηση:** Μπορούμε να δείξουμε μεγαλύτερη τάξη σύγκλισης (δηλαδή 2) όπως και για τη μέθοδο για το πρόβλημα με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες, όπως χρειαζόμαστε περισσότερη αναλύση της μεθόδου που δεν θα αναπτύξουμε σε αυτές τις σημειώσεις.

#### 2.1.4 Ένα γενικότερο πρόβλημα

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα δύο σημείων (2.1), με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet,

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad \text{με } u(a) = u(b) = 0, \quad (2.23)$$



όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $p, q, f \in C[a, b]$  και  $q(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις των τιμών  $u(x_i)$  της ακριβούς λύσης του (2.1), τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ . Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι  $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$ , θέτουμε λοιπόν  $U_0 = U_{N+1} = 0$ . Οι τιμές των  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.24)$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U \in \mathbb{R}^N$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_1, \dots, U_N)^T$  το νέο σύστημα εξισώσεων μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα

$$AU = F, \quad (2.25)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$  είναι ο πίνακας

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_0) & -1 + p(x_1)\frac{h}{2} & 0 & & 1 \\ -1 - p(x_2)\frac{h}{2} & 2 + h^2q(x_1) & -1 + p(x_2)\frac{h}{2} & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 - p(x_{N-1})\frac{h}{2} & 2 + h^2q(x_{N-1}) & -1 + p(x_{N-1})\frac{h}{2} \\ 0 & 0 & & -1 - p(x_N)\frac{h}{2} & 2 + h^2q(x_N) \end{pmatrix}$$

και  $F = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ . Προκύπτει λοιπόν ένα τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα. Για να έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο ο  $A$  πρέπει

$$|2 + h^2q(x_i)| \geq |1 + p(x_i)\frac{h}{2}| + |1 - p(x_i)\frac{h}{2}|, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

καθώς και

$$|2 + h^2q(x_1)| \geq |1 - p(x_1)\frac{h}{2}|, \quad \text{και} \quad |2 + h^2q(x_N)| \geq |1 + p(x_N)\frac{h}{2}|.$$

Για να ισχύουν οι παραπάνω αρκεί να ισχύει ότι  $|p(x_i)\frac{h}{2}| < 1$ , γιατί σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι  $1 + p(x_i)\frac{h}{2} > 0$  και  $1 - p(x_i)\frac{h}{2} > 0$ . Με όμοια επιχειρήματα όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 2.1, προκύπτει

**Θεώρημα 2.5.** Έστω  $U \in \mathbb{R}^N$  η λύση του προβλήματος (2.23) και επιπλέον  $|p(x_i)\frac{h}{2}| < 1$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ . Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x_i)|. \quad (2.26)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη προκύπτει με ανάλογο τρόπο όπως και αυτή του Θεωρήματος 2.1  $\square$

## 2.2 Ασκήσεις

Ασκήσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} -u''(x) + p(x)u' + q(x)u(x) &= f(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a) &= c, \quad u(b) = d. \end{aligned}$$

1. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -x^2 u''(x) - xu'(x) + 4u(x) &= 20x^3, \quad x \in [1, 2], \\ u(1) &= 0, \quad u(2) = 0. \end{aligned}$$

Γράψτε το αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές. Ποιός είναι ο περιορισμός για το βήμα  $h$ , ώστε ο αντίστοιχος πίνακας που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης να είναι αντιστρέψιμος;

2. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u''(x) + u' &= 1, \quad x \in [a, b], \\ u(a) &= c, \quad u(b) = d. \end{aligned}$$

(α') Έστω ότι προσεγγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο,  $u''(x_i)$ , με τη κεντρική διαφορά  $(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))/h^2$  και τη πρώτη παράγωγο,  $u'(x_i)$ , με τη διαφορά  $(u(x_i) - u(x_{i-1}))/h$ . Ποιό θα είναι το διακριτό σχήμα και ποιό το σφάλμα διακριτοποίησης;

(β') Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων. Για να είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας υπάρχει περιορισμός στο βήμα  $h$  ;

3. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), \quad x \in [0, 1], \\ au(0) + bu'(0) &= c, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

(α') Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(h^2)$ .

(β') Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων.

4. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), \quad x \in [0, 1], \\ u(0) &= u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{aligned}$$

(α') Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(h^2)$ .

(β') Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων.

5. (α') Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor δείξτε ότι  $u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = h^2 u''(x_i) + \frac{1}{12} h^4 u''''(x_i) + O(h^6)$  και από αυτό δείξτε ότι  $u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = \frac{1}{12} h^2 (u''(x_{i+1}) + 10u''(x_i) + u''(x_{i-1})) + O(h^6)$ .

(β') Αν υποθέσουμε ότι η  $u$  ικανοποιεί τη Δ.Ε.  $u''(x) = F(x, u)$ , χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να καταλήξετε στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών

$$-(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})) = \frac{h^2}{12} (F_{i+1} + 10F_i + F_{i-1})$$

(γ') Διατυπώστε τη μέθοδο όταν  $F(x, u) = f(x) - q(x)u$ . Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πίνακα.

6. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-\frac{d}{dx} \left( D(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

όπου  $D$  είναι θετική συνάρτηση.

(α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής;

7. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-u''(x) + p(x)u' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Θεωρούμε ένα μη ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος  $[0, 1]$ , και συμβολίζουμε με  $h_i = x_i - x_{i-1}$

(α') Εκφράστε με πεπερασμένες διαφορές την προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου στο  $x_i$  και δώστε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης. Οι προσεγγίσεις πρέπει να είναι συνεπείς, δηλαδή αν  $h_i$  και  $h_{i+1}$  πάει στο μηδέν, τότε το σφάλμα τείνει και αυτό στο μηδέν.

(β') Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος για να διατυπώστε ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την παραπάνω διαφορική εξίσωση.



## Κεφάλαιο 3

# Παραβολικό πρόβλημα

Θεωρούμε το παραβολικό πρόβλημα: Ζητείται μια συνάρτηση  $u : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & x \in [a, b], & t \in [0, T] \\u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \in [0, T] \\u(x, 0) &= g(x), & x \in [a, b]\end{aligned}\tag{3.1}$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $g \in C[a, b]$ .

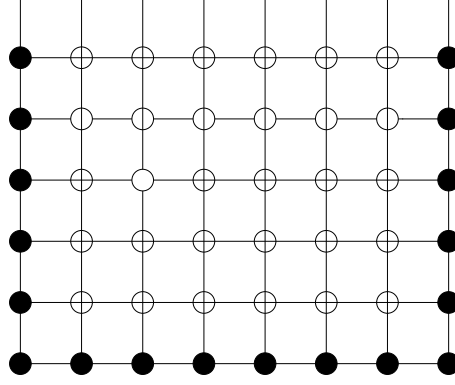
### 3.1 Αμεση Euler

Θα θεωρήσουμε ένα φυσικό αριθμό  $N$  και τη διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$  από ισαπέχοντα  $N + 2$  σημεία  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ , όπου  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Επίσης θεωρούμε και ένα φυσικό αριθμό  $M$  και τη διαμέριση του  $[0, T]$  από ισαπέχοντα  $M + 1$  σημεία  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^M = T$ , όπου  $k = t^{j+1} - t^j$ ,  $j = 0, \dots, M$ , βλ. Σχήμα 3.1. Τότε σε κάθε σημείο  $(x_i, t^j)$  του διαμερισμού του  $[a, b] \times [0, T]$ , θα ισχύει:

$$u_t(x_i, t^j) = u_{xx}(x_i, t^j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M.\tag{3.2}$$

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις των τιμών  $u(x_i, t^j)$  της ακριβούς λύσης του (3.1), τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $U_i^j$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι  $u(x_0, t^j) = u(x_{N+1}, t^j) = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Θέτουμε λοιπόν  $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Εκτός από αυτές είναι γνωστές και οι τιμές στο χρόνο  $t = 0$ , δηλαδή οι  $U_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Σκοπός μας είναι λοιπόν να προσδιορίσουμε τις τιμές στα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος. Στο σχήμα 3.1 σημειώνουμε με έντονο μαύρο

χρώμα τα γνωστά και με κενό τις τιμές  $U_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  που θέλουμε να υπολογίσουμε, οι οποίες προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο.



Σχήμα 3.1: Διαμερισμός του χωρίου  $[a, b] \times [0, T]$ .

