ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Περίοδος Ιουνίου 2005**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε, και τα θέματα.
4. Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους τύπους

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

$$\ell = U \cdot \varphi_{uu}, \quad m = U \cdot \varphi_{uv}, \quad n = U \cdot \varphi_{vv}$$

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}\,.$$

ΘΕΜΑ Α. (20)

1.

α′. Δώστε τον ορισμό των διανυσμάτων T, N, B του πλαισίου Frenet μίας καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας $\beta : I \to \mathbb{E}^3$.

β′. Γράψτε τους τύπους Frenet της καμπύλης β, και αποδείξτε τον τύπο που περιέχει το διάνυσμα B'.

γ′. Δώστε τον ορισμό της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης β.

2. Δίδεται η καμπύλη

$$\alpha(t) = \big(t\cos t,\, t\sin t,\, t^2\big)\ .$$

α′. Βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας της α. Είναι η α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας;

β′. Υπολογίστε το πεδίο πλαισίων Frenet της α στο σημείο όπου η καμπύλη τέμνει την ευθεία $(0, \pi/2, z)$.

γ′. Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη στο ίδιο σημείο.

δ′. Βρείτε την προσέγγιση Frenet της καμπύλης για $t = \pi/2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ Α.

1. *Στα Μαθηματικά ορίζουμε μία συνάρτηση δίδοντας στοιχεία ώστε να την προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο. Δεν αρκεί να δώσουμε το όνομα ή μία διαισθητική περιγραφή.*

α′. Εάν β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, και β'' δεν μηδενίζεται, ορίζονται τα διανύσματα:

i. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $T = \beta'$.

ii. Το κύριο κάθετο διάνυσμα $N = \dfrac{1}{\|\beta''\|}\beta''$.

iii. Το δευτερεύον κάθετο (ή δικάθετο) διάνυσμα $B = T \times N$.

β′.

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε οτι $B' \cdot B = 0$ και $B' \cdot T = 0$.

$B \cdot B$ είναι σταθερό, άρα $B' \cdot B = 0$.

$B \cdot T$ είναι σταθερό, άρα $B' \cdot T = -B \cdot T' = -\kappa B \cdot N = 0$.

Εφόσον τα T, N, B αποτελούν ορθοκανονική βάση, B' και N είναι συγγραμμικά. Ορίζουμε το συντελεστή να είναι $-\tau$.

γ′. Η καμπυλότητα μίας καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας είναι η πραγματική συνάρτηση $\kappa = \|\beta''\|$.

Η στρέψη είναι η συνάρτηση $\tau = -B' \cdot N$.

2.

α′.

$$\alpha' = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 2t)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|^2 &= \cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 4t^2 \\ &= 1 + 5t^2\,. \end{aligned}$$

Άρα η α δεν έχει μοναδιαία ταχύτητα.

β′. Το σημείο τομής της καμπύλης και της ευθείας, δίδεται από τις τιμές των παραμέτρων t (της καμπύλης) και z (της ευθείας) για τις οποίες

$$(t\cos t,\, t\sin t,\, t^2) = (0,\, \frac{\pi}{2},\, z)\,,$$

δηλαδή $t = \frac{\pi}{2}$ και $z = \frac{\pi^2}{4}$.
Άρα το σημείο είναι το

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0,\, \frac{\pi}{2},\, \frac{\pi^2}{2}\right)\,.$$

και το διάνυσμα ταχύτητας είναι το

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2},\, 1,\, \pi\right)\,.$$

Το διάνυσμα επιτάχυνσης $\alpha'' = (-2\sin t - t\cos t,\, 2\cos t - t\sin t,\, 2)$ είναι το

$$\alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2,\, -\frac{\pi}{2},\, 2)\,,$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\alpha' \times \alpha'' &= \left(2 + \frac{\pi}{2},\, -\pi,\, 2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\\
\|\alpha' \times \alpha''\|^2 &= \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)^2 + \pi^2 + \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2\\
&= 8 + 4\pi^2 + \frac{5\pi^4}{16}\,.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το πλαίσιο Frenet στο σημείο $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\|\alpha'\|}\alpha'\\
&= \left(1 + \frac{5\pi^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\pi}{2},\, 1,\, \pi\right)\,,\\
B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''\|}\\
&= \left(8 + 4\pi^2 + \frac{5\pi^4}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{\pi^2}{2},\, -\pi,\, 2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\,,\\
\alpha' \times \alpha'' \times \alpha' &= \left(-\pi^2 - 2 - \frac{\pi^2}{4},\, -\left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)\pi - \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{\pi}{2},\, 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right)\\
&= \left(-2 - \frac{5\pi^2}{4}\,, -3\pi - \frac{5\pi^3}{8}\,, 2\right)\,,\\
N &= B \times T = \frac{\alpha' \times \alpha'' \times \alpha'}{\|\alpha'\|\,\|\alpha' \times \alpha''\|}\\
&= \left(1 + \frac{5\pi^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(8 + 4\pi^2 + \frac{5\pi^4}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-2 - \frac{5\pi^2}{4},\, -3\pi - \frac{5\pi^3}{8},\, 2\right)\,.
\end{aligned}$$

Προσέξτε οτι συντομεύουμε τους υπολογισμούς, κρατώντας τους συντελεστές έξω από τα εξωτερικά γινόμενα.

