Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος

ΜΕΜ 203 Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της

υπό επεξεργασία

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2023

Περιεχόμενα

Μέρος Α′

Το Α′ Μέρος περιλαμβάνει την ύλη που δίδαξα το 2022. Το Β′ Μέρος περιλαμβάνει Κεφάλαια από τα οποία η διδάσκουσα ή ο διδάσκων μπορεί να επιλέξει ύλη, εάν το επιτρέπει ο χρόνος.

Κεφάλαιο 1

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στην εκπαίδευση

Η εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Από τους προϊστορικούς χρόνους οι άνθρωποι αισθάνθηκαν την ανάγκη να χρησιμοποιήσουν σχηματοποιημένα σχέδια για να αναπαραστήσουν τον κόσμο τους, να διακοσμήσουν τα αντικείμενα που χρησιμοποιούσαν με μοτίφ κατασκευασμένα από απλά, συνήθως συμμετρικά, γεωμετρικά σχήματα και να δώσουν στις πρώτες τους κατασκευές κανονικά γεωμετρικά σχήματα. Σε αυτή την πρώτη φάση της ''γεωμετρίας'' επικρατεί η **εποπτική** προσέγγιση.

Αργότερα η επέκταση των ανθρώπινων κοινοτήτων βελτιώνει τη δομή και την οργάνωση της κοινωνικής τους ζωής, και οδηγεί στην ανάδειξη των πρώτων πολιτισμών σε διάφορες περιοχές του πλανήτη: Κίνα, Μεσοποταμία, Ινδία, Αίγυπτος, Μεξικό, Ελλάδα. Η γεωμετρία σε αυτούς τους πολιτισμούς καλύπτει κυρίως χρηστικές ανάγκες, όπως τη μέτρηση μηκών, επιφανειών και όγκων, ή τη σχεδίαση ορίων στο έδαφος. Ταυτόχρονα η γεωμετρία γίνεται εργαλείο για άλλες τέχνες ή επιστήμες, όπως η αρχιτεκτονική, η γεωγραφία και η αστρονομία. Σε αυτή τη φάση η εποπτική προσέγγιση συνδυάζεται με την **υπολογιστική**, σε μία πρώτη προσπάθεια να εκλογικευθεί η γεωμετρική γνώση που έχει αποκτηθεί σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Για ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους, τα επιτεύγματα του Ελληνικού πολιτισμού ήταν τα πιο καθοριστικά στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας ως επιστήμης. Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται από πρακτικές ανάγκες προς μία πιο αφηρημένη και συνολική διαδικασία εκλογίκευσης, που καταλήγει γύρω στο 300 π.Χ. στη συστηματοποίηση των γνώσεων στα Στοιχεία του Ευκλείδη, και τις μετέπειτα εργασίες του Απολλώνιου, του Αρχιμείδη και του Πτολεμαίου. Σε αυτή τη φάση το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην **εννοιολογική** προσέγγιση της Γεωμετρίας.

Για πολλούς αιώνες τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούσαν μέρος της πνευματικής καλλιέργειας των μορφωμένων ατόμων στο δυτικό κόσμο, από την Ελληνιστική και τη Ρωμαϊκή εποχή, το Βυζάντιο, το Ισλάμ, μέχρι τον ευρωπαϊκό Μεσαίωνα και την Αναγέννηση. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία θεωρείτο μία εξιδανικευμένη αλλά ακριβής περιγραφή του φυσικού κόσμου, στην οποία ήταν δυνατή η διατύπωση προτάσεων και η εξακρίβωση της αλήθειας αυτών των προτάσεων μέσω της παραγωγικής συλλογιστικής μεθόδου, χωρίς αναφορά σε παρατηρήσεις ή πειραματικές διαδικασίες. Η κυριαρχία της Γεωμετρίας βασιζόταν τόσο στις προτάσεις της, που περιέγραφαν με απόλυτη βεβαιότητα πλευρές του φυσικού κόσμου, όσο και στη μεθοδολογία της, που αποτελούσε ιδανικό πεδίο για την εκμάθηση και την εξάσκηση στο συλλογισμό.

Με την ανάπτυξη άλλων, πειραματικών μεθόδων επιστημονικής αναζήτησης και την ανάδειξη του ευρωπαϊκού Διαφωτισμού, μέσα σε ένα κλίμα αμφισβήτησης, τέθηκαν ερωτήματα αναφορικά με τη σχέση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τον φυσικό κόσμο. Έτσι οι παραδοχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, από προφανείς ιδιότητες του χώρου, αντιμετωπίστηκαν ως ένα σύστημα αξιωμάτων, κάποια από τα οποία θα μπορούσαν να αντικατασταθούν χωρίς να καταστραφεί η εσωτερική συνέπεια του συστήματος. Αυτή η νέα αντίληψη οδήγησε στην μελέτη μή Ευκλείδειων γεωμετριών και την ανάπτυξη της σύγχρονης Γεωμετρίας.

Κατα τη διάρκεια του 19ου αιώνα οι απαιτήσεις ακρίβειας και αυστηρότητας στις μαθηματικές διαδικασίες άλλαξαν ριζικά. Το σύστημα της Γεωμετρίας όπως είχε διατυπωθεί από τον Ευκλείδη, ενώ επί αιώνες αποτελούσε το πρότυπο επιστημονικής παρουσίασης, δεν ικανοποιούσε αυτές τις νέες απαιτήσεις. Οι προσπάθειες συμπλήρωσης των κενών και κάλυψης της απαιτούμενης αυστηρότητας οδήγησαν στο σύστημα αξιωμάτων του Hilbert. Την ίδια περίοδο αναδεικνύονται άλλοι κλάδοι των μαθηματικών, όπως η Γραμμική ’λγεβρα, οι οποίοι καλύπτουν εν μέρει το πεδίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ παράλληλα η Γεωμετρία, χρησιμοποιώντας νέα εργαλεία από την Ανάλυση και την ’λγεβρα, διευρύνεται σε νέες περιοχές, όπως η Διαφορική Γεωμετρία, η Γεωμετρική και η Αλγεβρική Τοπολογία και η Αλγεβρική Γεωμετρία. Κεντρικό ρόλο στις νέες προσεγγίσεις έχει η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού, μίας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης που διατηρεί βασικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στην εκπαίδευση.

Η κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην εκπαίδευση διατηρήθηκε μέχρι το πρώτο μισό του 20ού αιώνα. Καθώς η εκπαίδευση θεσμικοποιήθηκε και συνδέθηκε με τις παραγωγικές ανάγκες των αντίστοιχων κοινωνιών νέα αντικείμενα χρειάστηκε να ενταχθούν στο σχολικό πρόγραμμα. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία σταδιακά εκτοπίστηκε ή αντικαταστάθηκε από άλλους κλάδους των μαθηματικών, όπως η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Διανυσματικός Λογισμός. ᾿λλαξε ο τρόπος διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και μειώθηκε ο χρόνος που αφιερώνεται σε αυτήν.

Η μεταρρύθμιση των ‘‘Νέων Μαθηματικών’’ τη δεκαετία του 1960 εκτόπισε την Ευκλείδεια Γεωμετρία από τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των μαθηματικών σε πολλές χώρες. Πολλές από τις βασικές επιλογές εκείνης της μεταρρύθμισης, όπως η έμφαση στη διδασκαλία των συνόλων και των αλγεβρικών δομών από μικρές ηλικίες, απέτυχαν αλλά η υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρέμεινε.

Στην Ελλάδα αυτή η τάση ήρθε με καθυστέρηση, τελικά όμως επικράτησε. Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διδάσκεται πολύ λιγότερο απ' οτι πριν από 30 χρόνια. Επί πλέον έχει υποβαθμιστεί θεσμικά, αφού για πολλά χρόνια δεν περιέχεται στην εξεταστέα ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων. Όμως το νέο Πρόγραμμα Σπουδών που δημοσιεύτηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής το 2021 και προβλέπεται να αρχίσει να εφαρμόζεται από το 2024, επαναφέρει τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην ύλη της 3ης Λυκείου του Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών.

Για τη χρησιμότητα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχουν αντιπαρατεθεί πολλές απόψεις. Οι υποστηρικτές της προβάλλουν την παιδαγωγική αξία της λογικής επιχειρηματολογίας, την ανάδειξη της απόδειξης ως ένα ιδιαίτερο εργαλείο στα μαθηματικά, τη συνάφεια των συλλογισμών με το σχήμα που προωθεί σταδιακά την ικανότητα του μαθητή ή της μαθήτριας να αξιοποιεί την εποπτεία για να την υπερβεί. Οι πολέμιοι επικαλούνται τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι περισσότερες μαθήτριες και μαθητές να χρησιμοποιήσουν λογική επιχειρηματολογία σε ένα σχετικά πολύπλοκο σύστημα όπως αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, και τη χρησιμότητα άλλων μεθόδων επιχειρηματολογίας. Η κατάσταση διαφέρει από χώρα σε χώρα, αλλά μπορούμε να πούμε οτι συνολικά η κοινότητα των μαθηματικών παιδαγωγών, γυναικών και ανδρών, αναζητά νέες λύσεις. Κάποιες από αυτές θα εξετάσουμε στη συνέχεια του μαθήματος.

Στην Ελλάδα, ο χρόνος που αφιερώνεται στη Γεωμετρία στο αναλυτικό πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι μικρός σε σχέση με άλλες χώρες. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκεται ως μέρος του μαθήματος Μαθηματικών στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Στην 3η Λυκείου η Γεωμετρία έχει εκτοπιστεί τελείως από τα μαθήματα Μαθηματικών ενώ στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου παραμένει αυτόνομο μάθημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το περιεχόμενο αυτού του μαθήματος προϋποθέτει οτι οι μαθήτριες και οι μαθητές της 1ης Λυκείου είναι ώριμοι να κατανοήσουν την ανάπτυξη ενός μαθηματικού συστήματος, τη σύνδεση ανάμεσα στα αντικείμενα της παρατήρησης και τις θεωρητικές έννοιες, τη σκοπιμότητα αυστηρών αποδείξεων. Το μάθημα επικεντρώνεται στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών και των μαθητριών να παράγουν αποδείξεις. Πόσο ρεαλιστικές είναι αυτές οι επιλογές του Προγράμματος Σπουδών;

Τα τρία πρότυπα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μπορούμε να διακρίνουμε τρία διαφορετικά πρότυπα στοιχειώδους γεωμετρίας. Αυτά δεν είναι ιεραρχικά δομημένα. Έχουν διαφορετικά πεδία αναφοράς και η επιλογή της προσέγγισης για την επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται από το πρόβλημα και από το πρότυπο που χρησιμοποιείται.

Το πρώτο πρότυπο, η Φυσική Γεωμετρία, αναφέρεται στον πρακτικό κόσμοτης τεχνολογίας. Σε αυτή τη γεωμετρία η εγκυρότητα ενός ισχυρισμού βασίζεται στην παρατήρηση, το πείραμα και τα λογικά συμπεράσματα. Το μοντέλο προσομοιάζει προς την πραγματικότητα. Οποιοδήποτε επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει έναν ισχυρισμό, συμπεριλαμβανομένων πειραματικών ή δυναμικών αποδείξεων. Αντιστοιχεί στη θεώρηση των μαθηματικών ως μία εργαλειοθήκη, με τη γεωμετρία να προσφέρει εργαλεία για την επίλυσηκαθημαρινών προβλημάτων.

Το δεύτερο πρότυπο, η Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία, βασίζεται στην κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δομείται σε ένα μοντέλο που προσεγγίζει την πραγματικότητα χωρίς να ταυτίζεται με αυτήν. Διατυπώνονται αξιώματα, και οι αποδείξεις πρέπει να βασίζονται στο αξιωματικό σύστημα. Αλλά το σύστημα των αξιωμάτων μπορεί να μην είναι πλήρες. Η αξιωματική διαδικασία είναι δυναμική, και βασίζεται σε ένα μοντέλο του πραγματικού κόσμου.

Καιτα δύο πρότυπα έχουν στενή σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά με διαφορετικό τρόπο. Διαφέρουν στο τεκμήριο εγκυρότητας, δηλαδή στο είδος των επιχειρημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση μίας πρότασης. Επίσης διαφέρουν στο χαρακτήρα των σχεδίων, που είναι μαοναδικά και συγκεκριμένα στη Φυσική Γεωμετρία, ενώ είναι γενικά και προσδιορίζονται από τους ορισμούς στη Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία.Τέλος διαφέρουν στον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων.

Το τρίτο πρότυπο είναι η Τυπική Αξιωματική Γεωματρία. Αυτή δεν εμφανίζεται στη σχολική ύλη, αλλά αποτελεί το σημείο αναφοράς όσων έχουν προχωρημένη μαθηματική παιδεία. Το αξιωματικό σύστημα στο τρίτο πρότυπο δεν προσδιορίζεται από την φυσική πραγματικότητα. Η σχέση με το χώρο έχει διαραγεί, και η γεωμετρία βασίζεται στη Λογική.

Τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele.

Δύο Ολλανδοί ερευνητές, ο Pierre van Hiele και η Dina van Hiele-Geldof, σε παράλληλες διδακτορικές διατριβές το 1957, ανέπτυξαν μία θεωρία για τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Η θεωρία των van Hiele ιεραρχεί τον τρόπο κατανόησης των ιδεών του χώρου σε πέντε επίπεδα. Καθένα από τα πέντε επίπεδα περιγράφει τις συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιούνται στη εξέταση ή τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων. Τα επίπεδα δεν περιγράφουν τις γνώσεις που κατέχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο, αλλά τον τρόπο σκέψης και τους τύπους γεωμετρικών ιδεών που επεξεργάζεται νοητικά. Καθώς ένα άτομο περνάει από το ένα επίπεδο στο άλλο, το αντικείμενο των γεωμετρικών συλλογισμών αλλάζει. Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από τα αντικείμενα της σκέψης και τα προϊόντα της σκέψης. Τα προϊόντα της σκέψης σε ένα επίπεδο αποτελούν τα αντικείμενα της σκέψης στο επόμενο επίπεδο.

Επίπεδο 0: Εποπτική αντίληψη – Νοερή απεικόνιση

Τα σχήματα κρίνονται από την εμφάνισή τους.

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **τα σχήματα και η μορφή τους** (με τι μοιάζουν). Τα προϊόντα της σκέψης είναι **τάξεις ή ομάδες σχημάτων που φαίνονται να μοιάζουν**.

Οι μαθήτριες και οι μαθητές στο επίπεδο 0 αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα σχήματα βασιζόμενοι στα καθολικά οπτικά χαρακτηριστικά τους. Τα παιδιά μπορούν να εκτελούν μετρήσεις και να συζητούν για τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν επεξεργάζονται αυτές τις ιδιότητες με σαφήνεια. Το σχήμα ορίζεται για το παιδί από την εμφάνισή του: ένα ορθογώνιο είναι ορθογώνιο ''επειδή μοιάζει με μία πόρτα'', ένα τετράγωνο είναι τετράγωνο ''επειδή μοιάζει με τετράγωνο''. Η μορφή έχει μεγαλύτερη σημασία από άλλες ιδιότητες του σχήματος. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο του οποίου οι πλευρές σχηματίζουν γωνία 45^o με την οριζόντιο, μπορεί να μη θεωρηθεί τετράγωνο από ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Επίπεδο 1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων

Τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους.

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι περισσότερο **τάξεις σχημάτων** παρά ξεχωριστά σχήματα.
Τα προϊόντα της σκέψης είναι **οι ιδιότητες των σχημάτων**.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες στο επίπεδο 1 αντιμετωπίζουν τα σχήματα στο επίπεδο μίας ομάδας, παρά ως μεμονομένα σχήματα. Εστιάζοντας σε μία τάξη σχημάτων, μπορούν να συλλογιστούν σχετικά με το τι καθιστά ένα ορθογώνιο ορθογώνιο, και να επικεντρωθούν στα σημαντικά χαρακτηριστικά (τέσσερεις πλευρές, απέναντι πλευρές παράλληλες, απέναντι πλευρές ίσες, τέσσερεις ορθές γωνίες, ίσες διαγώνιοι, κλπ). Χαρακτηριστικά όπως ο προσανατολισμός ή το μέγεθος, που δεν επηρεάζουν το εάν είναι ορθογώνιο, πέφτουν σε δεύτερη μοίρα. Τα παιδιά συνειδητοποιούν οτι διάφορα σχήματα κατατάσσονται στην ίδια ομάδα εξ αιτίας των ιδιοτήτων τους. Έτσι, οι ιδέες για ένα συγκεκριμένο σχήμα μπορούν να γενικευτούν, και να συμπεριλάβουν όλα τα σχήματα που ταιριάζουν στην τάξη εκείνη. ''Όλοι οι κύβοι έχουν έξι ίσες έδρες, και κάθε μία από αυτές είναι ένα τετράγωνο''. Τα άτομα σε αυτό το επίπεδο μπορούν να καταγράψουν όλες τις ιδιότητες των τετραγώνων, των ορθογωνίων, των παραλληλογράμμων, αλλά μπορεί να μη διακρίνουν οτι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Οι ιδιότητες συνδέονται με τα σχήματα, αλλά δεν είναι διατεταγμένες ως συνέπεια η μία κάποιας άλλης.