Για να προσεγγίσουμε την  $u_t(x, t)$  στα σημεία  $(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\delta_h^+$  που θεωρήσαμε στην (1.1), έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u_{tt}(x, t) \in C([a, b] \times [0, T])$ , λόγω της (1.11) η (3.2) γίνεται,

$$\frac{u(x_i, t^{j+1}) - u(x_i, t^j)}{k} = u_{xx}(x_i, t^j) + \hat{\eta}_i^j, \quad j = 0, \dots, M - 1, \quad (3.3)$$

όπου  $|\hat{\eta}_i^j| = \frac{k}{2}|u_{tt}(x_i, \xi^j)|$ , με  $\xi^j \in (t^j, t^{j+1})$ . Στη συνέχεια για να προσεγγίσουμε την  $u_{xx}(x, t)$  στα σημεία  $(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\delta_{h,2}^c$  που θεωρήσαμε στην (1.8), έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u_{xxx}(x, t) \in C([a, b] \times [0, T])$ , λόγω της (1.11) η (3.3) γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t^{j+1}) - u(x_i, t^j)}{k} &= \frac{u(x_{i+1}, t^j) - 2u(x_i, t^j) + u(x_{i-1}, t^j)}{h^2} \\ &+ \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j, \end{aligned} \quad (3.4)$$

με  $i = 1, \dots, N$ , και  $j = 0, \dots, M - 1$ , και  $|\tilde{\eta}_i^j| = \frac{h^2}{12}|\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\xi_i, t^j)|$ , με  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

**Λήμμα 3.1.** Έστω  $u$  η λύση του (3.1), τότε

$$\delta_h^+ u(x_i, t^j) - \delta_{h,2}^c u(x_i, t^j) = \eta_i^j,$$

με  $\max_{0 \leq j \leq M-1} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j| \leq C(k + h^2)$ .

Απόδειξη. Λόγω των (3.3) και (3.4) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει το ζητούμενο, με  $\eta_i^j = \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j$ .  $\square$

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν προσεγγίσεις  $U_i^j$  των  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ , θεωρούμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M - 1. \quad (3.5)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι  $\lambda = \frac{k}{h^2}$  η (3.5) γράφεται ως

$$U_i^{j+1} = \lambda U_{i+1}^j + (1 - 2\lambda)U_i^j + \lambda U_{i-1}^j, \quad i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M - 1. \quad (3.6)$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U^j \in \mathbb{R}^N$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_1^j, \dots, U_N^j)^T$ , το σύστημα των εξισώσεων (3.6) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα ως το γραμμικό σύστημα

$$U^{j+1} = AU^j, \quad (3.7)$$

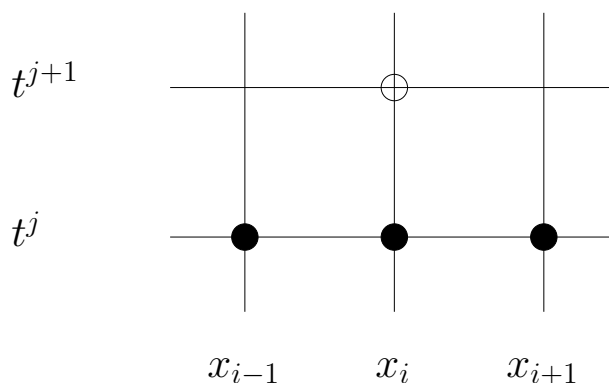
όπου  $A$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ & & & & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση στο χρονικό βήμα  $t^{j+1}$ , χρειάζεται να γνωρίζουμε τη προσέγγιση στο προηγούμενο βήμα χρονικό βήμα  $t^j$ , οπότε απλώς πολλαπλασιάζουμε το  $A$  με το  $U^j$ . Ξεκινάμε από το χρόνο  $t^0 = 0$  που γνωρίζουμε τη λύση και υπολογίζουμε το  $U^1 = AU^0$ , και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Επειδή για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση σε κάθε χρονικό βήμα δεν χρειάζεται να λύσουμε κάποιο γραμμικό σύστημα η μέθοδος καλείται *άμεση*. Ποιά συγκεκριμένα τη μέθοδο (3.5) ή (3.6), την ονομάζουμε *άμεση μέθοδο του Euler*.

Επειδή δεν χρειάζεται να επιλύσουμε κάποιο γραμμικό σύστημα η υπέρξη και η μοναδικότητα της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε χρονικό βήμα είναι δεδομένη.

**Συνέπεια:** Αν αντικαταστήσουμε στο αριθμητικό σχήμα που ικανοποιεί η προσεγγιστική λύση  $U_i^j$ , (3.5), με την ακριβή λύση  $u$ , τότε το διάνυσμα με συνιστώσες  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$  δεν θα ικανοποιεί τη (3.5) και θα υπάρξει ένα σφάλμα, όπως φαίνεται από τη (3.4). Το σφάλμα  $\eta_i^j$ , τείνει



Σχήμα 3.2: Πλέγμα για τον υπολογισμό της λύσης με την άμεση μέθοδο του Euler

στο μηδέν καθώς το  $h$  και  $k$  τείνουν στο μηδέν, όπως γίνεται στη περίπτωση του σχήματος που μελετούμε, οπότε η άμεση μέθοδος του Euler είναι συνεπής.

Για την **ευστάθεια** της μεθόδου μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.1.** Έστω  $U^j \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , η λύση του προβλήματος (3.7), με  $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Τότε αν  $\lambda = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$  ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j| \leq \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^0|, \quad \text{για } j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.6) και το γεγονός  $\lambda < \frac{1}{2}$ , εύκολα παίρνουμε

$$|U_i^{j+1}| \leq \lambda(|U_{i+1}^j| + |U_{i-1}^j|) + (1 - 2\lambda)|U_i^j|, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Αν θέσουμε λοιπόν  $\bar{U}^j = \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j|$ ,  $j = 0, \dots, M$ , έχουμε

$$\bar{U}^{j+1} \leq \bar{U}^j \leq \dots \leq \bar{U}^0,$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Για να δείξουμε την ευστάθεια της μεθόδου στο Θεώρημα 3.1 υποθέσαμε ότι  $\lambda < 1/2$ . Λόγω της υπάρξης μιας συνθήκης ανάμεσα στις παραμέτρους διακριτοποίησης  $k$  και  $h$ , λέμε ότι η μέθοδος είναι **ευσταθής υπό συνθήκες**. Το γεγονός ότι αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία και όχι οφείλεται σε τυχόν αδυναμία μας να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1 φαίνεται από την ακόλουθη διατύπωση της ευστάθειας η οποία καλείται **ευστάθεια Von Neumann**



Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & x \in [0, 1], t \in [0, T] \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \in [0, T] \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), & x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Είναι απλό να δούμε ότι  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$  και ότι για κάθε  $t \geq 0$  η λύση είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση της οποίας το πλάτος μειώνεται συνεχώς με εκθετικό τρόπο. Είναι προφανές ότι αν η προσεγγιστική λύση δεν αποτυπώνει αυτή την ιδιότητα, ή τουλάχιστον παραμένει φραγμένο, δεν θα προσεγγίζει 'καλά' την ακριβή λύση του προβλήματος.

Ας υποθέτουμε ότι η διακριτή λύση έχει τη μορφή  $U_i^j = w_j \sin(\pi x_i)$  δηλαδή αποτελείται από δύο παράγοντες, ο ένας εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t^j$  και ο άλλος είναι ακριβώς η ημιτονοειδής συνάρτηση που βρίσκεται στην έκφραση της ακριβούς λύσης. Θέλουμε να μελετήσουμε το πλάτος  $w_j$  και να δούμε αν παραμένει φραγμένο όπως στην περίπτωση της ακριβούς λύσης. Αντικαθιστούμε λοιπόν στην εξίσωση (3.6), οπότε

$$w_{j+1} \sin(\pi x_i) = \lambda w_j \sin(\pi x_{i+1}) + (1 - 2\lambda) w_j \sin(\pi x_i) + \lambda w_j \sin(\pi x_{i-1}), \quad (3.9)$$

για  $i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M - 1$ .

Χρησιμοποιούμε τώρα τις ακόλουθες τριγωνομετρικές ιδιότητες

$$\begin{aligned} \sin(\pi x_{i+1}) &= \sin(\pi(x_i + h)) = \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) + \cos(\pi x_i) \sin(\pi h) \\ \sin(\pi x_{i-1}) &= \sin(\pi(x_i - h)) = \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) - \cos(\pi x_i) \sin(\pi h) \end{aligned} \quad (3.10)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} w_{j+1} \sin(\pi x_i) &= 2\lambda w_j \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) + (1 - 2\lambda) w_j \sin(\pi x_i) \\ &= (2\lambda(\cos(\pi h) - 1) + 1) w_j \sin(\pi x_i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Λόγω τώρα της τριγωνομετρικής ιδιότητας

$$2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.12)$$

η (3.11) γίνεται

$$w_{j+1} = (1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)) w_j. \quad (3.13)$$

Συνεπώς  $w_j = \kappa^j w_0$ , με  $\kappa = 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ . Άρα αν  $|\kappa| < 1$  η μέγιστη τιμή της  $U_i^j$  είναι φραγμένη. Θα πρέπει λοιπόν

$$-1 \leq 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \leq 1 \quad \text{ή} \quad 2\lambda \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) < 1.$$

Ισοδύναμμα λοιπόν αρκεί  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ . Βλέπουμε ότι η συνθήκη ευστάθειας στο Θεώρημα 3.1 είναι αναγκαία για έχουμε ‘καλές’ προσεγγίσεις με την άμεση μέθοδο του Euler.

Στη συνέχεια δείχνουμε το ακόλουθο θεώρημα για τη σύγκλιση της μεθόδου.