γ′. Η καμπυλότητα

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\left(8 + 4\pi^2 + \frac{5\pi^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{5\pi^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Η στρέψη δίδεται από $\tau = \dfrac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$. Υπολογίζουμε

$$\alpha''' = (-3\cos t + t\sin t\,, -3\sin t - t\cos t\,, 0)$$

και στο $t = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \left(\frac{\pi}{2}\,, -3\,, 0\right) , \\ \alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha''' &= \left(2 + \frac{\pi^2}{2},\ -\pi,\ 2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2},\ -3,\ 0\right) \\ &= 4\pi + \frac{\pi^3}{4} . \end{aligned}$$

και

$$\tau = \frac{4\pi + \frac{\pi^3}{4}}{8 + 4\pi^2 + \frac{5\pi^4}{16}} .$$

δ′. Η προσέγγιση Frenet κοντά στο σημείο $t = \frac{\pi}{2}$, είναι

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = \alpha + sT + \kappa\frac{s^2}{2}N + \kappa\tau\frac{s^3}{6}B$$

όπου στη δεξιά πλευρά όλες οι συναρτήσεις υπολογίζονται στο $t = \frac{\pi}{2}$. *Εκφράζουμε τη δεξιά πλευρά συναρτήσει των παραγώγων της καμπύλης* α *, και κατόπιν αντικαθιστούμε τις τιμές που έχουμε υπολογίσει στο (β′) και (γ′). Με αυτόν τον τρόπο απλοποιούμε τους συντελεστές πριν αντικαταστήσουμε τις τιμές τους.*

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{\pi}{2} + s\right) &= \alpha + sT + \frac{s^2}{2}\kappa N + \frac{s^3}{6}\kappa\tau B \\ &= \alpha + s\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ &\quad + \frac{s^2}{2}\frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}\,\frac{\alpha' \times \alpha'' \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\|\,\|\alpha'\|} \\ &\quad + \frac{s^3}{6}\,\frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}\,\frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}\,\frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ &= \left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi^2}{2}\right) + s\left(1 + \frac{5\pi^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2},\ 1,\ \pi\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{s^2}{2}\left(1+\frac{5\pi^2}{4}\right)^{-2}\left(-2-\frac{5\pi^2}{4},\,-3\pi-\frac{5\pi^3}{8},\,2\right)$$
$$+\frac{s^3}{6}\frac{4\pi+\frac{\pi^3}{4}}{\left(1+\frac{5\pi^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\left(8+4\pi^2+\frac{5\pi^4}{16}\right)}\left(2+\frac{\pi^2}{2},\,-\pi,\,2+\frac{\pi^2}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ Β. (20)

1. Δείξτε οτι εάν α είναι καμπύλη σταθερής ταχύτητας στην επιφάνεια μίας σφαίρας, τότε α''' είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στη σφαίρα, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $(\alpha(t)-c)\cdot\alpha'''(t)=0$, όπου c είναι το κέντρο της σφαίρας.

2. Η συναλλοίωτη παράγωγος του διανυσματικού πεδίου W ως προς το διάνυσμα v είναι το διάνυσμα

$$\nabla_v W(p)=\left.\frac{d}{dt}W(p+tv)\right|_0 .$$

Δείξτε οτι εάν η F είναι ισομετρία, V και W είναι διανυσματικά πεδία, και ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία $\tilde{V}(F(p))=F_*V(p)$ και $\tilde{W}(F(p))=F_*W(p)$, τότε

$$\nabla_{\tilde{V}}\tilde{W}(F(p))=F_*(\nabla_V W(p))\,.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ Β.

1. Εάν η α βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας με κέντρο c, τότε $\|\alpha(t)-c\|$ είναι σταθερό, και έχουμε

$$0=\frac{d}{dt}\|\alpha(t)-c\|^2=2\alpha'(t)\cdot(\alpha(t)-c)\ .$$

Άρα $(\alpha(t)-c)\cdot\alpha'(t)=0$

Επαναλαμβάνοντας την παραγώγιση έχουμε

$$(\alpha(t)-c)\cdot\alpha''(t)+\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)=0$$

$$(\alpha(t)-c)\cdot\alpha'''(t)+3\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)=0$$