Επίπεδο 2: Μη τυπική παραγωγή: αρχή παραγωγικής σκέψης και μαθηματικών συλλογισμών

Οι ιδιότητες διατάσσονται: κάποιες προκύπτουν από άλλες.

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **οι ιδιότητες των σχημάτων**.
Τα προϊόντα της σκέψης είναι **σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων**.

Καθώς ένα άτομο αποκτά την ικανότητα να προβληματίζεται πάνω στις ιδιότητες των σχημάτων, ως γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς τους περιορισμούς του συγκεκριμένου φυσικού αντικειμένου, αρχίζει να διακρίνει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των ιδιοτήτων. ''Αν και οι τέσσερεις γωνίες είναι ορθές, το σχήμα είναι ορθογώνιο''. ''Αν ένα σχήμα είναι τετράγωνο, θα πρέπει να είναι και ορθογώνιο.'' Σταδιακά, η ικανότητα στο συλλογισμό πάνω στις ιδιότητες αυξάνεται, και η μαθήτρια ή ο μαθητής μπορεί να ταξινομεί τα σχήματα χρησιμοποιώντας λιγότερες ιδιότητες ή και μόνο τις απολύτως αναγκαίες. Για παράδειγμα, ένα σχήμα με τέσσερεις ίσες πλευρές και (τουλάχιστον) μία ορθή γωνία, είναι τετράγωνο. Ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία είναι ορθογώνιο. Από την παρατήρηση των ιδιοτήτων, περνάει σε λογικά επιχειρήματα σχετικά με τις ιδιότητες. Μπορεί να παρακολουθήσει και να αντιληφθεί τη σημασία ενός μη τυπικού παραγωγικού επιχειρήματος για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Αν και οι αποδείξεις είναι περισσότερο διαισθητικές, σε αυτό το επίπεδο το άτομο αρχίζει να εκτιμά τη σημασία των λογικών επιχειρημάτων.

Επίπεδο 3: Γεωμετρικοί συλλογισμοί, παραγωγική σκέψη

Το νόημα της συνεπαγωγής.

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων**.
Τα προϊόντα της σκέψης είναι **παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη γεωμετρία**.

Οι μαθήτριες και οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν περισσότερα πράγματα, πέρα από τις ιδιότητες των σχημάτων. Παράγουν υποθέσεις για σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες,

Σχῆμα 1.1: Επίπεδα van Hiele 0 – 2.

και αναρωτιούνται για την ορθότητα, την ‘‘αλήθεια’’ των υποθέσεων. Η ανάλυση των μη τυπικών επιχειρημάτων για τον έλεγχο των υποθέσεων, οδηγεί στην ανάπτυξη ενός δομημένου συστήματος, με ‘προφανείς αλήθειες’ —αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα και άλλα συμπεράσματα. Ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο μπορεί να εκτιμήσει την αναγκαιότητα αυτού του συστήματος για την κατοχύρωση της γεωμετρικής αλήθειας, να εργάζεται με αφηρημένες προτάσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες, και να βγάζει συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση. Διακρίνει ιδιότητες, όπως οτι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αλλά δεν αρκείται στη παρατήρηση, ή τη μη τυπική εξήγηση. Εκτιμά οτι χρειάζεται να το αποδείξει με μία σειρά λογικών επιχειρημάτων. Αντιθέτως, ένα άτομο στο Επίπεδο 2, μπορεί να παρακολουθήσει την επιχειρηματολογία, αλλά δεν εκτιμά την αναγκαιότητά της.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα, αφηρημένη Γεωμετρία.

Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη γεωμετρία**.
Τα προϊόντα της σκέψης είναι **συγκρίσεις και αντιπαραβολές ανάμεσα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας**.

Σε αυτό το επίπεδο το αντικείμενο της προσοχής είναι τα ίδια τα αξιωματικά συστήματα, και όχι η παραγωγή συμπερασμάτων μέσα σε ένα σύστημα. Εξετάζονται οι διακρίσεις και οι σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα.

Χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele.

1. Στη θεωρία van Hiele τα επίπεδα έχουν καθορισμένη διαδοχική σειρά. Για να προχωρήσουν τα παιδιά σε κάποιο επίπεδο πάνω από το 0, πρέπει προηγουμένως να περάσουν από όλα τα προηγούμενα. Σε κάθε επίπεδο, αυτό που ήταν λανθάνον

Σχῆμα 1.2: Επίπεδα van Hiele 2 – 4.

στο προηγούμενο επίπεδο, γίνεται εμφανές.

2. Τα επίπεδα δεν εξαρτώνται από την ηλικία, όπως τα εξελικτικά στάδια του Piaget. Δεν αποτελούν στοιχεία μίας βιολογικής ωρίμανσης, αλλά αποτέλεσμα μίας διαδικασίας μαθητείας. Χωρίς την κατάλληλη μαθητεία ένα παιδί του Γυμνασίου ή ένας ενήλικας μπορεί να παραμένει στο επίπεδο 0. Όμως η ηλικία συνδέεται με το είδος και την ποσότητα των γεωμετρικών εμπειριών ενός ατόμου, και μπορούμε να πούμε οτι υπάρχει μία χαλαρή αντιστοιχία των επιπέδων με τις τάξεις του σχολείου:
   - Νηπιαγωγείο – Δ' δημοτικού: Επίπεδο 0
   - Γ' – Στ' δημοτικού: Επίπεδο 1
   - Ε' δημοτικού – Γ' γυμνασίου: Επίπεδο 2
   - Λύκειο: Επίπεδο 3

3. Η γεωμετρική εμπειρία αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει την πρόοδο από το ένα επίπεδο στο άλλο. Η διδασκαλία στοχεύει να βοηθήσει αποτελεσματικά το μαθητή ή τη μαθήτρια να περάσει από διάφορες φάσεις που οδηγούν στο επόμενο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Αυτό επιτυγχάνεται με δραστηριότητες που εμπλουτίζουν τις εμπειρίες στο τρέχον στάδιο και επιτρέπουν τη διερεύνηση, τη συζήτηση και την αλληλεπίδραση με περιεχόμενο που εντάσσεται στο επόμενο στάδιο.

4. Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα για τα αντικείμενα και τις δικές του σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. 'τομα που επιχειρηματολογούν σε διαφορετικό επίπεδο δεν μπορούν να συνεννοηθούν. Ο διάλογος απαιτεί την προσαρμογή της δασκάλας στο επίπεδο της μαθήτριας. Όταν η διδασκαλία είναι

σε επίπεδο ανώτερο από αυτό του μαθητή, υπάρχει έλλειψη επικοινωνίας. Εάν τα άτομα αντιμετωπίσουν αντικείμενα σκέψης τα οποία δεν έχουν δομηθεί σε προηγούμενα στάδια, δεν θα μπορέσουν να τα διαχειριστούν. Η ενδεχόμενη επιτυχία των παιδιών θα βασίζεται στην αποστήθιση ορισμών, κανόνων ή ακόμη και αποδείξεων, συνεπώς είναι προσωρινή και επιφανειακή.

Εφαρμογές στη διδασκαλία

Η θεωρία των van Hiele προσφέρει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να διεξάγονται γεωμετρικές δραστηριότητες. Δεν καθορίζει το περιεχόμενο, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές δραστηριότητες. Μία δραστηριότητα σχεδιάζεται με αναφορά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, αλλά πρέπει να έχει την ευελιξία να προσαρμοστεί στο επίπεδο σκέψης των μαθητριών και των μαθητών της τάξης, μέσω των ερωτήσεων ή της καθοδήγησης που παρέχει ο δάσκαλος ή η δασκάλα. Πρέπει να σεβαστούμε τις αντιδράσεις και τις παρατηρήσεις των παιδιών οι οποίες υποδηλώνουν ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατώτερο από αυτό στο οποίο σχεδιάστηκε η δραστηριότητα, να τα ενθαρρύνουμε και να τα προκαλέσουμε να λειτουργήσουν στο επόμενο επίπεδο.

Στόχος των μαθημάτων Γεωμετρίας στο νηπιαγωγείο και το δημοτικό σχολείο είναι η προαγωγή του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και των μαθητριών από το Επίπεδο 0 στο Επίπεδο 1 ή 2. Παράλληλα, βελτιώνεται η αίσθηση του χώρου από την κατανόηση και την αναγνώριση των σχημάτων, η δυνατότητα περιγραφής του χώρου από την ταξινόμηση και τη γνώση των ονομάτων των σχημάτων, τις έννοιες της ισότητας και της ομοιότητας, και την εξοικείωση με τις μονάδες μέτρησης και τη διαδικασία μέτρησης ή υπολογισμού διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων (μήκη, γωνίες, εμβαδά, όγκοι). Όλα αυτά δεν αντιμετωπίζονται ως ''πράγματα που πρέπει να μάθουμε'' αλλά ως τρόποι γνώσης και κατανόησης του γεωμετρικού κόσμου.

Η κατανόηση του γεωμετρικού κόσμου προετοιμάζει τα παιδιά για τη μετάβαση στο Επίπεδο 3. Για να κατανοηθούν οι παραγωγικές αποδείξεις απαιτείται μία ισχυρή διαισθητική βάση, την οποία αποκτούν οι μαθήτριες και οι μαθητές μέσα από εμπειρικές ανακαλύψεις, διατύπωση και επαλήθευση υποθέσεων, γεωμετρικές κατασκευές και εφαρμογές. Η επινόηση μεθόδων που θα επιτρέψουν το συνδυασμό της ''πρακτικής'' και της ''θεωρητικής'' πλευράς της Γεωμετρίας αποτελεί το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Σχεδιασμός δραστηριοτήτων

Η θεωρία των van Hiele προσφέρει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να διεξάγονται γεωμετρικές δραστηριότητες. Δεν καθορίζει το περιεχόμενο, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλές δραστηριότητες.

Μία δραστηριότητα σχεδιάζεται με αναφορά σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, αλλά πρέπει να έχει την ευελιξία να προσαρμοστεί στο επίπεδο σκέψης των μαθητριών και των μαθητών της τάξης, μέσω των ερωτήσεων ή της καθοδήγησης που παρέχει η δασκάλα ή ο δάσκαλος.

Πρέπει να σεβαστούμε τις αντιδράσεις και τις παρατηρήσεις των παιδιών οι οποίες υποδηλώνουν ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατώτερο από αυτό στο οποίο σχεδιάστηκε η δραστηριότητα, να τα ενθαρρύνουμε και να τα προκαλέσουμε να λειτουργήσουν στο επόμενο επίπεδο.

Σε επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε δραστηριότητες κατάλληλες για τα Επίπεδα 2 και 3.

Κεφάλαιο 2

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Τα ''Στοιχεία'' γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια. Σε αυτά συντίθενται σε ένα ''αξιωματικά θεμελιωμένο'' ενιαίο κείμενο τα μέχρι τότε γνωστά Μαθηματικά. Αυτή η εργασία δείχνει τη βαθιά γνώση όσων είχαν προηγηθεί και εξαιρετική συνθετική ικανότητα. Αξίζει να επισημανθεί η συστηματικότητα στη διαδοχή των ορισμών και των αιτημάτων, καθώς και στην προετοιμασία των αποδείξεων.

Ιδιαίτερη συμβολή του Ευκλείδη φαίνεται οτι είναι η διατύπωση του 5ου αιτήματος, στο οποίο θα αναφερθουμε επανειλημμένα. Το αίτημα χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην Πρόταση κθ΄ (29) του πρώτου βιβλίου, παρ' όλο που θα απλοποιούσε τις αποδείξεις προηγούμενων προτάσεων. Φαίνεται οτι ο Ευκλείδης αντιλαμβανόταν τον ιδιαίτερο χαρακτήρα αυτού του αιτήματος, και καθυστέρησε να το χρησιμοποιήσει όσο ήταν δυνατό. Η Πρόταση κθ΄ δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς το 5ο αίτημα ή κάποια αντίστοιχη υπόθεση.

Τα ''Στοιχεία'' αποτελούνται από 13 βιβλία. Στα πρώτα 6 αναπτύσσεται η γεωμετρία του επιπέδου και η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Τα βιβλία 7, 8 και 9 αναφέρονται σε ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπως η διαιρετότητα. Το δέκατο βιβλίο αναπτύσσει τη θεωρία του Θεαίτητου για μία γεωμετρική προσέγγιση των άρρητων αριθμών. Τέλος στα τρία τελευταία βιβλία παρουσιάζεται η γεωμετρία του χώρου, ο υπολογισμός του όγκου στερεών και η ταξινόμηση των κανονικών στερεών, που λέγονται και Πλατωνικά.

Στη συνέχεια παραθέτουμε, στο πρωτότυπο, κάποια αποσπάσματα από το πρώτο βιβλίο των ''Στοιχείων''. Στην αρχή του βιβλίου διατυπώνονται 23 ορισμοί.

ΟΡΟΙ

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β′. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ′. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ′. Εὐθεία γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

. . .

ι′. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ’ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ’ ἣν ἐφέστηκεν.

. . .

κγ′. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ’ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Κάποιοι από αυτούς τους ορισμούς αναφέρονται σε αρχικές ή θεμελιώδεις έννοιες, όπως το σημείο, η γραμμή, η ευθεία γραμμή και το επίπεδο. Αυτές δεν ορίζονται με σαφήνεια, αλλά μάλλον περιγράφονται. Στις σύγχρονες προσεγγίσεις τέτοιες έννοιες δεν ορίζονται, αλλά χαρακτηρίζονται από τις ιδιότητες τις οποίες απαιτούμε να έχουν.

Στη συνέχεια έχουμε τα 5 αιτήματα (αξιώματα σχετικά με γεωμετρικές έννοιες).

ΑΙΤΗΜΑΤΑ

α′. Ηἰτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β′. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τὸ συνεχὲς ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ′. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

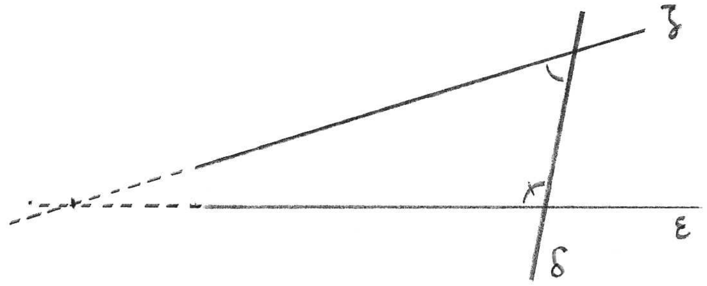
δ′. Καὶ πάσας τας ορθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε′. Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

(Εάν δύο ευθείες τέμνονται από ευθεία και οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε εάν επεκταθούν οι ευθείες θα έχουν κοινό σημείο προς τη μεριά που βρίσκονται οι γωνίες που είναι μικρότερες από δύο ορθές.)

Τα τρία πρώτα αιτήματα αφορούν στη δυνατότητα κατασκευής (την ύπαρξη) ευθειών και κύκλων. Το τέταρτο αίτημα δηλώνει οτι όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

Το πέμπτο αίτημα αναφέρεται στις παράλληλες ευθείες, Σχέδιο 2.1. Η διατύπωσή του στα στοιχεία είναι ισοδύναμη με την πιο συνηθισμένη σήμερα διατύπωση, οτι από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος προς την ευθεία. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η ιδιότητα έχει σημαντικές συνέπειες και διακρίνει την Ευκλείδεια από τη μή Ευκλείδεια Γεωμετρία.



Σχῆμα 2.1: Το αίτημα των παραλλήλων.

Οι κοινές έννοιες περιλαμβάνουν προφανείς, αναπόδεικτες ιδιότητες με γενικώτερη εφαρμογή, όπως η έννοια της ισότητας, ή η μεταβατικότητα.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

α′. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα.

β′. Καὶ ἐάν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστίν ἴσα.

ζ′. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

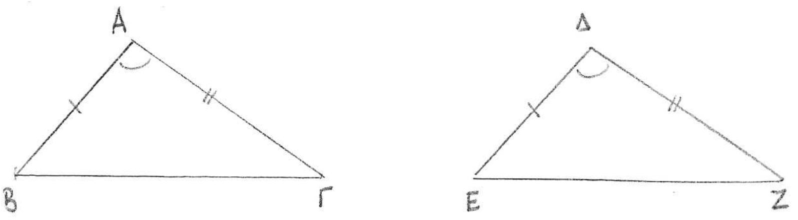
ϑ′. Καὶ δύο εὐϑεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Ιδιαίτερη σημασία για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει η κοινή έννοια ζ′, η οποία ορίζει την ισότητα γεωμετρικών σχημάτων μέσω της εφαρμοσιμότητας. Στην ακόλουθη πρόταση θα δούμε πώς χρησιμοποιείται, και θα αναφερθούμε στην κριτική αυτής της έννοιας στις σύγχρονες προσεγγίσεις.