**Θεώρημα 3.2.** Έστω ότι η λύση  $u$  του προβλήματος (3.1) είναι αρκετά ομαλή, και  $U_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  η λύση της μεθόδου (3.3) τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$ , ανεξάρτητη των  $k, h$ , τέτοια ώστε

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j - u(x_i, t^j)| \leq C(k + h^2). \quad (3.14)$$

Απόδειξη. Θέτουμε  $E_i^j = U_i^j - u(x_i, t^j)$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ ,  $j = 0, \dots, M$ , όπου λόγω των σχέσεων  $U_0^j = u(a, t^j) = 0$  και  $U_{N+1}^j = u(b, t^j) = 0$ , έχουμε  $E_0^j = E_{N+1}^j = 0$ . Αφαιρούμε τώρα κατά μέλη τις (3.5) και (3.4), οπότε παίρνουμε

$$E_i^{j+1} = \lambda E_{i+1}^j + (1 - 2\lambda)E_i^j + \lambda E_{i-1}^j + k\eta_i^j, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

με  $\eta_i^j = \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j$ , όπου λόγω του Λήμματος 3.1,

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j| \leq C(k + h^2).$$

Θέτουμε στη συνέχεια  $\bar{E}^j = \max_{1 \leq i \leq N} |E_i^j|$ ,  $\bar{\eta} = \max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j|$ . Συνεπώς

$$E_i^{j+1} = 2\lambda \bar{E}^j + (1 - 2\lambda)\bar{E}^j + k\bar{\eta},$$

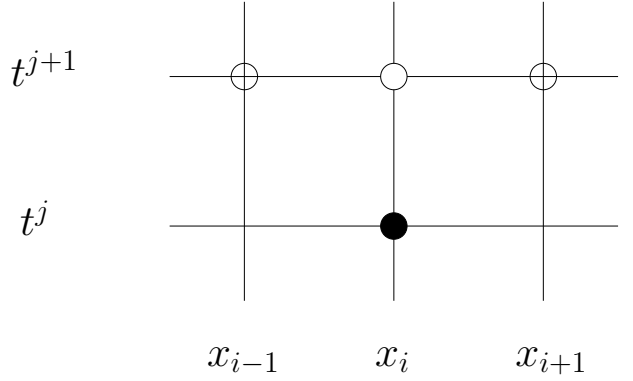
οπότε

$$\bar{E}^{j+1} \leq \bar{E}^j + k\bar{\eta} \leq \dots \leq \bar{E}^0 + jk\bar{\eta}.$$

Από όπου, επειδή  $jk \leq T$ , προκύπτει η ζητούμενη σχέση.  $\square$

### 3.2 Πεπλεγμένη Euler

Μια διαφορετική μέθοδος προκύπτει αν αντί για τη προσέγγιση  $\delta_h^+$  της  $u_t$  που θεωρήσαμε στην άμεση μέθοδο του Euler θεωρήσουμε τη  $\delta_h^-$ . Έτσι θεωρούμε και πάλι μια διαμέριση  $[a, b] \times [0, T]$  όπως και πρίν και θα κατασκευάσουμε προσεγγίσεις των τιμών  $u(x_i, t^j)$  της ακριβούς λύσης του (3.1), τις οποίες θα συμβολίζουμε με  $U_i^j$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ ,  $j = 0, \dots, M$ , βλέπε εικόνα (3.1). Λόγω των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι  $u(x_0, t^j) = u(x_{N+1}, t^j) = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Θέτουμε λοιπόν  $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Εκτός από



Σχήμα 3.3: Πλέγμα για τον υπολογισμό της λύσης με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler

αυτές είναι γνωστές και οι τιμές στο χρόνο  $t = 0$ , δηλαδή οι  $U_i^0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Σκοπός μας είναι λοιπόν να προσδιορίσουμε τις τιμές στα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος.

Για να προσεγγίσουμε την  $u_t(x, t)$  στα σημεία  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , χρησιμοποιούμε αυτή τη φορά τη προσέγγιση  $\delta_h^-$  που θεωρήσαμε στην (1.1), έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u_{tt}(x, t) \in C([a, b] \times [0, T])$ , λόγω της (1.11) η (3.2) γίνεται,

$$\frac{u(x_i, t^j) - u(x_i, t^{j-1})}{k} = u_{xx}(x_i, t^j) + \hat{\eta}_i^j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.15)$$

όπου  $|\hat{\eta}_{t,i}^j| = \frac{k}{2}|u_{tt}(x_i, \xi^j)|$ , με  $\xi^j \in (t^{j-1}, t^j)$ . Στη συνέχεια για να προσεγγίσουμε την  $u_{xx}(x, t)$  στα σημεία  $(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\delta_{h,2}^c$  που θεωρήσαμε στην (1.8), έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u_{xxxx}(x, t) \in C([a, b] \times [0, T])$ , λόγω της (1.11) η (3.3) γίνεται,

$$\frac{u(x_i, t^j) - u(x_i, t^{j-1})}{k} = \frac{u(x_{i+1}, t^j) - 2u(x_i, t^j) + u(x_{i-1}, t^j)}{h^2} + \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j, \quad (3.16)$$

με  $i = 1, \dots, N$ , και  $j = 1, \dots, M$ , και  $\eta_i^j = \eta_{t,i}^j + \eta_{x,i}^j$ , όπου  $|\tilde{\eta}_i^j| = \frac{h^2}{12}|\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\xi_i, t^j)|$ , με  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

**Λήμμα 3.2.** Έστω  $u$  η λύση του (3.1), τότε

$$\delta_h^- u(x_i, t^j) - \delta_{h,2}^c u(x_i, t^j) = \eta_i^j,$$

με  $\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j| \leq C(k + h^2)$ .

Απόδειξη. Λόγω των (3.15) και (3.16) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει το ζητούμενο, με  $\eta_i^j = \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j$ .  $\square$

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν προσεγγίσεις  $U_i^j$  των  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , θεωρούμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M-1. \quad (3.17)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι  $\lambda = \frac{k}{h^2}$  η (3.17) γράφεται ως

$$-\lambda U_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)U_i^{j+1} - \lambda U_{i-1}^{j+1} = U_i^j, \quad i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M-1. \quad (3.18)$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U^j \in \mathbb{R}^N$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_1^j, \dots, U_N^j)^T$ , το σύστημα των εξισώσεων (3.18) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα ως το γραμμικό σύστημα

$$BU^{j+1} = U^j, \quad (3.19)$$

όπου  $B$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ & & & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση στο χρονικό βήμα  $t^{j+1}$ , χρειάζεται να γνωρίζουμε τη προσέγγιση στο προηγούμενο βήμα χρονικό βήμα  $t^j$  και να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (3.19). Ξεκινάμε από το χρόνο  $t^0 = 0$  που γνωρίζουμε τη λύση και λύνουμε το σύστημα  $BU^1 = U^0$ , και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Επειδή για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση σε κάθε χρονικό βήμα **χρειάζεται να λύσουμε κάποιο γραμμικό σύστημα** η μέθοδος καλείται *πεπλεγμένη ή έμμεση*. Ποιά συγκεκριμένα τη μέθοδο (3.17) ή (3.18), την ονομάζουμε *Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler*.

Ο πίνακας  $B$  στο γραμμικό σύστημα (3.19) είναι τριδιαγώνιος και έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο οπότε η ύπαρξη και η μοναδικότητα της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε χρονικό βήμα είναι δεδομένη.

**Συνέπεια:** Αν αντικαταστήσουμε στο αριθμητικό σχήμα που ικανοποιεί η προσεγγιστική λύση  $U_i^j$ , (3.17), με την ακριβή λύση  $u$ , τότε το διάνυσμα με

συνιστώσες  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$  δεν θα ικανοποιεί τη (3.17) και θα υπάρχει ένα σφάλμα, όπως φαίνεται από τη (3.16). Το σφάλμα  $\eta_i^j$ , τείνει στο μηδέν καθώς το  $h$  και  $k$  τείνουν στο μηδέν, όπως γίνεται στη περίπτωση του σχήματος που μελετούμε, οπότε η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι *συνεπής*.

