

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε, και τα θέματα.
4. Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70.

ΘΕΜΑ Α. (20)

1. Τι είναι μία ομαλή καμπύλη στο χώρο; Δώστε τον ορισμό, και παράδειγμα μίας 1 – 1 καμπύλης που δεν είναι ομαλή.
2. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{3} \cos t + t - 1, \frac{1}{2} - 2 \sin t, -\cos t + \sqrt{3}t \right).$$

- α'. Βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας της α .
- β'. Είναι η α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας; Εάν όχι, βρείτε αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας β της α .
- γ'. Υπολογίστε το πεδίο πλαισίων Frenet της β .
- δ'. Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της β .
- ε'. Τι είδους καμπύλη είναι η α ;

ΘΕΜΑ Β. (20)

1. Θεωρούμε ισομετρία F , με ορθογώνιο μέρος C , και ομαλή καμπύλη α , με σφαιρική εικόνα σ . Δείξτε ότι η καμπύλη $F \circ \alpha$ έχει σφαιρική εικόνα $C \circ \sigma$.
2. Δίδεται μία ομαλή καμπύλη α , με μη μηδενιζόμενη συνάρτηση καμπυλότητας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο p στο χώρο, τέτοιο ώστε

$$(\alpha(t) - p) \cdot \alpha'(t) = 0.$$

Δείξτε ότι η καμπύλη α βρίσκεται στην επιφάνεια μίας σφαίρας.

ΘΕΜΑ Γ. (20)

Δίδεται ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{E}^3$, με μη μηδενιζόμενες συναρτήσεις καμπυλότητας και στρέψης. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, με

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + vN_\alpha(u),$$

όπου N_α είναι το κύριο κάθετο διανυσματικό πεδίο της α .

- α'. Υπολογίστε τις συναρτήσεις E, F, G για την απεικόνιση ϕ .
- β'. Δείξτε ότι η ϕ είναι κανονική απεικόνιση (δηλαδή ομαλή απεικόνιση).
- γ'. Θεωρείστε το διανυσματικό πεδίο W και τη συνάρτηση f , με τοπικές παραστάσεις ως προς την παραμέτρηση ϕ

$$W(u, v) = v\phi_u + u\phi_v \quad \text{και} \quad f(u, v) = v^2.$$

Υπολογίστε τη συνάρτηση $W[f]$.

ΘΕΜΑ Δ. (20)

Θεωρούμε τη σπείρα T που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον z -άξονα, του κύκλου στο (x, z) -επίπεδο με κέντρο $(a, 0, 0)$ και ακτίνα r , όπου $a > r > 0$.

- α'. Βρείτε μία παραμέτρηση της T .
- β'. Υπολογίστε τον τελεστή σχήματος της T .
- γ'. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss στα σημεία της T . Ποιά σημεία έχουν θετική καμπυλότητα και ποιά αρνητική;