Πρόταση δ′

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τήν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

(Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές ίσες, μία προς μία, και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται μεταξύ των ίσων πλευρών, τότε και η βάση είναι ίση προς τη βάση, και το τρίγωνο είναι ίσο προς το τρίγωνο, και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες, μία προς μία, προς αυτές που βρίσκονται απέναντι στις ίσες πλευρές.)



Σχῆμα 2.2: Απόδειξη με εφαρμογή.

Η απόδειξη της Πρότασης δ′ είναι μία από τις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται η έννοια της ‘‘εφαρμογής’’. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται το ένα τρίγωνο, έστω ΑΒΓ, στο άλλο, ΔΕΖ, έτσι ώστε να συμπέσει το Α με το Δ, και η ευθεία ΑΒ με την ευθεία ΔΕ. Τότε το Β θα συμπέσει με το Ε (εδώ και στα επόμενα χρησιμοποιείται το αντίστροφο της Κοινής Έννοιας ζ′, παρ' όλο που αυτό δεν περιλαμβάνεται στις υποθέσεις), και η ευθεία ΑΓ με την ευθεία ΔΖ, αφού οι γωνίες $< angle$ΒΑΓ και ∠ΕΔΖ είναι ίσες. Και αφού η ΑΓ είναι ίση με τη ΔΖ, το Γ θα συμπέσει με το Ζ. Αφού το Β συμπίπτει με το Ε και το Γ με το Ζ, η ευθεία ΒΓ ταυτίζεται με την ευθεία ΕΖ, αφού δύο ευθείες δεν μπορεί να περιέχουν χωρίο (Κοινή Έννοια ϑ′). Άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ θα εφαρμόσει στο ΕΖ, και θα είναι ίσα. Από αυτό συμπεραίνεται οτι και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες, και συνεπώς οτι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Η σύγχρονη προσέγγιση της Γεωμετρίας δίδει κεντρική θέση στην έννοια του μετασχηματισμού, που είναι η γενικώτερη περίπτωση μετακίνησης. Έτσι, σύμφωνα με το Felix Klein, μία γεωμετρία μελετάει ιδιότητες των αντικειμένων που παραμένουν αναλλοίωτες από κάποιο είδος μετασχηματισμών. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι οι ισομετρίες: απεικονίσεις του επιπέδου ή του χώρου στον εαυτό του που δεν μεταβάλουν τις αποστάσεις μεταξύ σημείων. Έτσι η ευκλείδεια έννοια της ‘‘εφαρμογής’’ σημαίνει μετακίνηση ενός σχήματος μέσω μίας ισομετρίας.

Κεφάλαιο 3

Βασικές έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις βασικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του επιπέδου ακολουθώντας την προσέγγιση του Hilbert. Θα παρουσιάσουμε, χωρίς απόδειξη, κάποιες Ιδιότητες των σημείων και των ευθειών, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε στη συνέχεια για την απόδειξη άλλων αποτελεσμάτων. Αυτές οι Ιδιότητες απορρέουν από τα Αξιώματα του Hilbert, αλλά η απόδειξη του είναι μακροσκελής, και σε ορισμένες περιπτώσεις τεχνικά δύσκολη.

Σημεία και ευθείες στο επίπεδο

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου θεωρούμε δύο αρχικές έννοιες για τις οποίες δεν δίνουμε ορισμό, τα **σημεία** και τις **ευθείες**. Υποθέτουμε οτι έχουμε ένα σύνολο P του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε σημεία και συμβολίζουμε με κεφαλαία ελληνικά γράμματα Α, Β, Γ, και ένα σύνολο L του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε ευθείες και συμβολίζουμε με μικρά ελληνικά γράμματα δ, ε, ζ. Οι ιδιότητες των σημείων και των ευθειών προσδιορίζονται από δύο σχέσεις, που τις ονομάζουμε **βρίσκεται** και **μεταξύ**.

Η σχέση **βρίσκεται** είναι μία σχέση μεταξύ σημείων και ευθειών[1]. Εάν ένα σημείο Α βρίσκεται σε μία ευθεία ε, γράφουμε Α$\epsilon\varepsilon$. Λέμε επίσης οτι Α **ανήκει** στην ευθεία ε, ή οτι η ε **διέρχεται** από το σημείο Α.

Εάν Α βρίσκεται στην ευθεία ε και Α βρίσκεται στην ευθεία ζ, λέμε οτι Α είναι κοινό σημείο των ε και ζ, ή οτι ε και ζ τέμνονται στο Α.

Η σχέση **μεταξύ** ορίζεται σε τριάδες σημείων[2]. Συγκεκριμένα, εάν Α, Β, Γ είναι

---

[1]Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στα Θεμέλια των Μαθηματικών, η σχέση ''βρίσκεται'' είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $P \times L$. Το σημείο Α βρίσκεται στην ευθεία ε σημαίνει οτι το ζεύγος (Α, ε) ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{B}$.

[2]Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στα Θεμέλια των Μαθηματικών, η σχέση ''μεταξύ'' είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{M}$ του $P \times P \times P$. Το σημείο Β βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Γ σημαίνει οτι η

τρία διαφορετικά σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε ακριβώς ένα από τα σημεία είναι μεταξύ των άλλων δύο. Εάν το Β είναι μεταξύ του Α και του Γ, γράφουμε Α – Β – Γ. Τότε το Β είναι και μεταξύ του Γ και του Α, Γ – Β – Α.

Αυτές οι σχέσεις προσδιορίζονται από τα αξιώματα που ικανοποιούν. Σε αυτό το μάθημα θα τους δώσουμε τη διαισθητική τους σημασία, και θα τις χρησιμοποιήσουμε για να διατυπώσουμε κάποιες ιδιότητες και να ορίσουμε άλλα αντικείμενα.

Ιδιότητα 3.1 *Εάν Α και Β είναι δύο διαφορετικά σημεία, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία στην οποία βρίσκονται το Α και το Β, και τη συμβολίζουμε ΑΒ.*

Θεώρημα 3.2 *Δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είτε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.*

Παράλληλες ονομάζουμε δύο ευθείες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Ιδιότητα 3.3 *Για κάθε ευθεία ε υπάρχουν άπειρα σημεία που βρίσκονται στην ε και υπάρχουν άπειρα σημεία του επιπέδου που δεν βρίσκονται στην ε.*

Ιδιότητα 3.4 *Εάν Α και Β είναι διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε υπάρχουν άπειρα διαφορετικά σημεία Χ στην ευθεία ΑΒ τέτοια ώστε Α – Χ – Β, και υπάρχουν άπειρα διαφορετικά σημεία τέτοια ώστε Α – Β – Χ.*

Δραστηριότητα 3.1 Χρησιμοποιήστε την Ιδιότητα 3.1 για να αποδείξετε το Θεώρημα 3.2.

Δραστηριότητα 3.2 Χρησιμοποιώντας μόνο τις προηγούμενες ιδιότητες, δείξτε οτι υπάρχουν άπειρες (διαφορετικές) ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α.

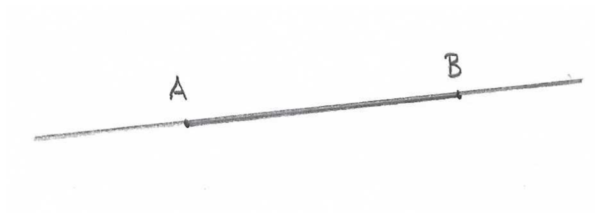
Ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες

Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β σε μία ευθεία ε. Το **ευθύγραμμο τμήμα** ΑΒ είναι το σύνολο των σημείων Χ της ε τα οποία βρίσκονται μεταξύ του Α και του Β, μαζί με τα σημεία Α και Β.

Η **ημιευθεία** της ε με κορυφή στο Α που περιέχει το Β συμβολίζεται επίσης ΑΒ και είναι το σύνολο των σημείων Χ της ε για τα οποία το Α δεν βρίσκεται μεταξύ του Β και του Χ, μαζί με το σημείο Α.

Από τα συμφραζόμενα καταλαβαίνουμε εάν αναφερόμαστε στην ευθεία ΑΒ, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ή την ημιευθεία ΑΒ.

διατεταγμένη τριάδα (Α, Β, Γ) ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{M}$.



Σχῆμα 3.1: Ευθύγραμμο τμήμα.

Σχῆμα 3.2: Ημιευθεία.

Θεώρημα 3.5 *Ένα σημείο A σε μία ευθεία ε χωρίζει την ε σε δύο ημιευθείες που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το A.*

Δραστηριότητα 3.3 Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες, δείξτε οτι στην ευθεία ε βρίσκονται σημεία Β και Γ τέτοια ώστε $B-A-\Gamma$. Δείξτε οτι τότε οι ημιευθείες ΑΒ και ΑΓ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Α, και οτι κάθε σημείο της ε βρίσκεται είτε στην ΑΒ είτε στην ΑΓ.

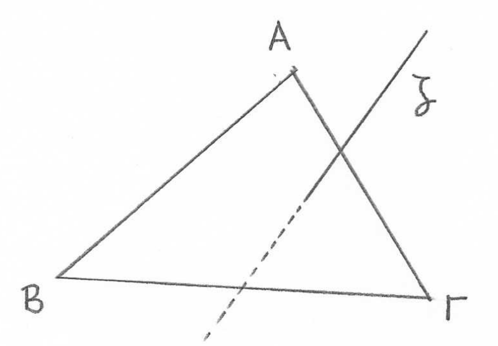
Παρατηρούμε οτι ΑΒ και ΒΑ συμβολίζουν το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα αλλά διαφορετικές ημιευθείες.

Τρίγωνο λέγεται το σχήμα του επιπέδου που αποτελείται από τρία σημεία Α, Β και Γ που δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία, και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι οι **κορυφές** του τριγώνου, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ είναι οι **πλευρές** του τριγώνου.

Ιδιότητα 3.6 ***Αξίωμα του Pasch.*** *Θεωρούμε ένα τρίγωνο και μία ευθεία ζ που δεν διέρχεται από καμία κορυφή του τριγώνου. Εάν η ζ τέμνει μία πλευρά του τριγώνου, τότε η ζ τέμνει και μία άλλη από τις πλευρές του τριγώνου.*

Λέμε οτι δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία ε, βρίσκονται στην **ίδια μεριά** της ευθείας ε εάν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν έχει κοινό σημείο με την ε.

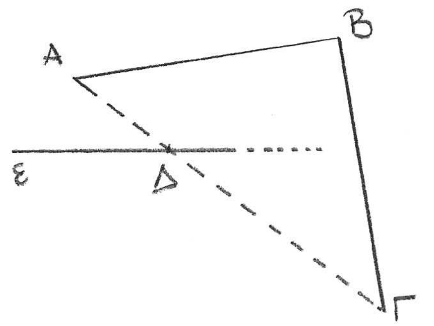
Πρόταση 3.7 *Η σχέση "τα σημεία A και B βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας ε" έχει τη μεταβατική ιδιότητα. Δηλαδή εάν A και B βρίσκονται στην ίδια μεριά, και*



Σχῆμα 3.3: Το αξίωμα του Pasch.

B και Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά, τότε ισχύει επίσης οτι A και Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας ε.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ευθεία ε και το σημείο Β που δεν ανήκει στην ε. Υποθέτουμε οτι το σημείο Α και το σημείο Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε με το Β. Αυτό σημαίνει οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ δεν έχουν κοινό σημείο με την ε. Θα δείξουμε οτι τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ δεν έχει κοινό σημείο με την ε.



Σχῆμα 3.4: Μεταβατικότητα.

Υποθέτουμε οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η ευθεία ε δεν διέρχεται από καμία κορυφή του τριγώνου, και τέμνει την πλευρά ΑΓ. Από το Αξίωμα Pasch, η ευθεία έχει κοινό σημείο με μία ακόμη πλευρά του τριγώνου, την ΒΑ ή την ΒΓ. 'τοπο, αφού υποθέσαμε οτι το σημείο Α και το σημείο Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε με το Β.

□

Από το Αξίωμα Pasch, μία ευθεία που δεν διέρχεται από μία κορυφή του τριγώνου, δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία και με τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Συμπεραίνουμε οτι εάν Β και Α δεν βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε, και Β και Γ δεν βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε, τότε Α και Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε. Αυτό συνεπάγεται οτι τα σημεία του επιπέδου που δεν βρίσκονται στην ε, χωρίζονται σε δύο **ημιεπίπεδα**. Εάν Β είναι σημείο που δεν ανήκει στην ε, το ημιεπίπεδο της ε που περιέχει το Β αποτελείται από όλα τα σημεία Χ με την ιδιότητα: το ευθύγραμμο τμήμα ΒΧ δεν έχει κοινό σημείο με την ε, ενώ το ημιεπίπεδο της ε που δεν περιέχει το Β αποτελείται από όλα τα σημεία Ψ με την ιδιότητα: το Ψ δεν βρίσκεται στην ε και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΨ έχει κοινό σημείο με την ε. Η Πρόταση 3.7 συνεπάγεται οτι ο διαχωρισμός των σημείων του επιπέδου που δεν ανήκουν στην ε σε δύο ημιεπίπεδα, δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Β.

Καταγράφουμε χωρίς απόδειξη και το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.8 *Εάν Α και Β βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε, τότε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Εάν Α και Γ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ε, τότε το σημείο τομής της ε και της ΑΓ βρίσκεται μεταξύ του Α και του Γ.*

□

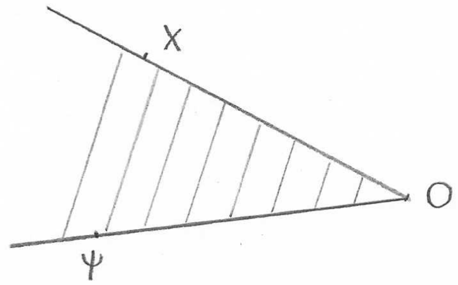
Ιδιότητα 3.9 *Στο σύνολο όλων των ευθύγραμμων τμημάτων του επιπέδου, ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας που ονομάζουμε* ***επιθεσιμότητα*** *(congruency) ή* ***ισότητα*** *και συμβολίζουμε $AB \equiv \Gamma\Delta$, με τις ιδιότητες*

- *Εάν ΑΒ είναι ευθύγραμμο τμήμα, Γ είναι σημείο και ε ευθεία που διέρχεται από το Γ, τότε στην ε βρίσκονται ακριβώς δύο σημεία, Δ και Δ', τέτοια ώστε $AB \equiv \Gamma\Delta$ και $AB \equiv \Gamma\Delta'$. Τότε Γ βρίσκεται μεταξύ του Δ και του Δ'.*

- *Υποθέτουμε οτι το σημείο Β βρίσκεται μεταξύ των Α και Γ και στην ίδια ή σε διαφορετική ευθεία το σημείο B' βρίσκεται μεταξύ των A' και Γ'. Εάν $AB \equiv A'B'$ και $B\Gamma \equiv B'\Gamma'$, τότε $A\Gamma \equiv A'\Gamma'$.*

Η δεύτερη ιδιότητα της επιθεσιμότητας ευθυγράμμων τμημάτων λέει οτι η συγκόλλη-ση ευθυγράμμων τμημάτων είναι καλά ορισμένη.

Θεωρούμε τρία σημεία Ο, Χ και Ψ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. **Γωνία** ή **κυρτή γωνία** ∠ΧΟΨ είναι το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιευθείες με κοινή κορυφή, ΟΧ και ΟΨ και τα σημεία Α του επιπέδου με τις ιδιότητες: το Α και η ημιευθεία ΟΧ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας ΟΨ, και το Α και η ημιευθεία ΟΨ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας ΟΧ. Τα σημεία Α με αυτές τις ιδιότητες αποτελούν το **εσωτερικό** της γωνίας ∠ΧΟΨ. Το σημείο Ο είναι η **κορυφή** της



Σχῆμα 3.5: Γωνία, πλευρές, εσωτερικό.

γωνίας, και οι ημιευθείες ΟΧ, ΟΨ είναι οι **πλευρές** της γωνίας. Παρατηρούμε οτι ∠ΧΟΨ και ∠ΨΟΧ συμβολίζει την ίδια γωνία.

Δραστηριότητα 3.4 Θεωρήστε γωνία ∠ΧΟΨ, σημείο Κ στην ημιευθεία ΟΧ και σημείο Λ στην ημιευθεία ΟΨ. Δείξτε οτι η γωνία ∠ΚΟΛ είναι η ίδια γωνία με την ∠ΧΟΨ.