Για την **ευστάθεια** της μεθόδου μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.** Έστω  $U^j \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , η λύση του προβλήματος (3.19), με  $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j| \leq \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^0|, \quad \text{για } j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.18) εύκολα παίρνουμε

$$(1 + 2\lambda)|U_i^{j+1}| \leq \lambda(|U_{i+1}^{j+1}| + |U_{i-1}^{j+1}|) + |U_i^j|, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Αν θέσουμε λοιπόν  $\bar{U}^j = \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j|$ ,  $j = 0, \dots, M$ , παίρνουμε

$$(1 + 2\lambda)\bar{U}^{j+1} \leq 2\lambda\bar{U}^{j+1} + \bar{U}^j.$$

και άρα

$$\bar{U}^{j+1} \leq \bar{U}^j \leq \dots \leq \bar{U}^0.$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση.  $\square$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την **ευστάθεια τύπου Von Neumann** για τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Αν λοιπόν  $u$  είναι η λύση του (3.8) και υποθέσουμε ότι η διακριτή λύση που παίρνουμε με τη μέθοδο (3.18) έχει τη μορφή  $U_i^j = w_j \sin(\pi x_i)$  τότε

$$-\lambda w_{j+1} \sin(\pi x_{i+1}) + (1 + 2\lambda)w_{j+1} \sin(\pi x_i) - \lambda w_{j+1} \sin(\pi x_{i-1}) = w_j \sin(\pi x_i), \quad (3.20)$$

για  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ . Χρησιμοποιούμε τώρα και πάλι τις τριγωνομετρικές ιδιότητες (3.10) και (3.12) και έχουμε

$$\begin{aligned} & -2\lambda w_{j+1} \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) + (1 + 2\lambda)w_{j+1} \sin(\pi x_i) \\ & = (1 + 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2}))w_{j+1} \sin(\pi x_i) = w_j \sin(\pi x_i). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Συνεπώς  $w_j = \kappa^j w_0$ , με  $\kappa = 1/(1 + 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2}))$ . Άρα επειδή για κάθε  $\lambda$ ,  $|\kappa| < 1$  η μέγιστη τιμή της  $U_i^j$  είναι φραγμένη, και άρα δεν είναι αναγκαία καμμία συνθήκη για την ευστάθεια της πεπλεγμένης Euler.

Στη συνέχεια δείχνουμε το ακόλουθο θεώρημα για τη σύγκλιση της μεθόδου.

**Θεώρημα 3.4.** Έστω ότι η λύση  $u$  του προβλήματος (3.1) είναι αρκετά ομαλή και  $U_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  η λύση της μεθόδου (3.18) τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$ , ανεξάρτητη των  $k, h$ , τέτοια ώστε

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j - u(x_i, t^j)| \leq C(k + h^2). \quad (3.22)$$

Απόδειξη. Θέτουμε  $E_i^j = U_i^j - u(x_i, t^j)$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ ,  $j = 0, \dots, M$ , όπου λόγω των σχέσεων  $U_0^j = u(a, t^j) = 0$  και  $U_{N+1}^j = u(b, t^j) = 0$ , έχουμε  $E_0^j = E_{N+1}^j = 0$ . Αφαιρούμε τώρα κατά μέλη τις (3.18) και (3.16), οπότε παίρνουμε

$$-\lambda E_i^{j+1} + (1 + 2\lambda)E_i^{j+1} - \lambda E_{i-1}^{j+1} = E_i^j + k\eta_i^j, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

όπου λόγω του Λήμματος 3.2,

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j| \leq C(k + h^2).$$

Θέτουμε στη συνέχεια  $\bar{E}^j = \max_{1 \leq i \leq N} |E_i^j|$ ,  $\bar{\eta} = \max_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M} |\eta_i^j|$  Συνεπώς

$$(1 + 2\lambda)E_i^{j+1} = 2\lambda \bar{E}^{j+1} + \bar{E}^j + k\bar{\eta},$$

οπότε

$$\bar{E}^{j+1} \leq \bar{E}^j + k\bar{\eta} \leq \dots \leq \bar{E}^0 + jk\bar{\eta}.$$

Από όπου, επειδή  $jk \leq T$ , προκύπτει η ζητούμενη σχέση.  $\square$

### 3.3 Crank–Nicolson

Μια διαφορετική μέθοδος προκύπτει αν αντί για τις προσεγγίσεις  $\delta_h^+$  ή  $\delta_h^-$  της  $u_t$  που θεωρήσαμε προηγουμένως θεωρήσουμε τη  $\delta_h^c$ . Θα κατασκευάσουμε τώρα προσεγγίσεις των τιμών  $u(x_i, t^j)$  της ακριβούς λύσης του (3.1),  $U_i^j$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ ,  $j = 0, \dots, M$ , μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας.

Λόγω του Λήμματος 1.1 έχουμε ότι

$$\frac{u(x_i, t^j) - u(x_i, t^{j-1})}{k} = u_t(x_i, t^j - \frac{k}{2}) + \hat{\eta}_i^j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.23)$$

όπου  $|\hat{\eta}_i^j| = \frac{k^2}{6} |u_{ttt}(x_i, \xi^j)|$ , με  $\xi^j \in (t^{j-1}, t^j)$ . Επειδή τα σημεία  $(x_i, t^j - \frac{k}{2})$  δεν αποτελούν μέρος του διαμερισμού που έχουμε θεωρήσει, προσεγγίζουμε την  $u_{xx}(x, t)$  στα σημεία  $(x_i, t^j - \frac{k}{2})$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ , με το μέσο

όρο της  $u_{xx}(x, t)$  στα  $(x_i, t^j)$  και  $(x_i, t^{j-1})$ . Έτσι είναι απλό να δούμε με τη βοήθεια αναπτυγμάτων Taylor ότι

$$u_{xx}(x_i, t^j - \frac{k}{2}) = \frac{1}{2}(u_{xx}(x_i, t^j) + u_{xx}(x_i, t^{j-1})) - \frac{k^2}{2}u_{xxtt}(x_i, \xi^j).$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\delta_{h,2}^c$  που θεωρήσαμε στην (1.8) για την προσέγγιση των  $u_{xx}(x_i, t^j)$ ,  $u_{xx}(x_i, t^{j-1})$ , έτσι αν υποθέσουμε ότι  $u_{xxxx}(x, t) \in C([a, b] \times [0, T])$ , λόγω της (1.11) η (3.23) γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t^j) - u(x_i, t^{j-1})}{k} &= \frac{1}{2} \frac{u(x_{i+1}, t^j) - 2u(x_i, t^j) + u(x_{i-1}, t^j)}{h^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{u(x_{i+1}, t^{j-1}) - 2u(x_i, t^{j-1}) + u(x_{i-1}, t^{j-1})}{h^2} + \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j, \end{aligned} \quad (3.24)$$

με  $i = 1, \dots, N$ , και  $j = 1, \dots, M$ , όπου  $|\hat{\eta}_i^j| = \frac{h^2}{12} |\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t^j)|$ , με  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

**Λήμμα 3.3.** Έστω  $u$  η λύση του (3.1), τότε

$$\delta_h^c u(x_i, t^j - \frac{k}{2}) - \frac{1}{2}(\delta_{h,2}^c u(x_i, t^j) + \delta_{h,2}^c u(x_i, t^{j-1})) = \eta_i^j,$$

με  $\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |\eta_i^j| \leq C(k^2 + h^2)$ .

*Απόδειξη.* Λόγω των (3.23) και (3.24) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει το ζητούμενο, με  $\eta_i^j = \hat{\eta}_i^j + \tilde{\eta}_i^j$ .  $\square$

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν προσεγγίσεις  $U_i^j$  των  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ , θεωρούμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{1}{2} \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}, \quad (3.25)$$

με  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ . Αν θεωρήσουμε τώρα ότι  $\lambda = \frac{k}{h^2}$  η (3.25) γράφεται ως

$$-\frac{1}{2}\lambda U_{i+1}^{j+1} + (1+\lambda)U_i^{j+1} - \frac{1}{2}\lambda U_{i-1}^{j+1} = \frac{1}{2}\lambda U_{i+1}^j + (1-\lambda)U_i^j + \frac{1}{2}\lambda U_{i-1}^j, \quad (3.26)$$

με  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ . Επομένως αν συμβολίσουμε με  $U^j \in \mathbb{R}^N$ , το διάνυσμα με συνιστώσες  $U = (U_1^j, \dots, U_N^j)^T$ , το σύστημα των εξισώσεων (3.26) μπορούμε να το γράψουμε ισοδύναμα με το γραμμικό σύστημα

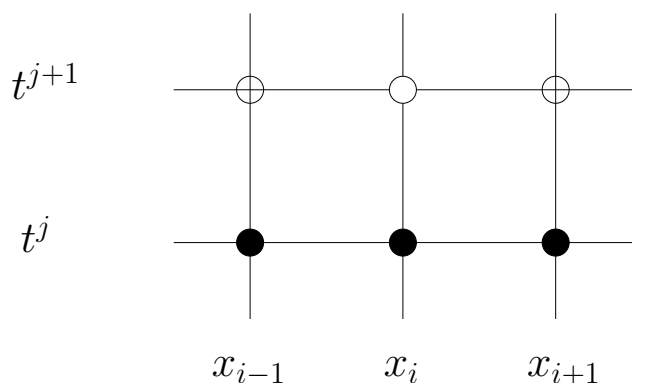
$$BU^{j+1} = AU^j, \quad (3.27)$$

όπου  $B$  είναι ο  $N \times N$  πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda/2 & 0 & & 0 \\ -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 \\ & & & -\lambda/2 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

και

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda/2 & 0 & & 0 \\ \lambda/2 & 1 - \lambda & \lambda/2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \lambda/2 & 1 - \lambda & \lambda/2 \\ & & & \lambda/2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 3.4: Πλέγμα για τον υπολογισμό της λύσης με την πεπλεγμένη μέθοδο Crank-Nicolson

Για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση στο χρονικό βήμα  $t^{j+1}$ , χρειάζεται να γνωρίζουμε τη προσέγγιση στο προηγούμενο βήμα χρονικό βήμα  $t^j$  και να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (3.27). Ξεκινάμε από το χρόνο  $t^0 = 0$  που γνωρίζουμε τη λύση και λύνουμε το σύστημα  $B U^1 = A U^0$ , και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Επειδή για να υπολογίσουμε τη προσέγγιση σε κάθε χρονικό βήμα **χρειάζεται να λύσουμε κάποιο γραμμικό σύστημα** η μέθοδος είναι **πεπλεγμένη ή έμμεση**. Ποιά συγκεκριμένα τη μέθοδο (3.25) ή (3.26), την ονομάζουμε **μέθοδο Crank-Nicolson**.

