

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 2

Η Ανισότητα Bernoulli

Ο χειρισμός εκφράσεων με δυνάμεις είναι συχνά δύσκολος. Μία χρήσιμη ανισότητα, που συγκρίνει δυνάμεις με όρους πρώτου βαθμού είναι η ανισότητα του Bernoulli .

Ανισότητα Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ όπου $x > -1$ και n είναι φυσικός αριθμός

Για μη-αρνητικές τιμές του x η ανισότητα Bernoulli μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Διωνύμου, σύμφωνα με το οποίο η αριστερή πλευρά είναι

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots \\ &\quad + nx^{n-1} + x^n \\ &\geq 1 + nx\end{aligned}$$

Γιατί δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο όταν $x < 0$;

Πρόβλημα 2.1 Αποδείξτε την Ανισότητα Bernoulli για $x > -1$, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Σημειώστε πού χρησιμοποιείτε το στοιχείο ότι $x > -1$. Πότε ισχύει το '='; .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 2.2

1. Χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε ότι $2^n > n$ για κάθε n .
2. Υποθέστε ότι $0 < x < 1$. Δείξτε ότι, για όλους τους φυσικούς αριθμούς n ,

$$x^n < \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε το $\frac{1}{x^n}$.

Απόλυτη Τιμή

Ορισμός Δίδουμε τον ορισμό της γνωστής μας συνάρτησης της απολύτου τιμής.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x, & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$$

- Πρόβλημα 2.3**
1. Βεβαιωθείτε ότι αυτός ο ορισμός δίνει πράγματι τη γνωστή συνάρτηση της απολύτου τιμής.
 2. Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης.

- Πρόβλημα 2.4** Ξαναγράψτε τις ακόλουθες εκφράσεις χωρίς τις απολύτους τιμές, διακρίνοντας διαφορετικές περιπτώσεις όπου απαιτείται.

$$(α) \quad a - |(a - |a|)| \qquad (β) \quad |(|x| - 1)|$$

Ιδιότητες της Απολύτου Τιμής

1. Για κάθε a , $0 \leq |a|$.
2. Για κάθε a , $a \leq |a|$ και $-|a| \leq a$.
3. Για κάθε a , $|a| = |-a|$.
4. Για κάθε a , b , $|ab| = |a| \cdot |b|$.
5. Εάν $a \neq 0$, $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$.
6. $|a| = 0$ εάν και μόνον εάν $a = 0$.

- Πρόβλημα 2.5** Αποδείξτε τις παραπάνω ιδιότητες

Ο χειρισμός εκφράσεων με απολύτους τιμές δεν είναι εύκολος. Μπορούμε να απαλείψουμε τις απολύτους τιμές εξετάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις, ή παίρνοντας το τετράγωνο της έκφρασης.

- Παράδειγμα** Λύστε την ανισότητα $|x + 4| < 2$.

Τετράγωνο

$$0 \leq |x + 4| < 2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -2.$$

Ανάλυση Περιπτώσεων

Περίπτωση 1. $x + 4 \geq 0$. Τότε $|x + 4| < 2 \Leftrightarrow x + 4 < 2 \Leftrightarrow x < -2$.
Αρα $-4 \leq x < -2$.

Περίπτωση 2. $x + 4 < 0$. Τότε $|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -(x + 4) < 2 \Leftrightarrow -x - 4 < 2 \Leftrightarrow x > -6$. Αρα $-6 < x < -4$.

Πρόβλημα 2.6 Λύστε τις ακόλουθες ανισότητες. Σε κάθε περίπτωση αποφασίστε εάν θα τετραγωνίσετε ή θα εξετάσετε περιπτώσεις.

1. $-2 < |x + 4|$
2. $|x - 1| + |x - 2| \geq 5$
3. $|x - 1| \cdot |x + 1| > 0$

Τριγωνικές Ανισότητες

Μια ανισότητα που θα γίνει ένα από τα βασικότερα μαθηματικά εργαλεία σας είναι η *Τριγωνική Ανισότητα*.