Ιδιότητα 3.10 *Στο σύνολο των γωνιών του επιπέδου ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας που ονομάζουμε* ***επιθεσιμότητα*** *(congruency) ή* ***ισότητα*** *και συμβολίζουμε ∠ΧΟΨ ≡ ∠ΛΚΜ, με την ιδιότητα:*

- *Εάν ∠ΧΟΨ είναι γωνία και ΚΛ είναι ημιευθεία σε κάποια ευθεία ζ, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο ημιευθείες ΚΜ και ΚΜ', μία από κάθε μεριά της ΚΛ, τέτοιες ώστε ∠ΧΟΨ ≡ ∠ΛΚΜ και ∠ΧΟΨ ≡ ∠ΛΚΜ'.*

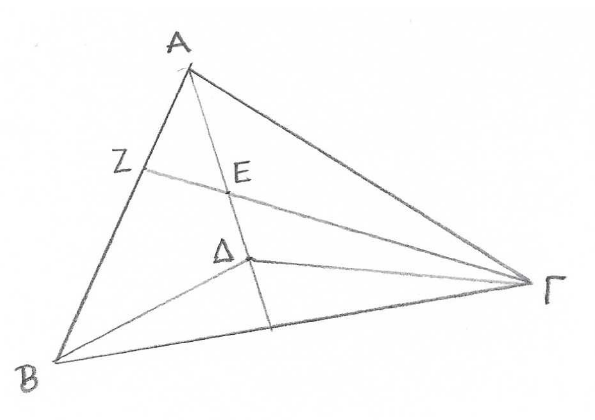
Γωνία δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ που έχουν κοινό άκρο το σημείο Α λέμε τη γωνία ∠ΒΑΓ που σχηματίζεται από τις ημιευθείες ΑΒ και ΑΓ.

Γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ λέμε τις γωνίες που σχηματίζονται σε κάθε κορυφή από τις πλευρές του τριγώνου. Η γωνία μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ λέγεται και γωνία στην κορυφή Α ή γωνία απέναντι στην πλευρά ΒΓ και συμβολίζεται ∠ΒΑΓ ή ∠Α.

Εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ είναι ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό και των τριών γωνιών του τριγώνου.

Συνέπεια του Αξιώματος Pasch είναι και η ακόλουθη Πρόταση, που είναι συχνά χρήσιμη για να συμπεράνουμε οτι δύο ευθείες τέμνονται.

Πρόταση 3.11 *Εάν Δ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε η ημιευθεία ΑΔ τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ του τριγώνου.*



Σχῆμα 3.6: Ημιευθεία από κορυφή και εσωτερικό σημείο.

Τα τρίγωνα ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες.

Ιδιότητα 3.12 *Αν σε δύο τρίγωνα* $AB\Gamma$ *και* $A'B'\Gamma'$ *ισχύουν οι σχέσεις επιθεσιμότητας των πλευρών* $AB \equiv A'B'$, $A\Gamma \equiv A'\Gamma'$ *και των γωνιών* $\angle BA\Gamma \equiv \angle B'A'\Gamma'$, *τότε ισχύουν και οι σχέσεις*

$$\angle AB\Gamma \equiv \angle A'B'\Gamma', \quad \angle A\Gamma B \equiv \angle A'\Gamma'B'.$$

Βλέπουμε οτι ουσιαστικά δεχόμαστε ένα μέρος του πρώτου κριτηρίου ισότητας τριγώνων ως αναπόδεικτη ιδιότητα. Με αυτόν τον τρόπο θα αποφύγουμε τη χρήση της ''εφαρμογής'' στην απόδειξη της Πρότασης δ′.

Προς το παρόν θα εφαρμόσουμε την Ιδιότητα 3.12 για να αποδείξουμε την ιδιότητα των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου.

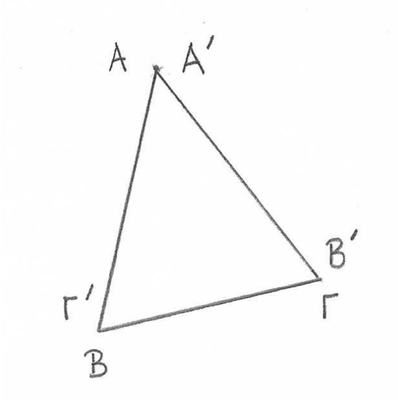
Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. **Βάση** ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι η πλευρά που δεν είναι ίση προς τις άλλες δύο. **Κορυφή** ισοσκελούς τριγώνου είναι η κορυφή που βρίσκεται απέναντι στη βάση του τριγώνου.

Ισόπλευρο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές ίσες.

Θεώρημα 3.13 *Εάν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.*

Απόδειξη.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{A'B'\Gamma'}$, όπου $\mathrm{A'} = \mathrm{A}$, $\mathrm{B'} = \Gamma$ και $\Gamma' = \mathrm{B}$. Αυτά έχουν δύο ίσες πλευρές, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'}$, και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A'}$. Από την Ιδιότητα 3.12



Σχήμα 3.7: Γωνίες ισοσκελούς τριγώνου.

έχουμε τις ίσες γωνίες $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}' = \angle \Gamma$.

□

Ειδικότερα, εάν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες είναι ίσες –αφού όποια πλευρά και να θεωρήσουμε ως βάση, οι άλλες δύο είναι ίσες.

Ιδιότητα 3.14 *Στο σύνολο των τριγώνων του επιπέδου ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας που ονομάζουμε* ***επιθεσιμότητα*** *(congruency) ή* ***ισότητα*** *και συμβολίζουμε* $AB\Gamma \equiv A'B'\Gamma'$. *Δύο τρίγωνα είναι επιθέσιμα εάν οι πλευρές τους είναι επιθέσιμες και οι αντίστοιχες γωνίες είναι επιθέσιμες,*

$$AB \equiv A'B', \quad A\Gamma \equiv A'\Gamma', \quad B\Gamma \equiv B'\Gamma',$$

$$\angle AB\Gamma \equiv \angle A'B'\Gamma', \quad \angle A\Gamma B \equiv \angle A'\Gamma'B', \quad \angle BA\Gamma \equiv \angle B'A'\Gamma'.$$

Οι σχέσεις επιθεσιμότητας ευθύγραμμων τμημάτων, γωνιών, τριγώνων και άλλων σχημάτων, στα ελληνικά αναφέρονται συνήθως ως **ισότητα** και συμβολίζονται με το σύμβολο της ισότητας. Στη συνέχεια των σημειώσεων θα ακολουθήσουμε αυτή την πρακτική. Για παράδειγμα θα λέμε οτι δύο επιθέσιμα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, και θα γράφουμε $\mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$.

Σχέσεις ανισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.

Θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τα οποία δεν είναι ίσα. Από την Ιδιότητα 3.9 υπάρχει μοναδικό σημείο Ε στην ημιευθεία ΑΒ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE} = \Gamma\Delta$. Αφού $\mathrm{AB} \neq \Gamma\Delta$, το Ε είναι διαφορετικό από το Β. Εάν Ε βρίσκεται μεταξύ του Α και του Β, $\mathrm{A}-\mathrm{E}-\mathrm{B}$, λέμε οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι **μικρότερο** από το ΑΒ, $\Gamma\Delta < \mathrm{AB}$.

Εάν B βρίσκεται μεταξύ του A και του E, A – B – E, λέμε οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι **μεγαλύτερο** από το AB, ΓΔ > AB.

Θεωρούμε γωνίες ∠ΧΟΨ και ∠ΛΚΜ οι οποίες δεν είναι ίσες. Από την Ιδιότητα 3.10 υπάρχει μοναδική ημιευθεία ΟΦ στην ίδια μεριά της ΟΨ με την ΟΧ, τέτοια ώστε ∠ΦΟΨ = ∠ΛΚΜ. Εάν η ΟΦ βρίσκεται στο εσωτερικό της ∠ΧΟΨ λέμε οτι η γωνία ∠ΛΚΜ είναι μικρότερη από την ∠ΧΟΨ, ∠ΛΚΜ < ∠ΧΟΨ. Εάν η ΟΧ βρίσκεται στο εσωτερικό της ∠ΦΟΨ λέμε οτι η γωνία ∠ΛΚΜ είναι μεγαλύτερη από την ∠ΧΟΨ, ∠ΛΚΜ > ∠ΧΟΨ.

Ασκήσεις

Ασκηση 3.5 Δείξτε οτι εάν Α και Β βρίσκονται στην ίδια μεριά της ε, τότε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Ασκηση 3.6 Εάν Α και Γ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ε, τότε το σημείο τομής της ε και της ΑΓ βρίσκεται μεταξύ του Α και του Γ.

Ασκηση 3.7 Δείξτε οτι η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία δ εάν και μόνον εάν κάθε ζεύγος σημείων της δ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

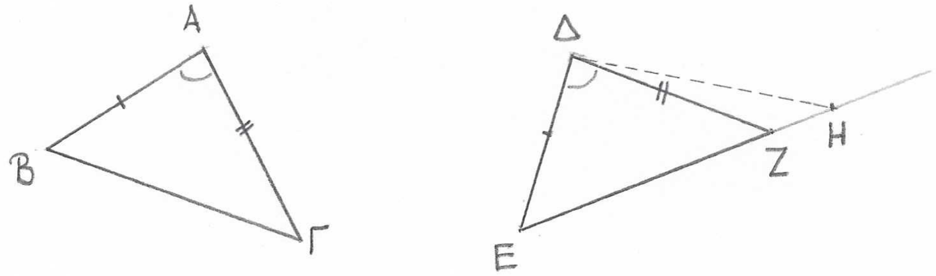
Ασκηση 3.8 Δείξτε οτι εάν Α και Β είναι σημεία στο εσωτερικό της (κυρτής) γωνίας ΧΟΨ, τότε κάθε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται στο εσωτερικό της ΧΟΨ.

Ασκηση 3.9 Δείξτε οτι εάν Χ και Ψ είναι εσωτερικά σημεία του τριγώνου ΑΒΓ, τότε κάθε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΧΨ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒΓ.

Κεφάλαιο 4

Τρίγωνα

Θεώρημα 4.1 (Πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΠΓΠ) *Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες, μία προς μία, με δύο από τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, και οι περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*



Σχῆμα 4.1: Πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΠΓΠ.

Απόδειξη. Η υπόθεση είναι οτι για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει οτι ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και οι γωνίες $\angle$ΒΑΓ = $\angle$ΕΔΖ. Το συμπέρασμα είναι οτι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, ΑΒΓ = ΔΕΖ, δηλαδή οτι ισχύουν και οι ισότητες $\angle$ΑΒΓ = $\angle$ΔΕΖ, $\angle$ΑΓΒ = $\angle$ΔΖΕ και ΒΓ = ΕΖ. Οι δύο πρώτες ισχύουν από την Ιδιότητα 3.12. Απομένει να δείξουμε οτι ΒΓ = ΕΖ.

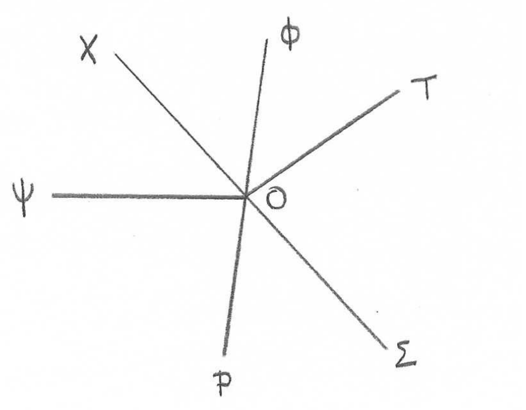
Υποθέτουμε οτι ΕΖ δεν είναι ίσο με το ΒΓ. Τότε υπάρχει σημείο Η στην ημιευθεία ΕΖ τέτοιο ώστε ΒΓ = ΕΗ. Εφαρμόζοντας την Ιδιότητα 3.12 στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΗ, στα οποία ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΗ και $\angle$ΑΒΓ = $\angle$ΔΕΗ, συμπεραίνουμε οτι $\angle$ΒΑΓ = $\angle$ΕΔΗ. Αλλά $\angle$ΒΑΓ = $\angle$ΕΔΖ. Άρα έχουμε δύο διαφορετικές ημιευθείες ΔΖ και ΔΗ στην ίδια μεριά της ΔΕ, που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τη ΔΕ, άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι ΒΓ = ΕΖ.

□

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** (ή διαδοχικές) εάν έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και τα εσωτερικά τους δεν έχουν κοινό σημείο. Δύο εφεξής γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** εάν οι μη κοινές πλευρές αποτελούν μία ευθεία.

Μία γωνία λέγεται **ορθή** εάν είναι επιθέσιμη με την παραπληρωματική της. Δύο ευθείες λέγονται **κάθετες** εάν τέμνονται και οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ τους είναι ορθές.

Δύο γωνίες $\angle$ΧΟΦ και $\angle$ΤΟΨ που έχουν κοινή κορυφή, λέγονται **κατά κορυφήν** εάν ΟΧ, ΟΤ είναι αντίθετες ημιευθείες μίας ευθείας, και ΟΦ, ΟΨ είναι αντίθετες ημιευθείες μίας άλλης ευθείας.



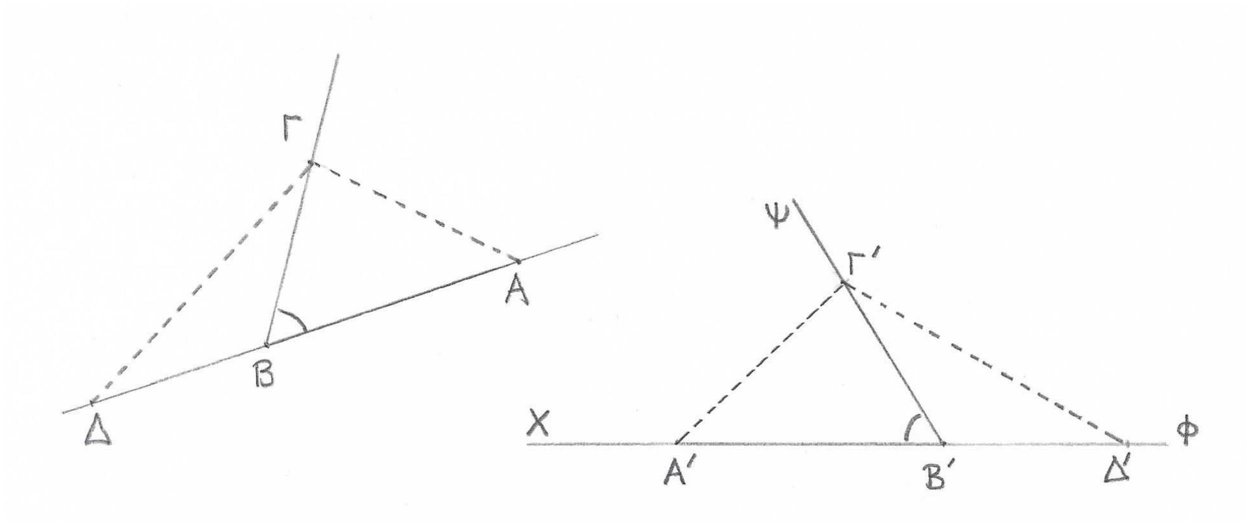
Σχήμα 4.2: Εφεξής, παραπληρωματικές και κατά κορυφή γωνίες.

Δραστηριότητα 4.1 Καταγράψτε όλα τα ζεύγη εφεξής γωνιών, παραπληρωματικών γωνιών και κατά κορυφή γωνιών στο Σχήμα 4.2

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων για να εξετάσουμε τις ιδιότητες παραπληρωματικών και κατά κορυφήν γωνιών.

Θεώρημα 4.2 *Εάν δύο γωνίες $\angle AB\Gamma$ και $\angle XB'\Psi$ είναι ίσες, οι παραπληρωματικές τους γωνίες $\angle \Gamma B\Delta$ και $\angle \Psi B'\Phi$ είναι επίσης ίσες.*

Απόδειξη. Λαμβάνουμε σημεία Α′, Γ′, Δ′ πάνω στις ημιευθείες Β′Χ, Β′Ψ και Β′Φ αντίστοιχα, τέτοια ώστε Β′Α′ = ΒΑ, Β′Γ′ = ΒΓ και Β′Δ′ = ΒΔ. Από το πρώτο κριτήριο τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, άρα ΑΓ = Α′Γ′ και $\angle$ΒΑΓ = $\angle$Β′Α′Γ′. Φέρουμε τις ΓΔ και Γ′Δ′. Από τον ορισμό της ισότητας ευθύγραμμων τμημάτων ΑΔ = Α′Δ′. Από το πρώτο κριτήριο, τα τρίγωνα ΓΑΔ και Γ′Α′Δ′ είναι ίσα. Άρα ΓΔ = Γ′Δ′ και $\angle$ΒΔΓ = $\angle$Β′Δ′Γ′ είναι ίσες. Τέλος, από το πρώτο κριτήριο, τα τρίγωνα ΒΔΓ και



Σχήμα 4.3: Παραπληρωματικές ίσων γωνιών είναι ίσες.

$B'\Delta'\Gamma'$ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $\angle\Gamma B\Delta$ και $\angle\Gamma' B'\Delta'$ είναι ίσες.