Ο πίνακας  $B$  στο γραμμικό σύστημα (3.27) είναι τριδιαγώνιος και έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο οπότε η υπάρξη και η μοναδικότητα της προσεγγιστικής λύσης σε κάθε χρονικό βήμα είναι δεδομένη.



**Συνέπεια:** Αν αντικαταστήσουμε στο αριθμητικό σχήμα που ικανοποιεί η προσεγγιστική λύση  $U_i^j$ , (3.25), με την ακριβή λύση  $u$ , τότε το διάνυσμα με συνιστώσες  $u(x_i, t^j)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$  δεν θα ικανοποιεί τη (3.25) και θα υπάρχει ένα σφάλμα, όπως φαίνεται από τη (3.24). Το σφάλμα  $\eta_i^j$ , τείνει στο μηδέν καθώς το  $h$  και  $k$  τείνουν στο μηδέν, όπως γίνεται στη περίπτωση του σχήματος που μελετούμε, οπότε η πεπλεγμένη μέθοδος του Crank–Nicolson είναι *συνεπής*.

Για την **ευστάθεια** της μεθόδου μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.5.** Έστω  $U^j \in \mathbb{R}^N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , η λύση του προβλήματος (3.26), με  $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Τότε αν  $\lambda < 1$  ισχύει η ακόλουθη ανισότητα,

$$\max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j| \leq \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^0|, \quad \text{για } j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

*Απόδειξη.* Από τη σχέση (3.26) εύκολα παίρνουμε

$$(1+\lambda)|U_i^{j+1}| \leq \frac{\lambda}{2}(|U_{i+1}^{j+1}| + |U_{i-1}^{j+1}|) + (1-\lambda)|U_i^j| + \frac{\lambda}{2}(|U_{i+1}^j| + |U_{i-1}^j|), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Αν θέσουμε λοιπόν  $\bar{U}^j = \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_i^j|$ ,  $j = 0, \dots, M$ , παίρνουμε

$$(1 + \lambda)|U_i^{j+1}| \leq 2\lambda\bar{U}^{j+1} + \bar{U}^j.$$

και άρα

$$\bar{U}^{j+1} \leq \bar{U}^j \leq \dots \leq \bar{U}^0.$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση.  $\square$

Παρατηρούμε ότι για να δείξουμε το Θεώρημα 3.5, υποθέσαμε ότι  $\lambda < 1$ . Θα δούμε παρακάτω ότι αυτή η υπόθεση δεν είναι απαραίτητη για να δείξουμε την **ευστάθεια τύπου Von Neumann** για τη μέθοδο του Crank–Nicolson, επομένως η υποθεση  $\lambda < 1$  στο Θεώρημα 3.5 δεν είναι ουσιαστική και γίνεται μόνο για να μπορέσουμε να αποδείξουμε το θεωρήμα ακολουθώντας τα βήματα που χρησιμοποιήσαμε στην αντίστοιχη απόδειξη.

Αν λοιπόν  $u$  είναι η λύση του (3.8) και υποθέσουμε ότι η διακριτή λύση που παίρνουμε με τη μέθοδο (3.26) έχει τη μορφή  $U_i^j = w_j \sin(\pi x_i)$  τότε

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{2}w_{j+1} \sin(\pi x_{i+1}) + (1 + \lambda)w_{j+1} \sin(\pi x_i) - \frac{\lambda}{2}w_{j+1} \sin(\pi x_{i-1}) \\ & = \frac{\lambda}{2}w_j \sin(\pi x_{i+1}) + (1 - \lambda)w_j \sin(\pi x_i) + \frac{\lambda}{2}w_j \sin(\pi x_{i-1}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

για  $i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M - 1$ . Χρησιμοποιούμε τώρα και πάλι τις τριγωνομετρικές ιδιότητες (3.10) και (3.12) και έχουμε

$$\begin{aligned} & -2\lambda w_{j+1} \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) + (1 + \lambda)w_{j+1} \sin(\pi x_i) \\ & = 2\lambda w_j \sin(\pi x_i) \cos(\pi h) + (1 - \lambda)w_j \sin(\pi x_i) \end{aligned} \quad (3.29)$$

και στη συνέχεια

$$(1 + 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2}))w_{j+1} \sin(\pi x_i) = (1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2}))w_j \sin(\pi x_i). \quad (3.30)$$

Συνεπώς

$$w_{j+1} = \frac{1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2})}{1 + 4\lambda \sin^2(\frac{\pi h}{2})} w_j = \kappa w_j = \kappa^j w_0. \quad (3.31)$$

Είναι απλό να δούμε ότι σε αυτή τη περίπτωση  $|\kappa| < 1$ , για κάθε  $\lambda$ , οπότε η μέγιστη τιμή της  $U_i^j$  είναι φραγμένη, και άρα δεν είναι αναγκαία καμμία συνθήκη για την ευστάθεια της μεθόδου Crank-Nicolson.

### 3.4 Ασκήσεις

Ασκήσεις για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \quad (3.32)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.33)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.34)$$

1. Θεωρούμε τη μέθοδο  $U_i^{j+1} = \lambda U_{i+1}^j + (1 - 2\lambda - \beta k)U_i^j + \lambda U_{i-1}^j$  για την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας.

(α') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;

(β') Είναι η μέθοδος ευσταθής;

(γ') Για ποιές τιμές του  $\beta$ , αν υπάρχουν, είναι η μέθοδος συνεπής;

2. Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας (3.32), με αρχική συνθήκη, (3.33) και συνοριακές συνθήκες  $u_x(0, t) = \alpha$ , και  $u(1, t) = 0$ .

(α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k^2) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

3. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές  $U_{i-1}^{j+1}$ ,  $U_i^{j+1}$ ,  $U_{i+1}^{j+1}$ ,  $U_{i-1}^j$  και  $U_{i+1}^j$ , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης της θερμότητας.

- (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής.  
 (β') Ποιά είναι το σφάλμα διακριτοποίησης;  
 (γ') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;  
 (δ') Είναι ευσταθής;

4. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές  $U_{i-1}^{j+1}$ ,  $U_{i+1}^{j+1}$ ,  $U_{i-1}^j$ ,  $U_i^j$ ,  $U_{i+1}^j$ ,  $U_{i-1}^{j-1}$  και  $U_{i+1}^{j-1}$ , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης της θερμότητας.

- (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής.  
 (β') Ποιά είναι το σφάλμα διακριτοποίησης;  
 (γ') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;  
 (δ') Είναι ευσταθής;

5. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t) - \beta u(x, t), & (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in [a, b] \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

όπου  $D, \beta$  είναι θετικές σταθερές.

- (α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.  
 (β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

6. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t) - \alpha u_x(x, t), & (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in [a, b] \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

όπου  $D, \alpha$  είναι σταθερές και  $D$  είναι θετική.

- (α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

7. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t) + \mu(x)u_x(x, t), & (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in [a, b] \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

όπου  $D, \mu$  είναι θετικές σταθερές.

(α') Γράψτε ένα άμεσο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

8. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Du_{xx}(x, t) - \beta u(x, t), & (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in [0, 1] \\ u(0, t) &= h(t), u(1, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

όπου  $D, \beta$  είναι θετικές σταθερές.

(α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης  $O(k^2) + O(h^2)$ . Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

## Κεφάλαιο 4

# Υπερβολικό πρόβλημα - Εξίσωση μεταφοράς

Θεωρούμε το υπερβολικό πρόβλημα (εξίσωση μεταφοράς): Ζητείται μια συνάρτηση  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}u_t(x, t) + \alpha u_x(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου  $\alpha, T > 0$  και  $g$  μια δοσμένη συνάρτηση. Μια βασική διαφορά που παρατηρούμε εδώ είναι ότι δεν έχουμε ένα φραγμένο χωρίο για να υπολογίσουμε την προσεγγιστική λύση. Αργότερα θα θεωρήσουμε ένα φραγμένο χωρίο στο οποίο θα κατασκευάσουμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος.