Αλλά αφού η α έχει σταθερή ταχύτητα, $\alpha'\cdot\alpha''=0$, και συνεπώς

$$(\alpha(t)-c)\cdot\alpha'''(t)=0\,.$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\left(F(p)\right) &= \frac{d}{dt}\widetilde{W}\left(F(p)+t\widetilde{V}(F(p))\right)\\
&= \frac{d}{dt}\widetilde{W}\left(F(p)+tF_*V(p)\right)\\
&= \frac{d}{dt}F_*W\left(p+tV(p)\right)\\
&= F_*\frac{d}{dt}W\left(p+tV(p)\right)\\
&= F*\nabla_v W(p)\,.
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ. (20)
Δίδεται η παραμέτρηση

$$\varphi(u,\,v) = (v\cos u,\, v\sin u,\, v)$$

μίας επιφάνειας M, και η καμπύλη

$$\alpha(t) = (e^t\cos\sqrt{2}\,t,\, e^t\sin\sqrt{2}\,t,\, e^t)\,.$$

α′. Εκφράστε το διάνυσμα ταχύτητας της α συναρτήσει των μερικών ταχυτήτων της παραμέτρησης φ.

β′. Βρείτε μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο U στην M.

γ′. Υπολογίστε τη συναλλοίωτη παράγωγο $\nabla_{\alpha'(t)}U(\alpha(t))$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
ΘΕΜΑ Γ.

α′. Παρατηρούμε ότι

$$\alpha(t) = \varphi(\sqrt{2}\,t,\, e^t)\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\alpha(t) &= \frac{du}{dt}\varphi_u + \frac{dv}{dt}\varphi_v \\ &= \sqrt{2}\varphi_u + e^t\varphi_v \end{aligned}$$

β′.

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (-v\sin u,\, v\cos u,\, 0) \\ \varphi_v &= (\cos u,\, \sin u,\, 1) \end{aligned}$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα E, F, G, αφού είναι πιο απλό να υπολογίσουμε το $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}\,\varphi_u \times \varphi v \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\,v}\,(v\cos u,\, v\sin u,\, -v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\cos u,\, \sin u,\, -1) \end{aligned}$$

γ′. *Δείτε την Άσκηση 5, σελ. 98.*

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'(t)}U\,(\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}U\,(\alpha(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}\,(e^t\cos\sqrt{2}\,t,\, e^t\sin\sqrt{2}\,t,\, -e^t) \\ &= (-\sin\sqrt{2}\,t,\, \cos\sqrt{2}\,t,\, 0)\,. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ. (20)
1. Δίδεται η καμπύλη $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, και ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : I \times (0, \infty) \to \mathbb{E}^3$,

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)\,.$$

α′. Βρείτε συνθήκη ικανή ώστε η φ να είναι ομαλή.

β′. Εάν η φ ορίζει μία επιφάνεια M, υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss της M.

2. Θεωρούμε ορθοκανονικά εφαπτόμενα διανύσματα u_1, u_2 στο σημείο p μίας επιφάνειας M. Ποιά γεωμετρική πληροφορία προκύπτει για την M στο p εάν

$$S(u_1) \times S(u_2) = 0\,.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
ΘΕΜΑ Δ.
1.

α′. Η $\varphi(u\,, v)$ είναι ομαλή εάν τα διανύσματα $\varphi_u\,, \varphi_v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \alpha'(u) + v\alpha''(u) \\ \varphi_v &= \alpha'(u) \\ \varphi_u \times \varphi_v &= -v\alpha(u) \times \alpha''(u) \end{aligned}$$

Άρα η φ είναι ομαλή εάν $\alpha'(u)$ και $\alpha''(u)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο, δηλαδή εάν δεν μηδενίζεται η καμπυλότητα της α.

β′. Ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια είναι το

$$U = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξεως

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \alpha''(u) + u\alpha'''(u) \\ \varphi_{uv} &= \alpha''(u) \\ \varphi_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

Η καμπυλότητα Gauss δίδεται από $K = \dfrac{ln - m^2}{EG - F^2}$.

Υπολογίζουμε πρώτα τα ℓ, m, n, γιατί εάν $\ell n - m^2 = 0$, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα E, F, G.

Έχουμε

$$m = U \cdot \varphi_{uv} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = 0$$

και

$$n = U \cdot \varphi_{vv} + 0\,.$$

Άρα η επιφάνεια M έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss 0.

2. *Δεν μπορούμε να υποθέσουμε οτι τα διανύσματα* u_1 *και* u_2 *είναι κύρια, άρα δεν έχουμε* $S(u_i) = k_i u_i$. *Όμως γνωρίζουμε (σελ. 254) οτι, για γραμμικά ανεξάρτητα* u_1 *και* u_2,

$$S(u_1) \times S(u_2) = K u_1 \times u_2 \,.$$

Συμπεραίνουμε ότι $K(p) = 0$.

Εναλλακτικά, αφού $S(u_1)$ *και* $S(u_2)$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, ο τελεστής* S *είναι ιδιόμορφος, άρα* $K = \det S = 0$.