□

Πόρισμα 4.3 *Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε γωνία $\angle AB\Gamma$ και τις προεκτάσεις BX της ημιευθείας BA και $B\Psi$ της $B\Gamma$. Η γωνία $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματική της ΓBX. Η γωνία $XB\Psi$ είναι επίσης παραπληρωματική της ΓBX. Από το Θεώρημα 4.2, $\angle XB\Psi = \angle AB\Gamma$.

□

Το ακόλουθο Θεώρημα θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το άθροισμα δύο γωνιών.

Θεώρημα 4.4 *Θεωρούμε ημιευθείες AB, $A\Gamma$ και σημείο Δ εσωτερικό της γωνίας $\angle BA\Gamma$. Εάν οι ημιευθείες $A'B'$, $A'\Gamma'$ σχηματίζουν γωνία $\angle B'A'\Gamma'$ ίση με την $\angle BA\Gamma$, τότε υπάρχει ημιευθεία $A'X$ στο εσωτερικό της $\angle B'A'\Gamma'$ τέτοια ώστε $\angle BA\Delta = \angle B'A'X$ και $\angle \Delta A\Gamma = \angle XA'\Gamma'$.*

□

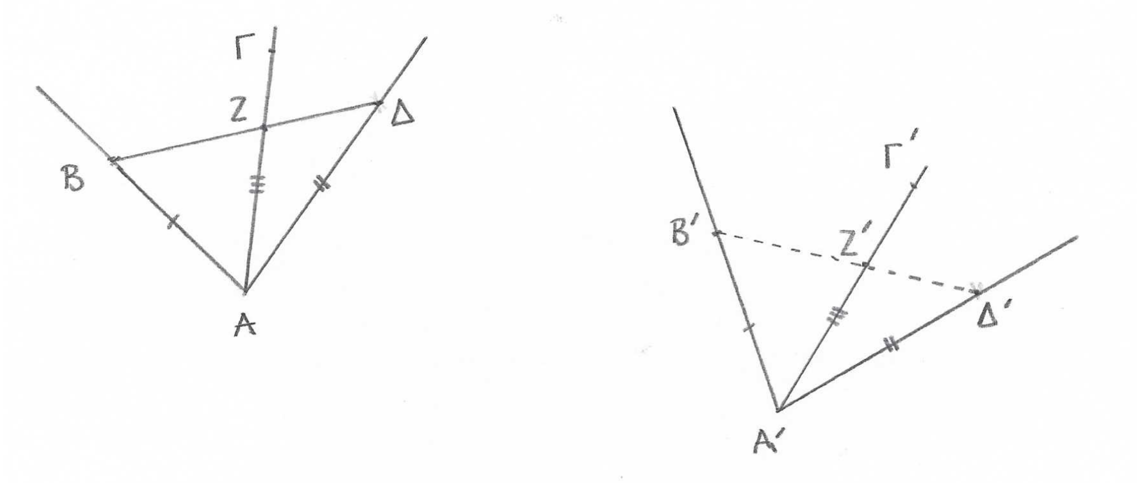
Δραστηριότητα 4.2 Αποδείξτε το Θεώρημα 4.4. Πρώτα σχεδιάστε το κατάλληλο σχήμα.

Υπόδειξη: Επιλέξτε τα B, Γ έτσι ώστε $B-\Delta-\Gamma$, και τα B', Γ' έτσι ώστε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ να είναι ίσα.

Θεώρημα 4.5 *Θεωρούμε ημιευθείες AB, $A\Gamma$, $A\Delta$, $A'B'$, $A'\Gamma'$, $A'\Delta'$ και τις κυρτές γωνίες $\angle BA\Gamma$, $\angle \Gamma A\Delta$, $\angle BA\Delta$, $\angle B'A'\Gamma'$, $\angle \Gamma'A'\Delta'$, $\angle B'A'\Delta'$. Εάν $\angle BA\Gamma = \angle B'A'\Gamma'$ και $\angle \Gamma A\Delta = \angle \Gamma'A'\Delta'$, τότε $\angle BA\Delta = \angle B'A'\Delta'$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε τα Β, Β$'$, Δ, Δ$'$ έτσι ώστε ΑΒ = Α$'$Β$'$ και ΑΔ = Α$'$Δ$'$.

Αρχικά υποθέτουμε οτι η ημιευθεία ΑΓ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ∠ΒΑΔ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Λαμβάνουμε σημείο Ζ$'$ στην Α$'$Γ$'$ τέτοιο ώστε ΑΖ = Α$'$Ζ$'$, Σχήμα 4.4.



Σχῆμα 4.4: Η ΑΓ βρίσκεται στο εσωτερικό της ∠ΒΑΔ.

Χρησιμοποιώντας το πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων βρίσκουμε οτι ∠ΑΒΖ = ∠Α$'$Β$'$Ζ$'$, ∠ΑΖΔ = ∠Α$'$Ζ$'$Δ$'$ και ∠ΑΖΒ = ∠Α$'$Ζ$'$Β$'$. Η ∠ΑΖΒ είναι παραπληρωματική της ∠ΑΖΔ. Από το Θεώρημα 4.2 η ∠Α$'$Ζ$'$Δ$'$ είναι ίση με την παραπληρωματική της ∠Α$'$Ζ$'$Δ$'$. Συμπεραίνουμε οτι η Ζ$'$Β$'$ και η Ζ$'$Δ$'$ είναι αντίθετες ημιευθείες της ίδιας ευθείας. Άρα ∠ΑΒΔ = ∠ΑΒΖ και ∠Α$'$Β$'$Δ$'$ = ∠Α$'$Β$'$Ζ$'$, συνεπώς ∠ΑΒΔ = ∠Α$'$Β$'$Δ$'$.

Στις ευθείες ΒΔ και Β$'$Δ$'$ έχουμε ΒΔ = ΒΖ + ΖΔ, Β$'$Δ$'$ = Β$'$Ζ$'$ + Ζ$'$Δ$'$, άρα ΒΔ = Β$'$Δ$'$.

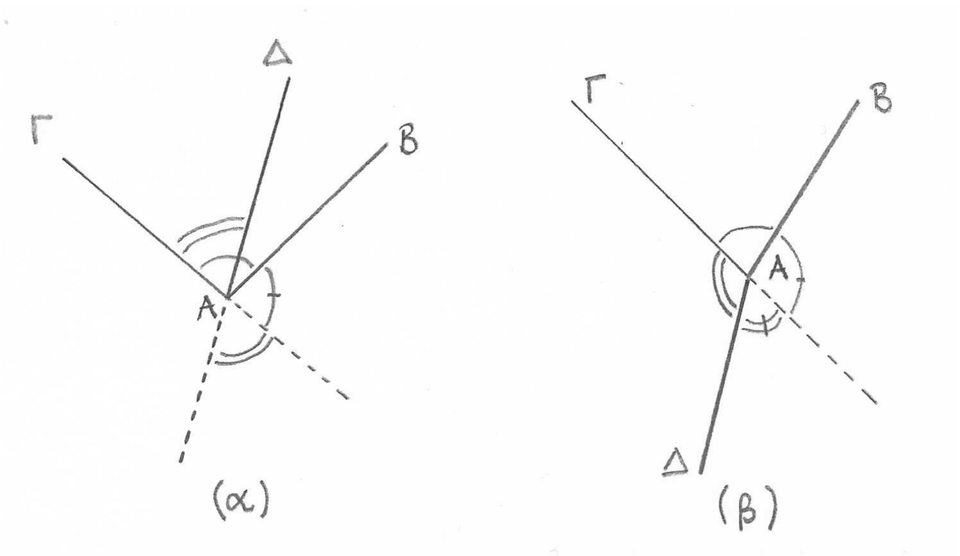
Από το πρώτο κριτήριο ισότητας, τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α$'$Β$'$Δ$'$ είναι ίσα. Άρα ∠ΒΑΔ = ∠Β$'$Α$'$Δ$'$.

Εάν ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ∠ΒΑΓ, και οι τρεις ημιευθείες βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, Σχήμα 4.5.α, θεωρούμε τις παραπληρωματικές γωνίες των ∠ΒΑΓ και ∠ΒΑΔ και την κατά κορυφή γωνία της ∠ΓΑΔ, και χρησιμοποιούμε το θεώρημα 4.2 και το Πόρισμα 4.3.

Εάν οι τρεις ημιευθείες δεν βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, Σχήμα 4.5.β, θεωρούμε τις παραπληρωματικές γωνίες των ∠ΒΑΓ και ∠ΓΑΔ, και χρησιμοποιούμε το θεώρημα 4.2.

□

Θεωρούμε γωνίες ∠ΧΟΨ και ∠ΧΟΦ που έχουν μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Εάν η ημιευθεία ΟΧ βρίσκεται στο εσωτερικό της ∠ΨΟΦ,



Σχῆμα 4.5: Η ΑΓ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της $\angle$ΒΑΔ.

η γωνία $\angle\Psi O\Phi$ λέγεται **άθροισμα** των γωνιών $\angle X O\Psi$ και $\angle XO\Phi$ και συμβολίζεται $\angle XO\Psi + \angle XO\Phi$, Σχήμα 4.6.α. Εάν η ημιευθεία ΟΧ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\angle\Psi O\Phi$, λέμε οτι το άθροισμα των $\angle XO\Psi$ και $\angle XO\Phi$ ξεπερνά τις δύο ορθές κατά γωνία $\angle\Phi O\Psi'$, και γράφουμε $\angle XO\Psi + \angle XO\Phi = 2\llcorner + \angle\Phi O\Psi'$, Σχήμα 4.6.β.

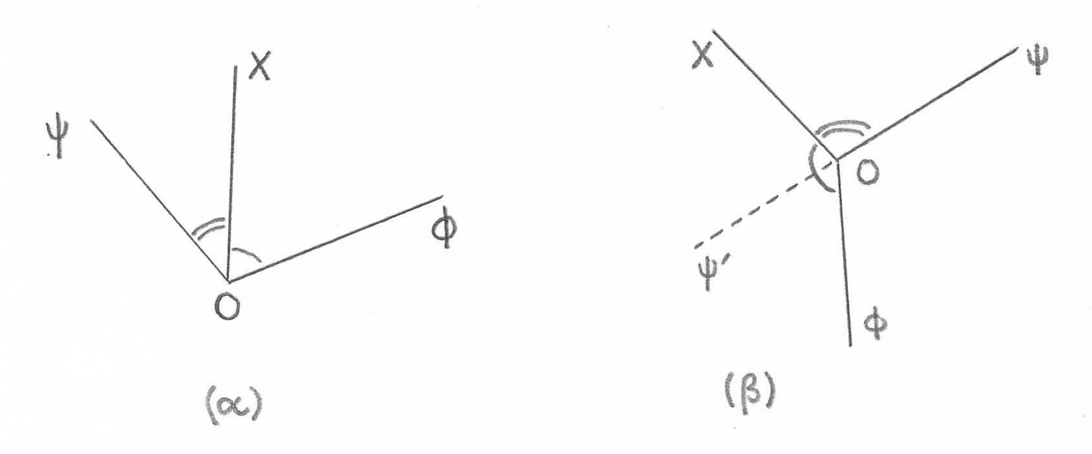
Για δύο γωνίες $\angle XO\Psi$ και $\angle\Lambda KM$ θεωρούμε τη μοναδική ημιευθεία OM' η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της ΟΧ που δεν περιέχει το Ψ, τέτοια ώστε $\angle XOM' = \angle\Lambda KM$. Ορίζουμε το **άθροισμα** των γωνιών $\angle XO\Psi$ και $\angle\Lambda KM$, $\angle XO\Psi + \angle\Lambda KM = \angle XO\Psi + \angle XOM'$. Το Θεώρημα 4.5 εξασφαλίζει οτι το άθροισμα γωνιών είναι καλά ορισμένο.

Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα περισσότερων γωνιών, που μπορεί να είναι ίσο ή να ξεπερνάει κάποιο πολλαπλάσιο των δύο ορθών. Στο Σχήμα 4.7, $\angle TOX + \angle XO\Psi + \angle\Psi OT = 4\llcorner$ ενώ $\angle TOX + \angle XO\Psi + \angle\Psi O\Phi = 4\llcorner + \angle TO\Phi$.

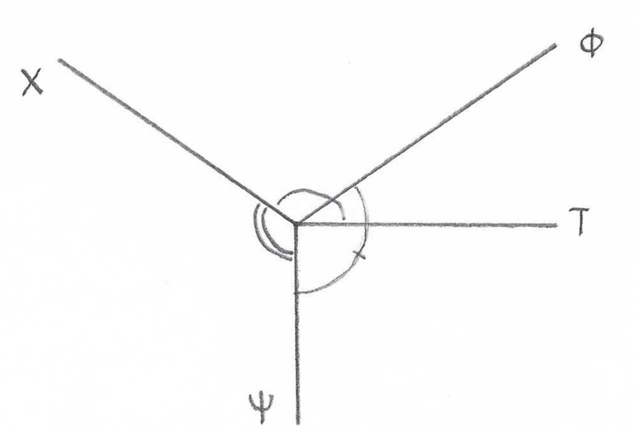
Θεώρημα 4.6 (Δεύτερο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΓΠΓ) *Αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου, και οι προσκείμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

Απόδειξη. Η υπόθεση είναι οτι για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει οτι ΒΓ = ΕΖ, και οι γωνίες $\angle B = \angle E$, $\angle\Gamma = \angle Z$. Το συμπέρασμα είναι οτι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, ΑΒΓ = ΔΕΖ.

Πάνω στην ημιευθεία ΒΑ λαμβάνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΘ ίσο με το ΕΔ. Τότε το τρίγωνο ΘΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ, από το πρώτο κριτήριο. Άρα έχουμε τις ισότητες γωνιών $\angle B\Gamma\Theta = \angle EZ\Delta = \angle B\Gamma A$. Αφού οι ημιευθείες ΓΑ και ΓΘ βρίσκονται



Σχῆμα 4.6: 'θροισμα δύο γωνιών.



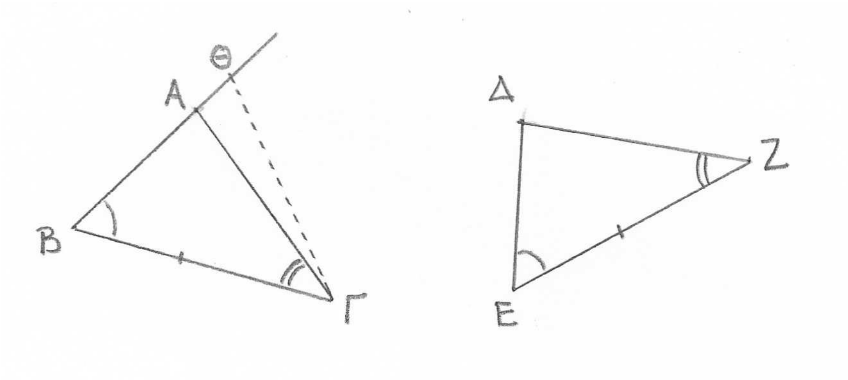
Σχῆμα 4.7: 'θροισμα περισσότερων γωνιών.

στην ίδια μεριά της ευθείας ΒΓ, από την Ιδιότητα 3.10 συμπίπτουν, και τα σημεία Θ και Α ταυτίζονται.

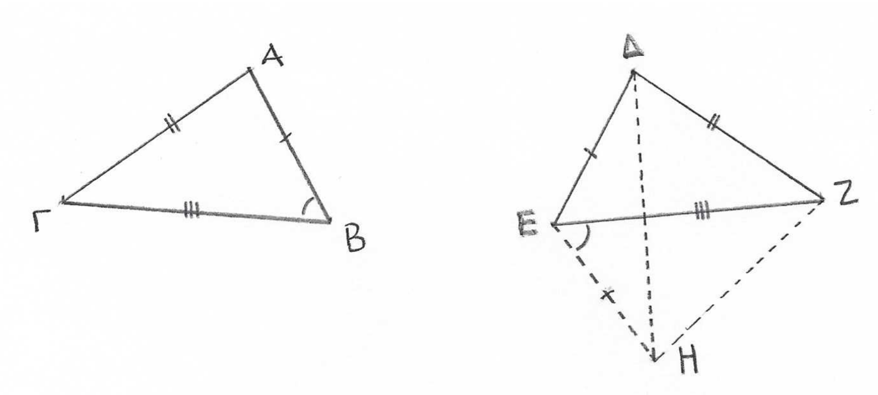
□

Θεώρημα 4.7 (Τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΠΠΠ) *Αν οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου είναι μία προς μία ίσες με τις τρεις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

Απόδειξη. Η υπόθεση είναι οτι για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει οτι ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ, και ΑΓ = ΑΖ. Το συμπέρασμα είναι οτι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, ΑΒΓ = ΔΕΖ. Αρκεί να δείξουμε οτι μία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση προς την αντίστοιχη γωνία του τριγώνου ΔΕΖ.



Σχήμα 4.8: Δεύτερο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΓΠΓ.



Σχήμα 4.9: Τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, ΠΠΠ.