Αν θεωρήσουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών

$$x = \alpha r + s \quad t = r$$

τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u_x + u_t = 0$$

Επομένως η  $u$  δεν εξαρτάται από το  $r$  και εξαρτάται μόνο από το  $s$ , άρα  $u$  πάνω στην ευθεία  $x - \alpha t = \text{σταθερά}$  δεν μεταβάλλει την τιμή της και έτσι  $u(x, t) = u(s, r) = u(s, 0) = g(x - \alpha t)$

Για να λύσουμε υπολογιστικά το πρόβλημα (4.1) δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μη φραγμένο χωρίο, αλλά θα πρέπει να καθορίσουμε ένα αριστερό άκρο  $x_L$  και ένα δεξιό άκρο  $x_R$  και τα ενδιάμεσα σημεία  $x_i = x_L + ih$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ , με  $h = (x_R - x_L)/(N + 1)$  και  $x_{N+1} = x_R$ . Όμοια όπως και

στο προηγούμενο κεφάλαιο θα διαμερίσουμε και το διάστημα  $[0, T]$  σε  $t^j = jk$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ , με  $k = T/M$ . Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη λύση σε όλα τα σημεία  $(x_i, t^j)$  του διαμερισμού θα πρέπει να γνωρίζουμε τη λύση ή να έχουμε κάποια πληροφορία για τη λύση στα ακριανά σημεία  $(x_L, t^j)$ ,  $(x_R, t^j)$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Αν υποθέσουμε ότι η λύση στην αρχή για  $t = 0$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε η λύση είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq x - \alpha t \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι π.χ. για  $0 \leq t \leq 7$  η λύση  $u$  στα σημεία  $(x, t)$  με  $x \leq 0$  και  $x \geq 9$  είναι 0. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε το χωρίο που υπολογίζουμε τη λύση να είναι το  $x_L = -1$  και  $x_R = 9$ . Από την έκφραση της ακριβούς λύσης γνωρίζουμε ότι  $u(x_L, t^j) = u(x_R, t^j) = 0$  για  $j = 0, \dots, M$ . Θα δούμε παρακάτω ότι υπάρχουν μέθοδοι που χρειάζεται να γνωρίσουμε τη λύση και στα δύο άκρα  $x_L$  και  $x_R$  αλλά και άλλες που αρκεί να τη γνωρίζουμε σε ένα από τα δύο άκρα.

## 4.1 Upwind-Downwind

### 4.1.1 Upwind

Θεωρούμε λοιπόν ένα διαμερισμό του  $[x_L, x_R] \times [0, T]$  όπως παραπάνω οπότε σε όλα τα σημεία  $(x_i, t^j)$  του πλέγματος θα ισχύει

$$u_t(x_i, t^j) + \alpha u_x(x_i, t^j) = 0, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad j = 0, \dots, M.$$

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά  $\delta^+$  και  $\delta^-$  για να προσεγγίσουμε τις  $u_t$  και  $u_x$ , αντίστοιχα, έχουμε

$$u_t(x_i, t^j) + \alpha u_x(x_i, t^j) = \delta_k^+ u(x_i, t^j) + \alpha \delta_h^- u(x_i, t^j) + \eta_i^j \quad (4.2)$$

Είναι απλό να δούμε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 ότι

$$|\eta_i^j| \leq C(k + h). \quad (4.3)$$

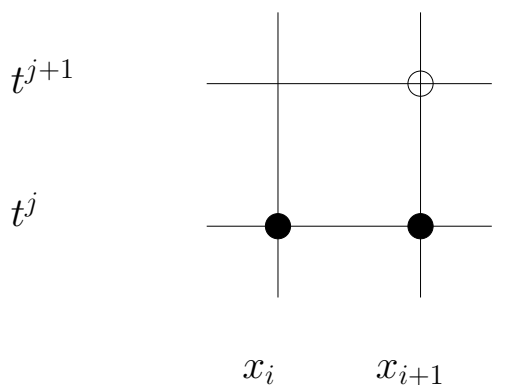
Στη συνέχεια θεωρούμε τις προσεγγίσεις  $U_i^j$  των τιμών  $u(x_i, t^j)$  οι οποίες προκύπτουν σύμφωνα με την (4.2)

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} + \alpha \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} = 0, \quad (4.4)$$

για  $i = 1, \dots, N + 1, j = 0, \dots, M - 1$ . Αν συμβολίσουμε τώρα  $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ , τότε η παραπάνω μπορεί να γραφεί

$$U_i^{j+1} = (1 - \lambda)U_i^j + \lambda U_{i-1}^j. \quad (4.5)$$

Η αρχική συνθήκη θα είναι  $U_i^0 = g(x_i)$  και για να υπολογίσουμε τις τιμές  $U_i^j$  χρησιμοποιώντας είτε την (4.4) ή (4.5) χρειαζόμαστε να γνωρίσουμε την  $U_0^j$ .



Σχήμα 4.1: Πλέγμα για τον υπολογισμό της λύσης με τη μέθοδο upwind

#### 4.1.2 Downwind

Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές προσεγγίσεις για την  $u_t$  και  $u_x$  και να καταλήξουμε σε διαφορετικά σχήμα. Έτσι χρησιμοποιώντας τη διαφορά  $\delta^-$  και  $\delta^+$  για να προσεγγίσουμε τις  $u_t$  και  $u_x$ , αντίστοιχα, έχουμε

$$u_t(x_i, t^j) + \alpha u_x(x_i, t^j) = \delta_k^- u(x_i, t^{j+1}) + \alpha \delta_h^+ u(x_i, t^j) + \eta_i^j \quad (4.6)$$

Είναι απλό να δούμε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 ότι

$$|\eta_i^j| \leq C(k + h). \quad (4.7)$$

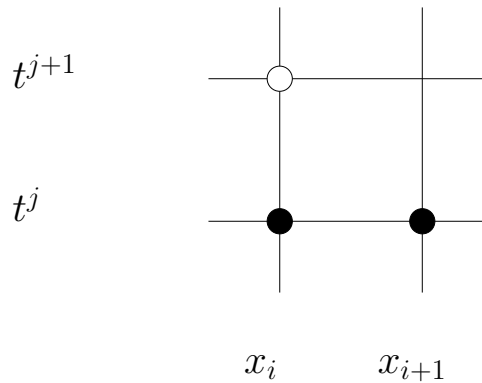
Στη συνέχεια θεωρούμε τις προσεγγίσεις  $U_i^j$  των τιμών  $u(x_i, t^j)$  οι οποίες προκύπτουν σύμφωνα με την (4.6)

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} + \alpha \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} = 0, \quad (4.8)$$

για  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ . Αν συμβολίσουμε τώρα  $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ , τότε η παραπάνω μπορεί να γραφεί

$$U_i^{j+1} = (1 + \lambda)U_i^j - \lambda U_{i+1}^j. \quad (4.9)$$

Η αρχική συνθήκη θα είναι  $U_i^0 = g(x_i)$  και για να υπολογίσουμε τις τιμές  $U_i^j$  χρησιμοποιώντας είτε την (4.8) ή (4.9) χρειαζόμαστε να γνωρίσουμε την  $U_{N+1}^j$ .



Σχήμα 4.2: Πλέγμα για τον υπολογισμό της λύσης με τη μέθοδο downwind

Αν και οι δύο παραπάνω μέθοδοι (4.5) και (4.9) μοιάζουν έχουν πολλή διαφορετική συμπεριφορά και δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα.

### 4.1.3 Χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης

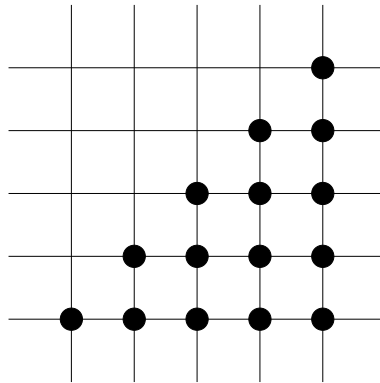
Για κάθε σημείο  $(x_i, t^j)$  του πλέγματος που προσεγγίζουμε τη λύση  $u$ , μπορούμε να ορίσουμε τα σημεία  $(x_i, 0)$ , στα οποία οι τιμές  $U_i^0$  καθορίζουν την προσέγγιση  $U_i^j$  σύμφωνα με το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιούμε. Το σύνολο αυτών των σημείων  $(x_i, 0)$ , το ονομάζουμε χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης για το σχήμα που χρησιμοποιούμε. Τα χωρία υπολογιστικής εξάρτησης για τις μεθόδους Upwind και Downwind φαίνονται στις Εικόνες 4.1.3 και 4.1.3, αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι η ακριβής λύση στο σημείο  $(x_i, t^j)$  εξαρτάται μόνο από την τιμή της  $u(x_i - \alpha t^j, 0) = g(x_i - \alpha t^j)$ . Άρα η τιμή της ακριβούς λύσης στο σημείο  $(x_i, t^j)$  καθορίζεται μοναδικά από την τιμή στο σημείο  $\bar{x}_0 = x_i - \alpha t^j$  του  $x$ -άξονα. Είναι λογικό να θέλουμε το χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης για το σημείο  $(x_i, t^j)$  να περιέχει το  $x_0$ . Αυτό περιγράφεται από το ακόλουθο

**Συνθήκη CFL:** Το χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης πρέπει να φράσει ή να περιέχει το χωρίο εξάρτησης της ακριβούς λύσης του προβλήματος.