**Η Τριγωνική
Ανισότητα**

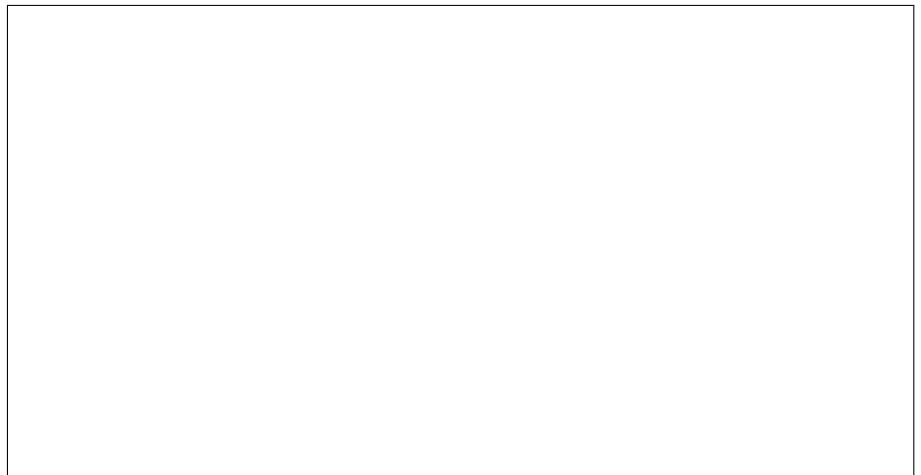
Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y ,

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Πρόβλημα 2.7 Βεβαιωθείτε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δοκιμάζοντας διάφορα ζεύγη αριθμών, θετικών και αρνητικών.

Τι έχει να κάνει η ανισότητα με τα τρίγωνα;

Πρόβλημα 2.8 Αποδείξτε την Τριγωνική Ανισότητα. Πότε ισχύει το '='; .
(Υπόδειξη: Τετραγωνίστε τις δύο πλευρές).



**Αντίστροφη
Τριγωνική Ανισότητα**

Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y ,

$$|x| - |y| \leq |x - y| .$$

Πρόβλημα 2.9

1. Αποδείξτε και αυτήν την ανισότητα.
(Υπόδειξη: Αντικαταστήσετε κάθε x στην Τριγωνική Ανισότητα με το $x - y$.)
2. Δείξτε ότι $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Πότε ισχύει το '='; .
3. Ομοίως, για κάθε δύο πραγματικούς x και y ,
 $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Διαστήματα

Στην Ανάλυση συχνά προσδιορίζουμε διαστήματα πάνω στην πραγματική ευθεία χρησιμοποιώντας απόλυτες τιμές, βασιζόμενοι στο επόμενο Θεώρημα.

Ιδιότητα Διαστήματος

Εάν x και b είναι πραγματικοί αριθμοί, και $b > 0$ τότε

$$|x| < b \text{ εαν και μόνον εάν } -b < x < b .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέστε ότι $|x| < b$. Τότε $-|x| > -b$ και συνεπώς $-b < -|x| < x < |x| < b$. Άρα $-b < x < b$.

Αντιστρόφως, υποθέστε ότι $-b < x < b$. Τότε, εάν $x > 0$, $x = |x|$ και άρα $-b < |x| < b$. Εάν $x < 0$, τότε $x = -|x|$, άρα $-b < -|x| < b$ και συνεπώς $b > |x| > -b$.

Πόρισμα

Εάν x , a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, και $b > 0$, τότε

$$|x - a| < b \text{ εαν και μόνον εάν } a - b < x < a + b .$$

Πρόβλημα 2.10

1. Λύστε την ανισότητα $|2x - 1| < 5$.
2. Σχεδιάστε τα ακόλουθα διαστήματα στην πραγματική ευθεία:

$$\{x : |x| < 1\} \quad \{x : |x - 1| < 2\} \quad \{x : |x + 4| < 1\}$$

Μια ματιά στο μέλλον

Ένα σημαντικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε σε επόμενα μαθήματα Ανάλυσης βασίζεται στην ακόλουθη ιδέα: Εάν έχουμε μια συνάρτηση του x , θέλουμε να βρούμε πόσο μπορούμε να επιτρέψουμε στο x να μεταβληθεί από μία δεδομένη τιμή, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης περισσότερο από κάποια προκαθορισμένη ποσότητα.

Στο επόμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x^2 + 3x$ παίρνει την τιμή 0 όταν $x = 0$. Θέλουμε να βρούμε πόσο μπορούμε να επιτρέψουμε στο x να μεταβληθεί από το 0 διατηρώντας τη μεταβολή του $x^2 + 3x$ από το 0 μικρότερη από 1.