Φέρουμε ημιευθεία ΕΗ τέτοια ώστε το Η βρίσκεται στην άλλη μεριά της ΖΕ από το Δ και ισχύουν ∠ΖΕΗ = ∠ΓΒΑ και ΕΗ = ΒΑ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΕΖ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο ίσες πλευρές, ΕΗ = ΒΑ και ΕΖ = ΒΓ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Άρα ΗΖ = ΑΓ. Από υπόθεση, ΑΓ = ΔΖ και ΑΒ = ΔΕ.

Εάν το σημείο Ζ δεν ταυτίζεται με το σημείο τομής της ΔΗ και της ΕΖ, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο ΔΗΖ, άρα ∠ΖΔΗ = ∠ΖΗΔ. Εάν και το σημείο Ε δεν ταυτίζεται με το σημείο τομής της ΔΗ και της ΕΖ, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο ΔΗΕ, άρα ∠ΕΔΗ = ∠ΕΗΔ. Θεωρούμε τις ημιευθείες ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ και ΔΗ, ΔΕ, ΔΖ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.5 έχουμε ∠ΕΗΖ = ∠ΕΔΖ.

Εάν η ευθεία ΔΗ ταυτίζεται με την ΔΖ, τότε Η δεν βρίσκεται στην ΔΕ, και το τρίγωνο ΗΕΔ είναι ισοσκελές, άρα ∠ΕΗΔ = ∠ΕΔΗ, δηλαδή ∠ΕΗΖ = ∠ΕΔΖ. Παρόμοια εάν η ευθεία ΔΗ ταυτίζεται με την ΔΕ.

Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε οτι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσες γωνίες,

$\angle A = \angle \Delta$.

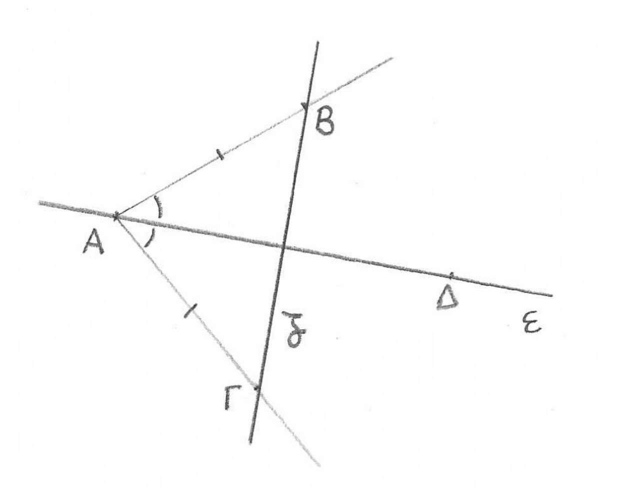
□

Ύπαρξη καθέτων

Ορίσαμε την ορθή γωνία ως μία γωνία που είναι ίση με την παραπληρωματική της. Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι υπάρχουν ορθές γωνίες, και οτι είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

Θεώρημα 4.8 *Υπάρχουν ορθές γωνίες.*

Συγκεκριμένα, για κάθε ευθεία ε και κάθε σημείο B που δεν ανήκει στην ε, υπάρχει ευθεία ζ η οποία διέρχεται από το B και τέμνει την ε σχηματίζοντας ορθή γωνία.

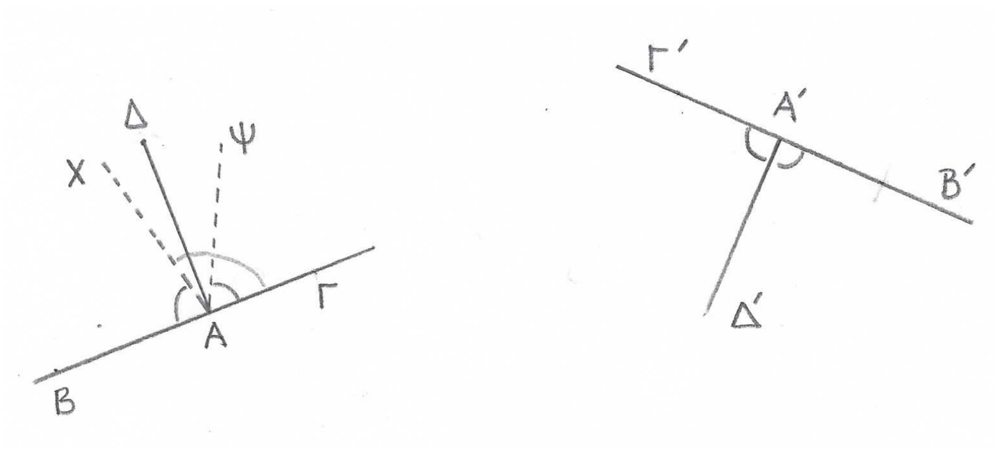


Σχῆμα 4.10: Ύπαρξη κάθετης από σημείο εκτός της ευθείας.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο Α στην ε και ημιευθεία ΑΔ της ε. Υπάρχει σημείο Γ στην άλλη μεριά της ε από το Β, τέτοιο ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ = ΑΒ και η ημιευθεία ΑΓ σχηματίζει με την ΑΔ γωνία $\angle \Gamma A \Delta = \angle B A \Delta$. Αφού τα Β και Γ βρίσκονται σε διαφορετική μεριά της ε, το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ορίζει μία ευθεία ζ η οποία τέμνει την ε σε ένα σημείο Ζ. Αν το Ζ συμπίπτει με το Α, τότε οι γωνίες $\angle B Z \Delta$, $\angle \Gamma Z \Delta$ είναι ίσες και παραπληρωματικές, άρα είναι ορθές. Αν το Ζ είναι διαφορετικό από το Α, τότε τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΑΖΓ είναι ίσα, από το πρώτο κριτήριο, και οι γωνίες $\angle AZB$, $\angle AZ\Gamma$ είναι ίσες και παραπληρωματικές, άρα είναι ορθές.

□

Θεώρημα 4.9 *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.*



Σχήμα 4.11: Ισότητα ορθών γωνιών.

Απόδειξη. Θεωρούμε γωνία $\angle\mathrm{B A \Delta}$ ίση με την παραπληρωματική της $\angle\Gamma\mathrm{A}\Delta$ και γωνία $\angle\mathrm{B'A'\Delta'}$ ίση με την παραπληρωματική της $\angle\Gamma'\mathrm{A'}\Delta'$. Υποθέτουμε οτι $\angle\mathrm{B'A'\Delta'}$ δεν είναι ίση με την $\angle\mathrm{BA\Delta}$.

Λαμβάνουμε γωνία $\angle\mathrm{BAX}$ ίση με την $\angle\mathrm{B'A'\Delta'}$, στην ίδια μεριά της ΒΓ με την $\angle\mathrm{BA\Delta}$. Υποθέτουμε οτι το Χ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\angle\mathrm{BA\Delta}$. Οι γωνίες $\angle\Gamma\mathrm{AX}$ και $\angle\Gamma'\mathrm{A'}\Delta'$ είναι ίσες, ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. Αλλά $\angle\Gamma'\mathrm{A'}\Delta' = \angle\mathrm{B'A'\Delta'} = \angle\mathrm{BAX}$. Άρα $\angle\Gamma\mathrm{AX} = \angle\mathrm{BAX}$.

Αφού οι γωνίες $\angle\mathrm{BA\Delta}$ και $\angle\Gamma\mathrm{A}\Delta$ είναι ίσες, από το Θεώρημα 4.4 υπάρχει ημιευθεία ΑΨ στο εσωτερικό της $\angle\Gamma\mathrm{A}\Delta$ τέτοια ώστε $\angle\Gamma\mathrm{A}\Psi = \angle\mathrm{BAX}$ και $\angle\Delta\mathrm{A}\Psi = \angle\Delta\mathrm{AX}$.

Έχουμε δείξει οτι $\angle\Gamma\mathrm{AX} = \angle\mathrm{BAX} = \angle\Gamma\mathrm{A}\Psi$. Δηλαδή έχουμε δύο διαφορετικές ημιευθείες στην ίδια μεριά της ΑΓ που σχηματίζουν ίσες γωνίες, άτοπο.

□

Πόρισμα 4.10 *Από κάθε σημείο Α μίας ευθείας ε διέρχεται μοναδική ευθεία ζ κάθετη στην ε.*

Απόδειξη. Έχουμε δει οτι υπάρχει ορθή γωνία $\angle\mathrm{XO}\Psi$. Θεωρούμε ημιευθεία ΑΔ της ε. Απο την Ιδιότητα 3.10 υπάρχουν ακριβώς δύο ημιευθείες ΑΒ και $\mathrm{AB'}$ που σχηματίζουν με την ΑΔ γωνία ίση με την $\angle\mathrm{XO}\Psi$. Αφού η $\angle\mathrm{XO}\Psi$ είναι ορθή, οι δύο ημιευθείες ανήκουν στην ίδια ευθεία ζ η οποία είναι κάθετη στην ε στο σημείο Α.

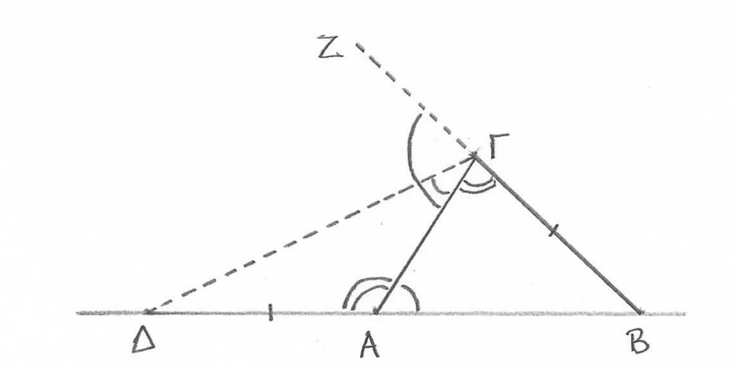
□

Μία γωνία λέγεται **οξεία** εάν είναι μικρότερη από μία ορθή. Μία γωνία λέγεται **αμβλεία** εάν είναι μεγαλύτερη από μία ορθή.

Ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνα

Η παραπληρωματική μίας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται και **εξωτερική** γωνία του τριγώνου.

Θεώρημα 4.11 *Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.*



Σχήμα 4.12: Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την ΒΑ και λαμβάνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε Β−Α−Δ. Θα συγκρίνουμε την εξωτερική γωνία ∠ΔΑΓ και την απέναντι εσωτερική γωνία ∠ΑΓΒ χρησιμοποιώντας την αρχή της τριχοτομίας. Θα δείξουμε οτι οι υποθέσεις ∠ΔΑΓ = ∠ΑΓΒ και ∠ΔΑΓ < ∠ΑΓΒ οδηγούν σε άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι ισχύει ∠ΔΑΓ > ∠ΑΓΒ.

Επιλέγουμε το σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ = ΓΒ. Υποθέτουμε οτι ∠ΔΑΓ = ∠ΑΓΒ και λαμβάνουμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ έτσι ώστε τα Δ και Ζ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ΑΓ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΑ είναι ίσα αφού έχουν κοινή την ΑΓ, ίσες τις ΑΔ = ΓΒ και ίσες τις περιεχόμενες γωνίες. Άρα ισχύει και ∠ΓΑΒ = ∠ΑΓΔ.

Επίσης η ∠ΓΑΒ είναι παραπληρωματική της ∠ΔΑΓ, και η ∠ΑΓΖ είναι παραπληρωματική της ∠ΑΓΒ. Αφού ∠ΔΑΓ = ∠ΑΓΒ, από το Θεώρημα 4.2, ∠ΓΑΒ = ∠ΑΓΖ.

Δείξαμε οτι από την υπόθεση ∠ΔΑΓ = ∠ΑΓΒ καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι ∠ΑΓΔ = ∠ΑΓΖ. Αφού τα Δ και Ζ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ΑΓ, τα σημεία Γ, Δ, Ζ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και συνεπώς τα Α, Β, Γ βρίσκονται στην ίδα ευθεία, άτοπο.

Τώρα υποθέτουμε οτι ∠ΔΑΓ < ∠ΑΓΒ. Τότε υπάρχει ημιευθεία ΓΧ στο εσωτερικό της γωνίας ∠ΑΓΒ, η οποία σχηματίζει με τη ΓΑ γωνία ίση με τη ΔΑΓ. Θεωρούμε το σημείο Ζ στο οποίο η ΓΧ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε στο τρίγωνο ΑΓΖ η εσωτερική γωνία ∠ΑΓΖ είναι ίση με την εξωτερική γωνία ∠ΓΑΔ, που δείξαμε οτι οδηγεί σε άτοπο.

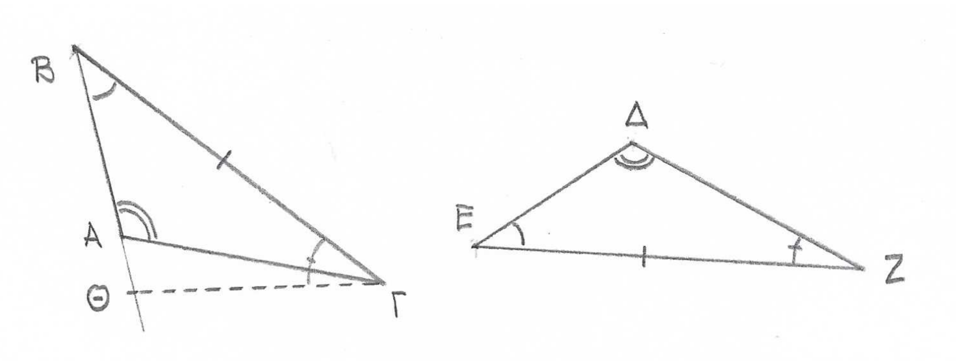
□

Πόρισμα 4.12 *Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία αμβλεία γωνία.*

□

Θα αποδείξουμε ένα Τέταρτο κριτήριο ισότητας τριγώνων: εάν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση, και δύο από τις τρεις γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα. Στις συνήθεις παρουσιάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας το απότέλεσμα αυτό θεωρείται απλή συνέπεια Δεύτερου κριτήριου και του Θεωρήματος για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Το ενδιαφέρον όμως είναι οτι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει και σε μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, όπου το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι σταθερό.

Θεώρημα 4.13 (Τέταρτο κριτήριο ισότητας τριγώνων.) *Εάν μία πελυρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και μία από τις προσκείμενες γωνίες του ενός τριγώνου είναι ίση με μία προσκείμενη γωνία του άλλου τριγώνου, τα τρίγωνα είναι ίσα.*



Σχήμα 4.13: Τέταρτο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

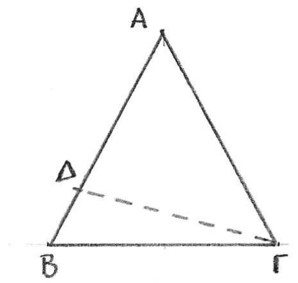
Απόδειξη. Η υπόθεση είναι οτι στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ΒΓ = ΕΖ, ∠Β = ∠Ε και ∠Α = ∠Δ. Το συμπέρασμα είναι οτι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, ΑΒΓ = ΔΕΖ. Θα δείξουμε οτι ∠Γ = ∠Ζ, οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από το δεύτερο κριτήριο.

Από το Γ φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με τη ΓΒ γωνία ίση με ∠Ζ, από την ίδια μεριά της ΓΒ με το Α. Αυτή τέμνει τη ΒΑ στο σημείο Θ, και από το δεύτερο κριτήριο, το τρίγωνο ΘΒΓ είναι ίσο με το ΔΕΖ. Άρα ∠ΒΑΓ = ∠ΒΘΓ. Εάν το σημείο Θ είναι διαφορετικό από το Α, μία εξωτερική γωνία του τριγώνου ΓΑΘ είναι ίση με μία από τις απέναντι εσωτερικές, άτοπο. Άρα το Θ συμπίπτει με το Α, και ∠ΒΓΑ = ∠ΕΖΔ.

□

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.11 μπορούμε να αποδείξουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.13 για τα ισοσκελή τρίγωνα.

Θεώρημα 4.14 *Αν σε ένα τρίγωνο δύο γωνίες είναι ίσες, τότε οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι σε αυτές τις γωνίες θα είναι ίσες.*



Σχήμα 4.14: Τρίγωνο με δύο ίσες γωνίες είναι ισοσκελές.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε οτι ∠Β = ∠Γ, και οτι ΑΒ ≠ ΑΓ. Έστω οτι ΑΒ > ΑΓ. Τότε στο ΑΒ υπάρχει σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, και από την Πρόταση 3.13, ∠ΑΔΓ = ∠ΑΓΔ. Επίσης, αφού το σημείο Δ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας ∠ΑΓΒ, η γωνία ∠ΑΓΔ είναι μικρότερη από την ∠ΑΓΒ. Άρα ∠Γ = ∠ΑΓΒ > ∠ΑΓΔ = ∠ΑΔΓ. Και αφού η ∠ΑΔΓ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΓΔ,

$$\angle\Gamma > \angle\mathrm{A}\Delta\Gamma > \angle\mathrm{B}\,,$$

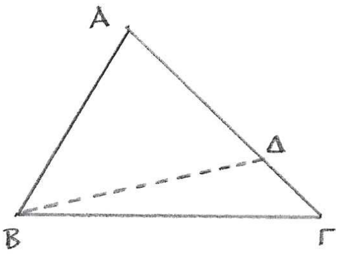
το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεση οτι ∠Β = ∠Γ.