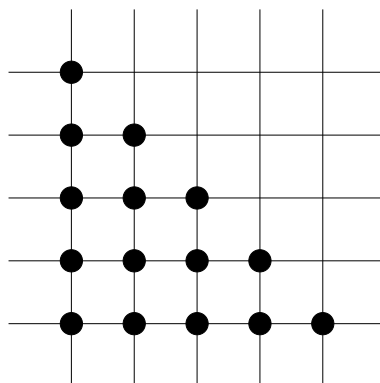


Για την μέθοδο upwind μπορούμε να δούμε ότι το χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης είναι τα σημεία στον  $x$ -άξονα  $\{x_i - jh, \dots, x_i\}$ . Για να ισχύει η συνθήκη CFL αρκεί το χωρίο που ορίζεται από αυτά τα σημεία να περιέχει το σημείο  $\bar{x}_0 = x_i - \alpha t^j$ , δηλαδή,  $x_i - jh \leq \bar{x}_0$ . Αυτή η τελευταία σχέση ισχύει αν  $\lambda = \frac{\alpha k}{h} \leq 1$ .

Στην περίπτωση τώρα της μεθόδου Downwind, μπορούμε να δούμε ότι το χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης είναι τα σημεία στον  $x$ -άξονα  $\{x_i, \dots, x_i + jh\}$ . Είναι φανερό ότι το σημείο  $\bar{x}_0$  δεν μπορεί να περιέχεται στο χωρίο που ορίζουν τα σημεία του χωρίου εξάρτησης και άρα αυτή η μέθοδος δεν ικανοποιεί τη συνθήκη CFL.



Σχήμα 4.3: Χωρίο εξάρτησης της προσεγγιστικής λύσης με τη μέθοδο upwind



Σχήμα 4.4: Χωρίο εξάρτησης της προσεγγιστικής λύσης με τη μέθοδο downwind

#### 4.1.4 Ευστάθεια

Για τη μελέτη της ευστάθειας θα θεωρήσουμε ότι η προσεγγιστική λύση είναι της μορφής  $U_i^j = w_j \sin(x_i)$  και θα βρούμε συνθήκες ώστε το πλάτος  $w_j$  του ημιτονοειδούς 'κύματος' να παραμένει φραγμένο.

Στην περίπτωση της μεθόδου upwind έχουμε σύμφωνα με την (4.5),

$$w_{j+1} \sin(x_i) = (1 - \lambda)w_j \sin(x_i) + \lambda w_j \sin(x_{i-1})$$

Χρησιμοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ιδιότητες όπως η (3.10) έχουμε

$$w_{j+1} \sin(x_i) = (1 - \lambda)w_j \sin(x_i) + \lambda w_j (\sin(x_i) \cos(h) - \sin(h) \cos(x_i))$$

Συνεπώς

$$w_{j+1} \sin(x_i) = w_j ((1 - \lambda(1 - \cos(h))) \sin(x_i) - \lambda \sin(h) \cos(x_i))$$

Μπορούμε να δούμε τώρα ότι αν  $C_1 = (1 - \lambda(1 - \cos(h)))$  και  $C_2 = \lambda \sin(h)$ , τότε υπάρχουν  $A$  και  $\phi$  τέτοια ώστε

$$(1 - \lambda(1 - \cos(h))) \sin(x_i) - \lambda \sin(h) \cos(x_i) = A \sin(x_i + \phi)$$

όπου  $A^2 = C_1^2 + C_2^2$  και  $\tan(\phi) = C_2/C_1$ . Για να προκύπτει λύση η οποία διατηρείτε φραγμένη αρκεί το πλάτος  $A$  να είναι μικρότερο της μονάδας. Έτσι

$$\begin{aligned} A^2 &= (1 - \lambda(1 - \cos(h)))^2 + \lambda^2 \sin^2(h) = (1 - \lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(h) \\ &= 1 - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - \cos(h)) = 1 - 4\lambda(1 - \lambda) \sin^2(h/2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι αν  $\lambda < 1$  τότε η μέθοδος upwind είναι ευσταθής.

Στην περίπτωση της Downwind έχουμε σύμφωνα με την (4.9),

$$w_{j+1} \sin(x_i) = (1 + \lambda)w_j \sin(x_i) - \lambda w_j \sin(x_{i+1})$$

Χρησιμοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ιδιότητες όπως η (3.10) έχουμε

$$w_{j+1} \sin(x_i) = (1 + \lambda)w_j \sin(x_i) - \lambda w_j (\sin(x_i) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_i))$$

Συνεπώς

$$w_{j+1} \sin(x_i) = w_j ((1 + \lambda(1 - \cos(h))) \sin(x_i) - \lambda \sin(h) \cos(x_i))$$

Μπορούμε να δούμε τώρα ότι αν  $C_1 = (1 + \lambda(1 - \cos(h)))$  και  $C_2 = \lambda \sin(h)$ , τότε υπάρχουν  $A$  και  $\phi$  τέτοια ώστε

$$(1 + \lambda(1 - \cos(h))) \sin(x_i) - \lambda \sin(h) \cos(x_i) = A \sin(x_i + \phi)$$

όπου  $A^2 = C_1^2 + C_2^2$  και  $\tan(\phi) = C_1/C_2$ . Έτσι τώρα

$$\begin{aligned} A^2 &= (1 + \lambda(1 - \cos(h)))^2 + \lambda^2 \sin(h)^2 \\ &= (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(h) \\ &= 1 + 2\lambda(1 + \lambda)(1 - \cos(h)) = 1 + 4\lambda(1 + \lambda) \sin^2(h/2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ ,  $|A| > 1$  και άρα η μέθοδος Downwind δεν είναι ευσταθής.

## 4.2 Lax–Wendroff

Στη συνέχεια θέλουμε να θεωρήσουμε ένα αριθμητικό σχήμα που να προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη  $u_x$ . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε για την προσέγγιση της  $u_x(x_i, t^j)$  το  $\delta_h^c u(x_i, t^j)$ . Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 1.1,

$$u_t(x_i, t^j) + \alpha u_x(x_i, t^j) = \delta_k^- u(x_i, t^{j+1}) + \alpha \delta_h^c u(x_i, t^j) + \eta_i^j \quad (4.12)$$

με  $|\eta_i^j| \leq C(k + h^2)$ . Στη συνέχεια θεωρούμε τις προσεγγίσεις  $U_i^j$  των τιμών  $u(x_i, t^j)$  οι οποίες προκύπτουν σύμφωνα με την (4.2)

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} + \alpha \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h} = 0, \quad (4.13)$$

για  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ . Αν συμβολίσουμε τώρα  $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ , τότε η παραπάνω μπορεί να γραφεί

$$U_i^{j+1} = -\frac{\lambda}{2} U_{i+1}^j + U_i^j + \frac{\lambda}{2} U_{i-1}^j. \quad (4.14)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι για αυτή τη μέθοδο η συνθήκη CFL ισχύει αν  $\lambda \leq 1$ . Επίσης ακολουθώντας τα βήματα για να δείξουμε την ευστάθεια για τις μεθόδους Upwind και Downwind, μπορούμε να δείξουμε ότι η αντίστοιχη παράμετρος  $A$ , θα ικανοποιεί  $A^2 = 1 + \lambda^2 \sin^2(h)$ . Συνεπώς η μέθοδος (4.14) δεν είναι ευσταθής.

Στη συνέχεια θέλουμε να κατασκευάσουμε μια διαφορετική μέθοδο που να χρησιμοποιεί τα ίδια σημεία του πλέγματος όπως η (4.14) και να έχει και αυτή σφάλμα  $\eta_i^j \leq C(k + h^2)$ . Θέτουμε λοιπόν

$$u(x_i, t^{j+1}) = Au(x_{i+1}, t^j) + Bu(x_i, t^j) + Cu(x_{i-1}, t^j) + k\eta_i^j, \quad (4.15)$$

και θέλουμε να προσδιορίσουμε τα  $A, B$  και  $C$  έτσι ώστε  $\eta_i^j \leq C(k + h^2)$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $u_t = -\alpha u_x$ ,  $u_{tt} = -\alpha u_{xt} = -\alpha(u_t)_x = \alpha^2 u_{xx}$  και  $u_{ttt} = -\alpha^3 u_{xxx}$  και αναπτύσσοντας με το Θεώρημα Taylor, έχουμε

$$\begin{aligned} u(x_i, t^j + k) &= u(x_i, t^j) + ku_t(x_i, t^j) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, t^j) + \frac{k^3}{6}u_{ttt}(x_i, \xi^j) \\ &= u(x_i, t^j) - \alpha k u_x(x_i, t^j) + \frac{\alpha^2 k^2}{2}u_{xx}(x_i, t^j) \\ &\quad - \frac{\alpha^3 k^3}{6}u_{xxx}(x_i, \xi^j), \end{aligned} \quad (4.16)$$

με  $\xi^j \in (t^j, t^{j+1})$  και όμοια

$$\begin{aligned} u(x_i \pm h, t^j) &= u(x_i, t^j) \pm hu_x(x_i, t^j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t^j) \\ &\quad \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_i^\pm, t^j), \end{aligned} \quad (4.17)$$

