ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
9/12/2014

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + \nu u_x(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T], \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a,b]$ με βήμα $h = (b-a)/(N+1)$, $x_i = a + ih$, και μια διαμέριση του $[0,T]$ με βήμα $k = T/M$, $t_j = jk$ και θέλουμε να βρούμε $U_i^j \approx u(x_i, t^j)$.

Είναι γνωστό ότι η λύση του προβλήματος (1) είναι η $u(x,t) = g(x - \nu t)$. Θεωρούμε ότι τα σημεία που δεν μηδενίζεται η g είναι κατάλληλα μακρυά από τα άκρα του διαστήματος $[a,b]$, ώστε να θεωρήσουμε ότι για $U_0^j = U_{N+1}^j = 0$ για όλα τα $j \le M$. Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Matlab το οποίο να κατασκευάζουμε μια προσεγγιστική λύση του πρόβληματος (1) με τη μέθοδο Lax–Wendroff, η οποία ορίζεται ως έξης: αν $U_i^j \approx u(x_i, t^j)$ θεωρούμε

$$U_i^{j+1} = AU_{i+1}^j + BU_i^j + CU_{i-1}^j, \quad i = 1, \dots, N, \ j = 0, \dots, M-1,$$

με $A = -\frac{\lambda}{2}(1-\lambda)$, $B = 1 - \lambda^2$ και $C = \frac{\lambda}{2}(1+\lambda)$, όπου $\lambda = \nu k/h$.

Το πρόγραμμα θα δέχεται τα άκρα ενός διαστήματος $[a,b]$, δύο πραγματικούς αριθμούς $T \ge t > 0$, δύο φυσικούς αριθμούς N, M και να επιστρέφει ως αποτέλεσμα δύο διάνυσματα $N+2$–θέσεων, το ένα να περιέχει τα σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού με βήμα $(b-a)/(N+1)$ και το δεύτερο τη λύση στο χρόνο t.

Εφαρμογές:

- Έστω $\nu = 1$ και θέτουμε στο διάστημα $[0,1]$, $g(x) = 1$ και $g(x) = 0$ διαφορετικά. Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι $u(x,t) = g(x-t)$. Θελουμε να βρουμε τη λύση αν $T = 7$, με $M = 50, 72, 100$, $N = 200$, στο χρόνο $t = 7$. Σχεδιάστε την ακριβή λύση και τις τέσσερις προσεγγιστικές λύσεις. Βρείτε το λόγο $\lambda = k/h$ στις παραπάνω περιπτώσεις.

- Επαναλάβεται για την πεπλεγμένη μέθοδο

$$AU_{i+1}^{j+1} + BU_i^{j+1} + CU_{i-1}^{j+1} = U_i^j, \quad i = 1, \ldots, N,\ j = 0, \ldots, M-1,$$

με $A = \lambda/2$, $B = 1$ και $C = -\lambda/2$, όπου $\lambda = \nu k/h$.

Εξέταση

Ονομάστε τα πρόγραμμα σας laxXXXXY.m και implicitXXXX.m, όπου XXXX είναι ο αριθμός μητρώου σας. Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματα σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματος. Κατά την εξέταση θα πρέπει να είστε σε θέση να απαντήσετε σε τυχόν ερωτήσεις που θα σας τεθούν.

Θα πρέπει να υποβάλετε τα προγραμματα σας στο ηλεκτρονικό σύστημα που βρίσκεται στη σελίδα
https://euler.math.uoc.gr/%7Emoodle/moodle1415/course/view.php?id=9. Για να μπορέσετε να υποβάλετε ηλεκτρονικά την εργασία σας πρέπει να εγγραφείτε πρώτα στο ηλεκτρονικό σύστημα που βρίσκεται στην παραπάνω διεύθυνση και στη συνέχεια και στο μάθημα που βρίσκεται στην παραπάνω σελίδα. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα σας ζητηθεί να εξηγήσετε το πρόγραμμα σας καθώς και να απαντήσετε και σε άλλες σχετικές ερωτήσεις. Η εξέταση θα πραγματοποιηθεί στις 18/12/2014, (10-11πμ). Σε περίπτωση που δεν μπορείτε την παραπάνω ημερομηνία μπορείτε να εξεταστείτε σε άλλη ημερομηνία, σε συννενόηση με τον διδάσκοντα.

Ημερομηνία παράδοσης: 17/12/2014.