□

Πόρισμα 4.15 *Εάν ένα τρίγωνο έχει τρεις ίσες γωνίες, τότε είναι ισόπλευρο.*

□

Θεώρημα 4.16 *Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία, και αντιστρόφως, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.*



Σχῆμα 4.15: Μεγαλύτερη πλευρά απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία.

Απόδειξη. Εάν ΑΓ > ΑΒ, τότε υπάρχει στο ΑΓ σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΒ. Αφού το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας ∠ΑΒΓ, ∠ΑΒΓ > ∠ΑΒΔ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ∠ΑΒΔ = ∠ΑΔΒ, ενώ ∠ΑΔΒ > ∠ΑΓΒ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΓΒ. Άρα

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{AB\Gamma} > \angle \mathrm{A\Gamma B} = \angle \Gamma\,.$$

Αντιστρόφως, εάν ∠Β > ∠Γ θα δείξουμε οτι ΑΓ > ΑΒ με τριχοτομία, δηλαδή θα δείξουμε οτι δεν μπορούν να ισχύουν οι σχέσεις ΑΓ = ΑΒ ή ΑΓ < ΑΒ.

Εάν ΑΓ = ΑΒ τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, και ∠Β = ∠Γ, αντίθετο με την υπόθεση. Εάν ΑΓ < ΑΒ τότε σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης, ∠Β < ∠Γ, πάλι αντίθετο με την υπόθεση. Συμπεραίνουμε οτι ΑΓ > ΑΒ.

□

Πρόταση 4.17 *Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Κάθε μία από τις γωνίες ∠Β και ∠Γ είναι μικρότερη από την παραπληρωματική της ∠Α. Άρα κάθε ένα από τα αθροίσματα ∠Α + ∠Β ή ∠Α + ∠Γ είναι μικρότερο από δύο ορθές.

□

Η ακόλουθη Πρόταση είναι χρήσιμη για να συγκρίνουμε ευθύγραμμα τμήματα. Λέει οτι η σχέση μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων από ένα σημείο Α προς δύο σημεία μιας ευθείας είναι η ίδια με τη σχέση μεταξύ των τμημάτων από το σημείο Δ όπου η κάθετη από το Α τέμνει την ευθεία.

Πρόταση 4.18 *Έστω οτι η ΑΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΧΨ, για σημείο Δ της ΧΨ. Τότε τα σημεία Β, Γ της ευθείας ΧΨ ικανοποιούν την ΔΒ < ΔΓ εάν και μόνον εάν ΑΒ < ΑΓ.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία ΔΨ. Οι γωνίες ∠ΑΒΔ και ∠ΑΓΔ είναι οξείες.

Εάν ΔΒ < ΔΓ, τότε Δ − Β − Γ, και στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία ∠ΑΒΓ είναι αμβλεία, ενώ η ∠ΑΓΒ είναι οξεία. Άρα η πλευρά ΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΑΒ.

Αντίστροφα, εάν ΑΒ < ΑΓ, από το προηγούμενο συμπεραίνουμε οτι ΔΒ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ΔΓ. Ούτε μπορεί να ισχύει ΔΓ = ΔΒ, γιατί τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ήταν ίσα. Συμπεραίνουμε οτι ΔΒ < ΔΓ.

□

Δραστηριότητα 4.3 Σχεδιάστε το Σχήμα για την απόδειξη της Πρότασης 4.18. Συμπληρώστε την απόδειξη για την περίπτωση που Β και Γ βρίσκονται σε διαφορετικές ημιευθείες ΔΧ, ΔΨ.

Δραστηριότητα 4.4 Δείξτε οτι η σχέση της Πρότασης 4.18 δεν ισχύει για σημεία της ευθείας ΧΨ διαφορετικά από το Δ. Βρείτε ένα σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΖ δεν είναι κάθετη στη ΧΨ και για το οποίο ΖΒ > ΖΓ αλλά ΑΒ < ΑΓ.

Ύπαρξη παραλλήλων ευθειών.

Το επόμενο Θεώρημα, σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 3.10, εξασφαλίζει οτι υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Θεώρημα 4.19 *Εάν οι ευθείες ε και ζ τέμνουν την ευθεία δ και σχηματίζουν ίσες γωνίες από την ίδια μεριά της ευθείας δ, τότε οι ε και ζ είναι παράλληλες.*

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε οτι Α, Β, Χ είναι σημεία της δ με Α − Β − Χ, και ε = ΑΦ, ζ = ΒΨ ευθείες, με Φ, Ψ από την ίδια μεριά της δ. Εάν ∠ΦΑΧ = ∠ΨΒΧ, τότε ε και ζ είναι παράλληλες.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι οι ευθείες ΑΦ και ΒΨ τέμνονται σε σημείο Τ. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΤ η εσωτερική γωνία ΤΑΒ είναι ίση με την εξωτερική ΤΒΧ, άτοπο.

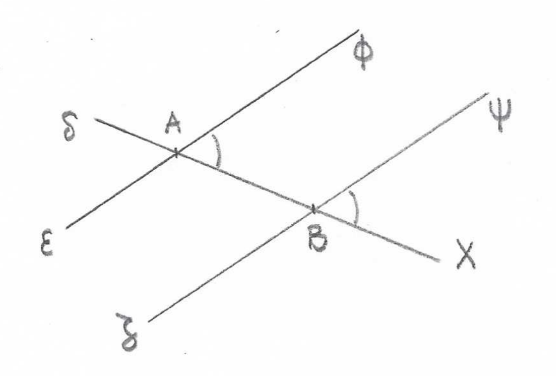
□

Πόρισμα 4.20 *Εάν οι ευθείες ε και ζ είναι κάθετες στην ευθεία δ, τότε οι ε και ζ είναι παράλληλες.*

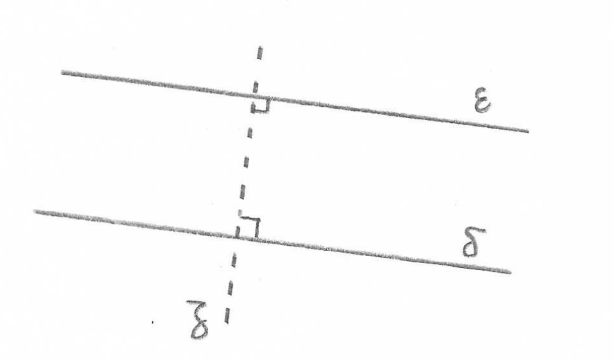
□

Πόρισμα 4.21 *Από σημείο Α που δεν βρίσκεται στην ευθεία δ, διέρχεται μόνο μία κάθετος προς τη δ.*

□



Σχῆμα 4.16: Παράλληλες ευθείες.



Σχῆμα 4.17: Παράλληλη από σημείο Α.

Θεώρημα 4.22 *Από σημείο Α που δεν βρίσκεται στην ευθεία δ, διέρχεται ευθεία ε παράλληλη προς τη δ.*

Απόδειξη. Από το Α διέρχεται ευθεία ζ κάθετος προς τη δ. Από το σημείο Α διέρχεται ευθεία ε κάθετος προς τη ζ. Η ε και η δ είναι και οι δύο κάθετες στη ζ, άρα είναι παράλληλες.

□

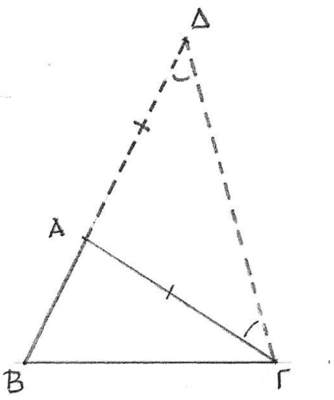
Η τριγωνική ανισότητα.

Θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Στην προέκταση της ΑΒ λαμβάνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε Α – Β – Ε και ΒΕ = ΓΔ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ λέγεται **άθροισμα** των ΑΒ και ΓΔ και συμβολίζεται ΑΒ + ΓΔ.

Εάν ΑΒ > ΓΔ, υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ του ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ = ΓΔ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΖΒ λέγεται **διαφορά** των ΑΒ και ΓΔ και συμβολίζεται ΑΒ – ΓΔ.

Δραστηριότητα 4.5 Δείξτε οτι εάν ΑΒ και ΓΔ είναι ευθύγραμμα τμήματα και ΑΒ > ΓΔ, τότε υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΓΔ + ΕΖ.

Θεώρημα 4.23 (Τριγωνική Ανισότητα) *Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.*



Σχήμα 4.18: Η τριγωνική ανισότητα.

Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΑ λαμβάνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε Β – Α – Δ και ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, και ∠Δ = ∠ΑΓΔ. Άρα ∠Δ < ∠ΒΓΔ, και στο τρίγωνο ΔΒΓ,

$$\mathrm{B\Gamma} < \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}\,.$$

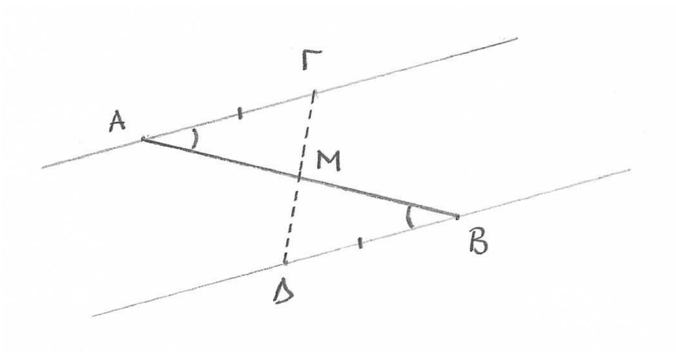
Για τη διαφορά, υποθέτουμε ΑΒ < ΑΓ και παίρνουμε πάνω στην πλευρά ΑΓ σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΑΖ. Τότε ΑΖ + ΖΓ = ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ. Αλλά αφού ΑΖ = ΑΒ, έχουμε ΖΓ < ΒΓ.

□

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος και διχοτόμος γωνίας.

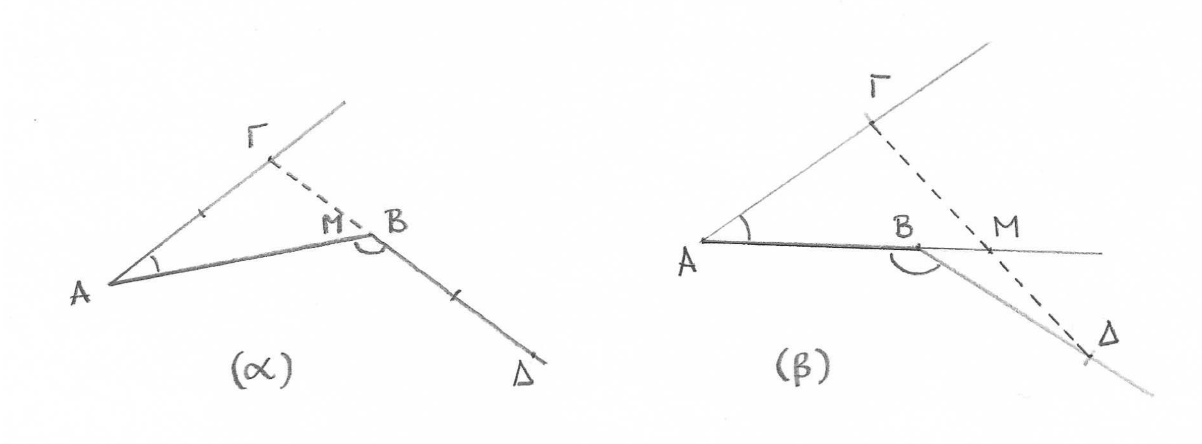
Πρόταση 4.24 *Εάν ΑΒ είναι ευθύγραμμο τμήμα, υπάρχει μοναδικό σημείο Μ μεταξύ του Α και του Β τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΒ. Το σημείο Μ είναι το* ***μέσο*** *του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και γωνία ∠ΧΟΨ. Υπάρχουν σημεία Γ και Δ, σε αντίθετες μεριές της ΑΒ, τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα



Σχῆμα 4.19: Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος, Ι.

ΑΓ = ΒΔ και οι γωνίες ∠ΓΑΒ = ∠ΧΟΨ, ∠ΔΒΑ = ∠ΧΟΨ. Από το Θεώρημα 4.19 οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλες. Αφού τα Γ, Δ βρίσκονται σε αντίθετες μεριές της ΑΒ, το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέμνει την ΑΒ, έστω σε σημείο Μ.



Σχῆμα 4.20: Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος, ΙΙ.

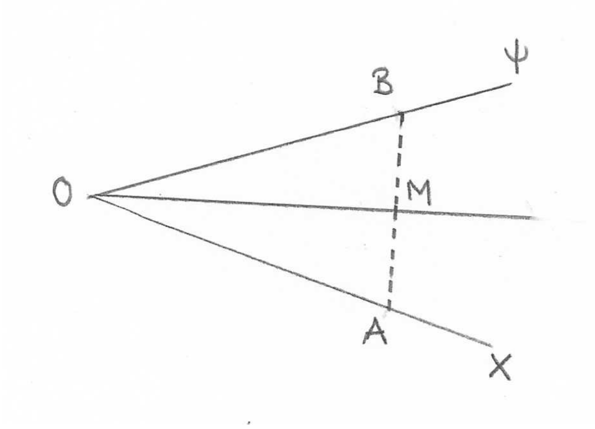
Εάν Μ = Β, τότε η ευθεία ΓΔ συμπίπτει με τη ΒΔ, άτοπο αφού οι ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλες, Σχῆμα 4.20, α. Εάν Α – Β – Μ, τότε Β είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΓΔ, από την Πρόταση 3.11, η ΔΒ τέμνει την ΑΓ, άτοπο, Σχῆμα 4.20, β. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο εάν υποθέσουμε Μ = Α ή Μ – Α – Β.

Συμπεραίνουμε οτι το Μ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, Σχῆμα 4.19. Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΒΔΜ. Αυτά έχουν ΑΓ = ΒΔ, ∠ΓΑΜ = ∠ΔΒΜ και ∠ΑΜΓ = ∠ΒΜΔ. Από το τέταρτο κριτήριο, τα τρίγωνα είναι ίσα, και ΑΜ = ΜΒ.

Εάν υπάρχει και δεύτερο σημείο Ν με Α – Ν – Β και ΑΝ = ΝΒ, τότε ισχύει είτε Α – Μ – Ν είτε Α – Ν – Μ. Εάν Α – Μ – Ν, τότε ισχύει και Μ – Ν – Β. Συμπεραίνουμε οτι ΑΝ > ΑΜ και ΜΒ > ΝΒ. Αλλά τότε ΑΝ > ΑΜ = ΜΒ > ΝΒ, άτοπο.

□

Πρόταση 4.25 *Εάν $\angle X O \Psi$ είναι γωνία, υπάρχει μοναδική ημιευθεία ΟΜ η οποία περιέχεται στο εσωτερικό της $\angle X O \Psi$ και ικανοποιεί τη σχέση $\angle XOM = \angle MO\Psi$. Η ημιευθεία ΟΜ είναι η* ***διχοτόμος*** *της γωνίας $\angle X O \Psi$.*



Σχήμα 4.21: Διχοτόμος γωνίας.

Απόδειξη. Πάνω στις ημιευθείες ΟΧ και ΟΨ λαμβάνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ. Έστω Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε την ημιευθεία ΟΜ. Τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν την πλευρά ΟΜ κοινή και ΟΑ = ΟΒ, ΑΜ = ΒΜ, άρα είναι ίσα. Συμπεραίνουμε οτι και οι γωνίες $\angle XOM = \angle \Psi OM$.

Οποιαδήποτε ημιευθεία που διαιρεί την $\angle X O \Psi$ σε δύο ίσες γωνίες, περιέχεται στο εσωτερικό της $\angle AOB$, άρα τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, έστω στο Ν. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΝ και ΒΟΝ έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες, $\angle AON = \angle BON$, άρα είναι ίσα, και ΑΝ = ΒΝ. Από την Πρόταση 4.24, Ν = Μ.

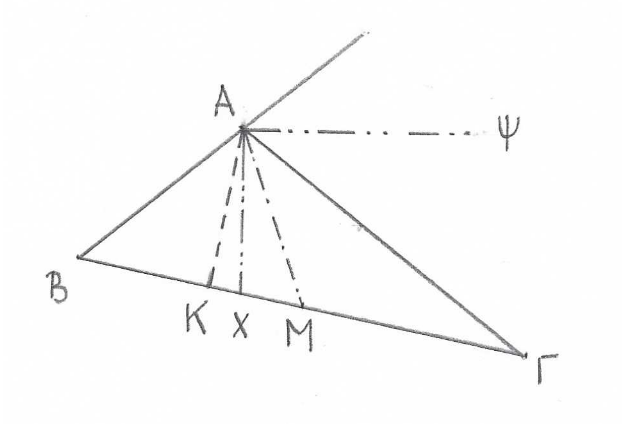
□

Δραστηριότητα 4.6 Δείξτε οτι οι διχοτόμοι κατά κορυφή γωνιών βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Δείξτε οτι οι διχοτόμοι παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται σε ορθή γωνία.