με  $\theta_i^+ \in (x_i, x_{i+1})$  και  $\theta_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$ . Αν αντικαταστήσουμε τις (4.16) και (4.17) στην (4.15) έχουμε

$$\begin{aligned} k\eta_i^j &= u(x_i, t^{j+1}) - Au(x_{i+1}, t^j) - Bu(x_i, t^j) - Cu(x_{i-1}, t^j) \\ &= u(x_i, t^j) - \alpha k u_x(x_i, t^j) + \frac{\alpha^2 k^2}{2}u_{xx}(x_i, t^j) - \frac{\alpha^3 k^3}{6}u_{xxx}(x_i, \xi^j) \\ &\quad - A(u(x_i, t^j) + hu_x(x_i, t^j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t^j) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_i^+, t^j)) \\ &\quad - Bu(x_i, t^j) \\ &\quad - C(u(x_i, t^j) - hu_x(x_i, t^j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t^j) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_i^-, t^j)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} k\eta_i^j &= (1 - A - B - C)u(x_i, t^j) - (\alpha k + Ah - Ch)u_x(x_i, t^j) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2 k^2}{2} - (A + C)\frac{h^2}{2}\right)u_{xx}(x_i, t^j) \\ &\quad - \frac{\alpha^3 k^3}{6}u_{xxx}(x_i, \xi^j) - A\frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_i^+, t^j) + C\frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_i^-, t^j) \\ &= (1 - A - B - C)u(x_i, t^j) - h(\lambda + A - C)u_x(x_i, t^j) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}(\lambda^2 - (A + C))u_{xx}(x_i, t^j) \\ &\quad - \frac{h^3}{6}(\lambda^3 u_{xxx}(x_i, \xi^j) - Au_{xxx}(\theta_i^+, t^j) + Cu_{xxx}(\theta_i^-, t^j)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

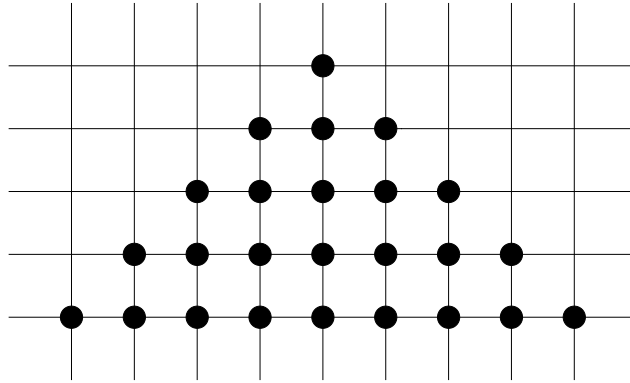
Στη συνέχεια θέτουμε τους συντελεστές των  $u, u_x, u_{xx}$  να είναι μηδέν οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} 1 - A - B - C &= 0 \\ \lambda + A - C &= 0 \\ \lambda^2 - (A + C) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε  $A = -\frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)$ ,  $B = 1 - \lambda^2$  και  $C = \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)$ . Οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι  $|\eta_i^j| \leq C(k^2 + h^2)$ . Η μέθοδος που προκύπτει για την παραπάνω επιλογή των συντελεστών  $A, B$  και  $C$  ονομάζεται Lax-Wendroff και ικανοποιεί

$$U_i^{j+1} = -\frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)U_{i+1}^j + (1 - \lambda^2)U_i^j + \frac{1}{2}\lambda(1 + \lambda)U_{i-1}^j \quad (4.21)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το χωρίο υπολογιστικής εξάρτησης για το  $(x_i, t^j)$  εξαρτάται από τα σημεία  $\{x_i - jh, \dots, x_i, \dots, x_i + jh\}$ , βλέπε Σχήμα 4.2. Όμοια, λοιπόν όπως και για τη Upwind, για να ισχύει η συνθήκη CFL αρκεί  $\lambda \leq 1$ .



Σχήμα 4.5: Χωρίο εξάρτησης της προσεγγιστικής λύσης με τη μέθοδο Lax-Wendroff

### 4.2.1 Ευστάθεια

Για τη μελέτη της ευστάθειας θα θεωρήσουμε ότι η προσεγγιστική λύση είναι της μορφής  $U_i^j = w_j \sin(x_i)$  και θα βρούμε συνθήκες ώστε το πλάτος  $w_j$  του

ημιτονοειδούς 'κύμματος' να παραμένει φραγμένο. Στην περίπτωση της μεθόδου Lax-Wendroff έχουμε σύμφωνα με την (4.21),

$$w_{j+1} \sin(x_i) = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)w_j \sin(x_{i+1}) + (1-\lambda^2)w_j \sin(x_i) + \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)w_j \sin(x_{i-1})$$

Χρησιμοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ιδιότητες όπως η (3.10) έχουμε

$$\begin{aligned} w_{j+1} \sin(x_i) &= -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)w_j(\sin(x_i)\cos(h) + \cos(x_i)\sin(h)) \\ &\quad + (1-\lambda^2)w_j \sin(x_i) + \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)w_j(\sin(x_i)\cos(h) - \cos(x_i)\sin(h)) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$w_{j+1} \sin(x_i) = w_j(\lambda^2 \cos(h) + 1 - \lambda^2) \sin(x_i) - \lambda \sin(h) \cos(x_i))$$

Μπορούμε να δούμε τώρα ότι αν  $C_1 = \lambda^2 \cos(h) + 1 - \lambda^2$  και  $C_2 = -\lambda \sin(h)$ , τότε υπάρχουν  $A$  και  $\phi$  τέτοια ώστε

$$C_1 \sin(x_i) + C_2 \cos(x_i) = D \sin(x_i + \phi)$$

όπου  $D^2 = C_1^2 + C_2^2$  και  $\tan(\phi) = C_1/C_2$ . Για να προκύπτει λύση η οποία διατηρείται φραγμένη αρκεί το πλάτος  $D$  να είναι μικρότερο της μονάδας. Έτσι

$$\begin{aligned} D^2 &= (\lambda^2 \cos(h) + 1 - \lambda^2)^2 + \lambda^2 \sin^2(h) \\ &= (1 - \lambda^2)^2 + \lambda^4 \cos^2(h) + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(h) + \lambda^2 \sin^2(h) \\ &= (1 - \lambda^2)^2 + (\lambda^4 - \lambda^2) \cos^2(h) + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(h) + \lambda^2 \\ &= 1 - \lambda^2(1 - \lambda^2) - \lambda^2(1 - \lambda^2)(1 - \sin^2(h)) + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(h) \\ &= 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \sin^2(h/2) + \lambda^2(1 - \lambda^2) \sin^2(h). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη τριγωνομετρική ιδιότητα  $\sin^2(h) = 4 \sin^2(h/2) - 4 \sin^4(h/4)$  η παραπάνω σχέση γίνεται

$$D^2 = 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \sin^4(h/2).$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι αν  $\lambda < 1$  τότε η μέθοδος Lax-Wendroff είναι ευσταθής.

### 4.3 Ασκήσεις

Ασκήσεις για προβλήματα αρχικών τιμών της μορφής:

$$u_t(x, t) + \alpha u_x(x, t) = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], \quad (4.22)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

1. Δείξτε ότι η μέθοδος upwind και Lax–Wendroff δίνουν την ακριβή λύση για  $\lambda = 1$ .
2. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$(1 + \lambda)U_i^{j+1} + (1 - \lambda)U_{i-1}^{j+1} = (1 - \lambda)U_i^j + (1 + \lambda)U_{i-1}^j.$$

- (α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.
  - (β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;
  - (γ') Αν για κάθε  $j$  η τιμή  $U_0^{j+1}$  είναι γνωστή δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.
  - (δ') Είναι ευσταθής;
3. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$U_i^{j+1} = U_i^{j-1} - \lambda(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j).$$

- (α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.
  - (β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;
  - (γ') Αν για κάθε  $j$  η τιμή  $U_0^{j+1}$  είναι γνωστή δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.
  - (δ') Δείξτε ότι είναι ευσταθής για  $\lambda < 1$  και ασταθής για  $\lambda > 1$ ;
4. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \frac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j.$$

- (α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.
  - (β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;
  - (γ') Είναι η μέθοδος ευσταθής;
5. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές  $U_i^{j+1}$ ,  $U_{i-1}^j$ ,  $U_i^j$  και  $U_{i-1}^{j-1}$ , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης (4.22).

48 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής και το σφάλμα διακριτοποίησης να είναι  $O(h^2) + O(k)$
  - (β') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;
  - (γ') Ποια είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;
  - (δ') Είναι ευσταθής;
6. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές  $U_{i+1}^{j+1}$ ,  $U_i^{j+1}$ ,  $U_{i-1}^{j+1}$ ,  $U_{i+1}^j$ ,  $U_i^j$  και  $U_{i-1}^j$ , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης (4.22).
- (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής και το σφάλμα διακριτοποίησης να είναι  $O(h^2) + O(k^2)$
  - (β') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;
  - (γ') Ποια είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;
  - (δ') Είναι ευσταθής;



# Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Ακριβης, Β. Δουγαλης, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Ιωάννινα 2005
- [2] Georgoulis, E., *Computational Methods for Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Leicester, 2008
- [3] Holmes, M.H., *Introduction to Numerical methods in Differential Equations*, Springer-Verlag, 2007