Παράδειγμα

Βρείτε ένα θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |x^2 + 3x| < 1$.

Προσέξτε ότι θέλουμε να βρούμε κάποιο τέτοιο δ και όχι το μεγαλύτερο δυνατό. Αυτό μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε κάπως τις ανισότητες.

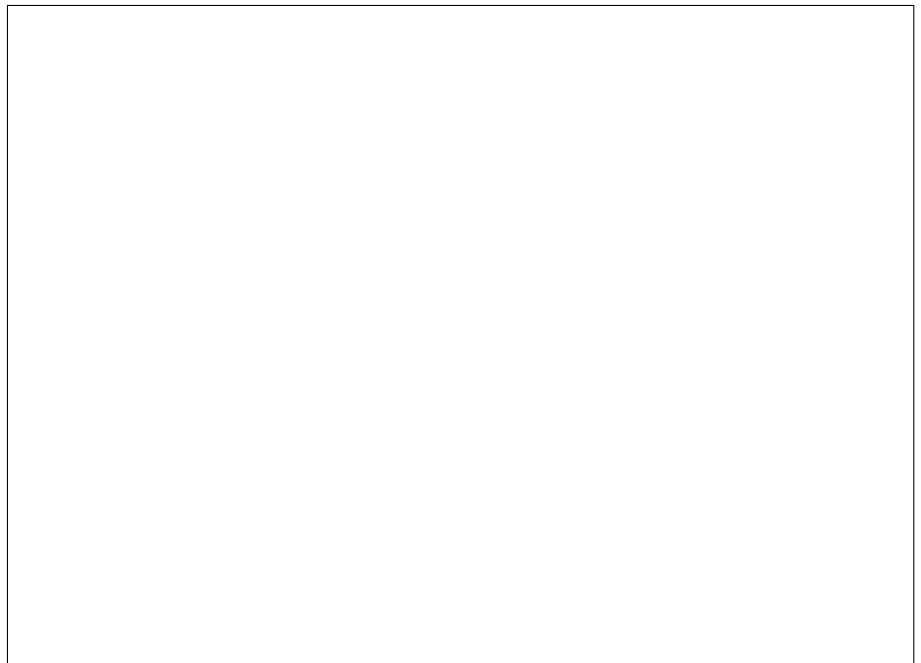
Υποθέτουμε ότι $|x| < \delta$. Τότε

$$\begin{aligned} |x^2 + 3x| &= |x||x + 3| \\ &\leq \delta(|x + 3|) && \text{εφόσον } |x| < \delta \\ &\leq \delta(|x| + |3|) && \text{από την Τριγωνική Ανισότητα,} \\ &&& \text{εφόσον } \delta > 0 \\ &\leq \delta(\delta + 3) \\ &\leq \delta(1 + 3) && \text{εάν υποθέσουμε ότι } \delta \leq 1 \\ &\leq 1 && \text{εάν υποθέσουμε ότι } \delta \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επεται ότι $|x| < \frac{1}{4} \Rightarrow |x^2 + 3x| < 1$.

Πρόβλημα 2.11 Υποθέστε ότι $\epsilon > 0$ είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. Βρείτε θετικό δ τέτοιο ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |x^2 + 3x| < \epsilon$.

Πρόβλημα 2.12 Βρείτε θετικό δ τέτοιο ώστε $|x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10}$.



Quiz Σε μια πόλη θέλουν να διαλέξουν για δήμαρχο τον πιο έξυπνο κάτοικο. Υπάρχουν τρεις υποψήφιοι και τους θέτουν το εξής πρόβλημα. Στο μέτωπο κάθε υποψηφίου κολλάνε ένα σταυρό, έτσι ο καθένας να μπορεί να δει το σταυρό των άλλων δύο αλλά όχι το δικό του. Οι σταυροί έχουν χρώμα μπλέ ή κόκκινο, και οι υποψήφιοι γνωρίζουν ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κόκκινος σταυρός. Ένας υποψήφιος βλέπει ότι οι άλλοι δύο έχουν κόκκινο σταυρό. Περιμένει λίγα δευτερόλεπτα και λέει: Γνωρίζω τι χρώμα σταυρό έχω. Τι χρώμα έχει, και πώς το βρήκε;