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου.

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Εκτός από τις κορυφές Α, Β, Γ, τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και τις γωνίες $\angle A$, $\angle B$, $\angle \Gamma$, σε ένα τρίγωνο διακρίνουμε τις διαμέσους, τις διχοτόμους και τα ύψη.

- Η **διάμεσος** από την κορυφή Α είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ που ορίζεται από την κορυφή Α και το μέσο Μ της απέναντι πλευράς ΒΓ.
- Το **ύψος** από την κορυφή Α είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ από την κορυφή Α που είναι κάθετο στην απέναντι πλευρά ΒΓ.
- Η (εσωτερική) **διχοτόμος** από την κορυφή Α είναι η ημιευθεία ΑΧ που διχοτομεί τη γωνία $\angle$Α. **Εξωτερική διχοτόμος** από την κορυφή Α είναι μία ημιευθεία ΑΨ που διχοτομεί μία παραπληρωματική γωνία της $\angle$Α.



Σχήμα 4.22: Διάμεσος, ύψος και διχοτόμοι από την κορυφή Α.

Πρόταση 4.26 *Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, η διάμεσος ΑΜ, η διχοτόμος ΑΧ και το ύψος ΑΚ συμπίπτουν.*

□

Ορθογώνια Τρίγωνα.

Ορθογώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία. Οι πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** πλευρές. Η πλευρά απέναντι στην ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα**.

Πρόταση 4.27 *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.*

□

Πρόταση 4.28 *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και μία οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.*

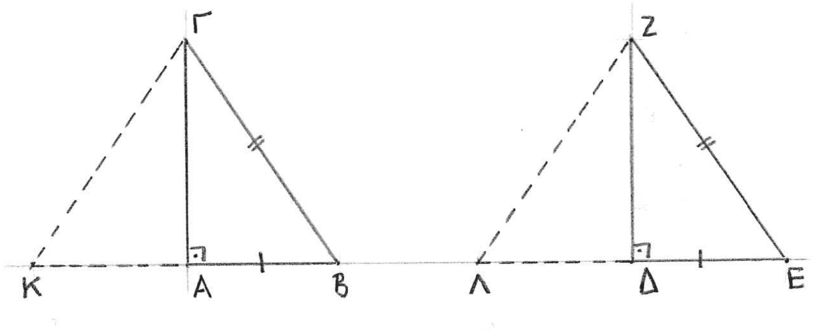
□

Πρόταση 4.29 *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα ίση και μία οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.*

□

Δραστηριότητα 4.7 Σχεδιάστε τα κατάλληλα Σχήματα και αποδείξτε τις παραπάνω Προτάσεις.

Πρόταση 4.30 *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα ίση και μία κάθετη πλευρά ίση, τότε είναι ίσα.*



Σχήμα 4.23: Ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, με ∠Α και ∠Δ ορθές, ΑΒ = ΔΕ και ΒΓ = ΕΖ. Στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΑΚ = ΑΒ και στην προέκταση της ΕΔ παίρνουμε σημείο Λ τέτοιο ώστε ΔΛ = ΔΕ. Εξετάζουμε τα τρίγωνα ΓΚΒ και ΖΛΕ. Από το Θεώρημα 4.1, ΑΒΓ = ΑΚΓ, άρα ΓΚ = ΓΒ = ΖΕ. Επίσης ΔΕΖ = ΔΛΖ, άρα ΖΛ = ΖΕ. Συνεπώς για τα τρίγωνα ΓΚΒ και ΖΛΕ ισχύει ΓΒ = ΖΕ, ΓΚ = ΖΛ και ΚΒ = ΛΕ. Από το τρίτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, Θεώρημα 4.7, τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα ∠Β = ∠Ε, και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα.

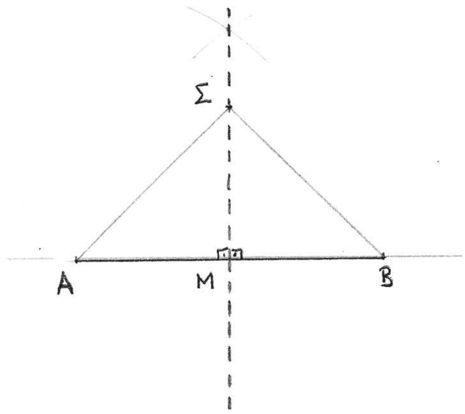
□

Ιδιότητες μεσοκαθέτου και διχοτόμου.

Λέμε οτι το σημείο Σ **απέχει εξ ίσου** από τα σημεία Α και Β εάν τα ευθύγραμμα τμήματα ΣΑ και ΣΒ είναι ίσα.

Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην ΑΒ στο μέσο Μ του ΑΒ.

Πρόταση 4.31 *Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος απέχει εξ ίσου από τα άκρα του.*



Σχῆμα 4.24: Σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα.

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα ΑΒ και από το μέσο του Μ φέρουμε κάθετο στο ΑΒ. Έστω σημείο Σ στην κάθετο. Τότε τα τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΜ είναι ίσα (ορθογώνια τρίγωνα με δύο κάθετες πλευρές ίσες). Άρα ΣΑ = ΣΒ.

□

Ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 4.32 *Κάθε σημείο που απέχει εξ ίσου από τα άκρα ενός διαστήματος, βρίσκεται στη μεσοκάθετο του διαστήματος.*

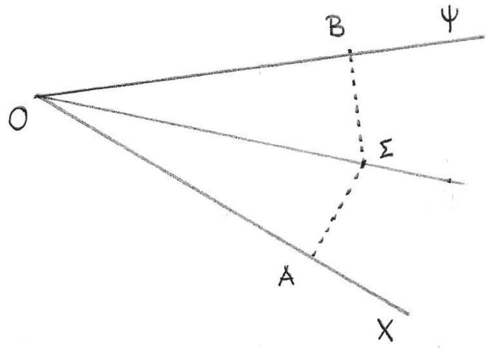
Πρόταση 4.33 *Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας απέχει εξ ίσου από τις πλευρές της γωνίας. Αντίστροφα, κάθε σημείο του εσωτερικού μίας γωνίας που απέχει εξ ίσου από τις πλευρές της γωνίας βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε γωνία ΧΟΨ και σημείο Σ της διχοτόμου της γωνίας. Φέρουμε τις ΣΑ και ΣΒ κάθετες από το Σ στις ΟΧ και ΟΨ. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΣ και ΒΟΣ έχουν κοινή υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες, άρα είναι ίσα. Συνεπώς ΣΒ = ΣΑ.

□

Το σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία (του επιπέδου ή του χώρου) που έχουν μία ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος** αυτής της ιδιότητας. Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου έχουν την ιδιότητα. Όλα τα σημεία που έχουν την ιδιότητα ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο.

Η προηγούμενη πρόταση λέει οτι ο γεωμετρικός χώρος των σημείων που απέχουν εξ ίσου από τις πλευρές μίας γωνίας είναι η διχοτόμος της γωνίας. Έχουμε δεί επίσης



Σχῆμα 4.25: Σημεία της διχοτόμου ισαπέχουν από τις πλευρές.

οτι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν εξ ίσου από δύο σημεία είναι η μεσοκάθετος του διαστήματος που ορίζουν τα δύο σημεία.

Ασκήσεις

Ασκηση 4.8 Ένα τρίγωνο χαρακτηρίζεται ως ισόπλευρο, ισοσκελές ή σκαληνό, και ως ορθογώνιο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο. Συνδυάζοντας αυτούς τους χαρακτηρισμούς, πόσα διαφορετικά είδη τριγώνων μπορείτε να βρείτε. Σχεδιάστε δύο διαφορετικά τρίγωνα από κάθε είδος.

Ασκηση 4.9 Εάν στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και $\angle$Β = $\angle$Ε, να δείξετε οτι οι γωνίες $\angle$Γ και $\angle$Ζ είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Ασκηση 4.10 Εάν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και μία από τις γωνίες του ενός τριγώνου είναι ίση προς την αντίστοιχη γωνία του άλλου τριγώνου, αυτά δεν είναι υποχρεωτικά ίσα. Δώστε παράδειγμα άνισων τέτοιων τριγώνων. Πόσα διαφορετικά τέτοια τρίγωνα μπορεί να υπάρχουν·

Ασκηση 4.11 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΒ = ΑΓ, να δείξετε οτι για κάθε σημείο Δ της πλευράς ΑΓ (εκτός από το Α) ισχύει ΔΓ < ΔΒ.

Ασκηση 4.12 Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\angle$Α > $\angle$Β > $\angle$Γ, και ύψος ΑΚ. Μπορείτε να διατάξετε από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τα ευθύγραμμα τμήματα

$$\text{ΑΚ, ΓΚ, ΒΓ, ΒΚ, ΑΓ, ΑΒ};$$

Εάν όχι όλα, ποιά μπορείτε να διατάξετε; Τί μπορείτε να πείτε για τα υπόλοιπα;

Ασκηση 4.13 Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου φέρουμε τις κάθετες ΔΕ και ΔΖ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Δείξτε οτι ΕΖ < ΒΓ.

Ασκηση 4.14 Να δείξετε οτι η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετος στην πλευρά ΒΓ εάν και μόνον εάν το τρίγωνο έχει ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ.

Ασκηση 4.15 Να δείξετε οτι τα ύψη ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσα. Διατυπώστε και αποδείξτε και το αντίστροφο.

Υπόδειξη: Εξετάστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις οξυγώνιου, ορθογώνιου ή αμβλυγώνιου τριγώνου.

Ασκηση 4.16 Να δείξετε οτι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Ασκηση 4.17 Να δείξετε οτι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από σημείο σε ευθεία είναι μικρότερο από κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο στην ευθεία.

Λέμε οτι δύο σημεία **απέχουν εξ ίσου** από μία ευθεία εάν τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα από τα σημεία προς την ευθεία είναι ίσα.

Ασκηση 4.18 Να δείξετε οτι οι δύο κορυφές ενός τριγώνου απέχουν εξ ίσου από τη διάμεσο που άγεται από την τρίτη κορυφή.

Ασκηση 4.19 Εάν προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατά ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}$ και $\mathrm{\Gamma E} = \mathrm{A\Gamma}$, να δείξετε οτι τα σημεία Δ και Ε απέχουν εξ ίσου από την πλευρά ΒΓ.

Ασκηση 4.20 Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ προς το Α, και παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AB}$, $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma}$. Δείξτε οτι

α΄. $\mathrm{\Delta E} = \mathrm{B\Gamma}$

β΄. Η προέκταση του ύψους ΑΚ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος του ΑΔΕ.

γ΄. Η προέκταση της διχοτόμου ΑΛ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμος του ΑΔΕ.

δ΄. Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διάμεσος του ΑΔΕ.

Ασκηση 4.21 Θεωρήστε τρία σημεία Α, Β, Γ σε μία ευθεία με $\mathrm{A} - \mathrm{B} - \Gamma$ και $\mathrm{AB} < \mathrm{B\Gamma}$. Αν Μ, Ν και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε οτι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ και ΒΛ έχουν το ίδιο μέσο.

Ασκηση 4.22 Θεωρήστε εσωτερικό σημείο Δ του τριγώνου ΑΒΓ. Δείξτε οτι $\mathrm{B\Gamma} < \mathrm{\Delta B} + \mathrm{\Delta\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$ και $\angle \mathrm{BA\Gamma} < \angle \mathrm{B\Delta\Gamma}$.

Ασκηση 4.23 Θεωρήστε τρίγωνο ΑΒΓ, ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{X\Psi} = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A}$ και Μ το μέσο του ΧΨ. Εάν Ο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου, δείξτε οτι

$$\mathrm{XM} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} < \mathrm{X\Psi}\,.$$

Κεφάλαιο 5

Μήκος ευθύγραμμου τμήματος και μέτρο γωνίας

Μέχρι τώρα δεν έχουμε ορίσει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ή το μέτρο μίας γωνίας. Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε ιδιότητες που συνδέουν τα σημεία και τις ευθείες της Γεωμετρίας με ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Ιδιότητα 5.1 (Αξίωμα Εύδοξου - Αρχιμήδη) *Θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$. Συμβολίζουμε E_i τα σημεία στην ημιευθεία AB που προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο:*

$$E_0 = A \qquad \textit{και για } i > 0,\ E_{i-1}E_i = \Gamma\Delta.$$

Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το B είναι μεταξύ του A και του E_n, $A - B - E_n$.

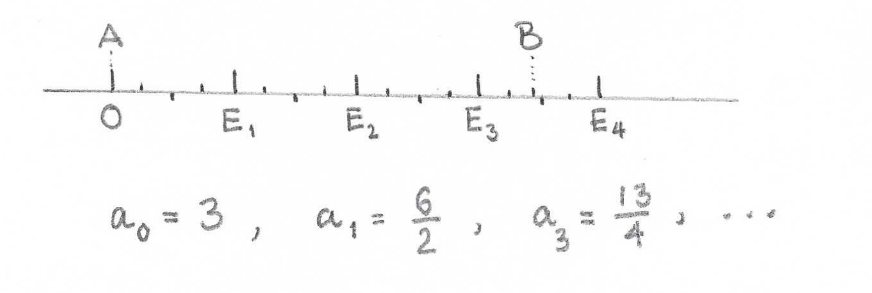
Συμβολίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AE_i με $i\Gamma\Delta$. Με αυτό το συμβολισμό η Ιδιότητα 5.1 λέει οτι υπάρχει n τέτοιο ώστε $n\Gamma\Delta > \mathrm{AB}$.

Για να εισαγάγουμε την έννοια της μέτρησης στη Γεωμετρία επιλέγουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ως μονάδα μήκους και χρησιμοποιούμε την Ιδιότητα 5.1 για να συγκρίνουμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα με αυτή τη μονάδα και να ορίσουμε το μήκος του.

Θεωρούμε ένα σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΟΙ. Για οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σύμφωνα με την Ιδιότητα 5.1 υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $\mathrm{AB} < n\mathrm{OI}$. Από ιδιότητες των φυσικών αριθμών συμπεραίνουμε οτι υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός με αυτή την ιδιότητα, έστω n_0, για τον οποίο ΑΒ < n_0ΟΙ αλλά $(n_0 - 1)$ΟΙ ≤ ΑΒ. Ορίζουμε $a_0 = n_0 - 1$.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία με το διάστημα OI_1, όπου I_1 είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΙ, και βρίσκουμε φυσικό αριθμό n_1 τέτοιο ώστε $(n_1 - 1)\mathrm{OI}_1 \le \mathrm{AB} < n_1\mathrm{OI}_1$. Ορίζουμε $a_1 = \frac{n_1-1}{2}$.

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, με I_i το μέσο του OI_{i-1}, και βρίσκουμε φυσικό αριθμό n_i τέτοιο ώστε $(n_i - 1)\mathrm{OI}_i \le \mathrm{AB} < n_i\mathrm{OI}_i$. Ορίζουμε $a_i = \frac{n_i-1}{2^i}$.



Σχήμα 5.1: Η ακολουθία a_i προσεγγίζει το μήκος του ΑΒ.

Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μία αύξουσα ακολουθία ρητών αριθμών a_i, φραγμένη από το $a_0 + 1$. Η ακολουθία a_i συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Το όριο της ακολουθίας το ονομάζουμε **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς μονάδα μήκους ΟΙ, και το συμβολίζουμε |ΑΒ|.

Η ακόλουθη Ιδιότητα συμπληρώνει την Ιδιότητα 5.1 και εξασφαλίζει οτι δεν υπάρχουν κενά σε μία ευθεία, όπως δεν υπάρχουν κενά στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ιδιότητα 5.2 *Θεωρούμε ευθεία ε και επιλέγουμε δύο σημεία O και I στην ε. Τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μ από τα σημεία της ε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε*

α΄. $\mu(O) = 0$, $\mu(I) = 1$,

β΄. για κάθε τρία σημεία A, B, Γ της ε, $A - B - \Gamma$ εάν και μόνον εάν $\mu(A) < \mu(B) < \mu(\Gamma)$ ή $\mu(\Gamma) < \mu(B) < \mu(A)$,

γ΄. και για κάθε δύο σημεία A και B, $|AB| = |\mu(A) - \mu(B)|$.

Πρόταση 5.3 *Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα εάν και μόνον εάν έχουν το ίδιο μήκος (ως προς την ίδια μονάδα μήκους).*

□

Μέτρο γωνίας

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν υπάρχει μία εγγενής μονάδα μήκους. Η επιλογή του ευθύγραμμου τμήματος ΟΙ ως μονάδα είναι αυθαίρετη. Αντιθέτως, για τη μέτρηση γωνιών υπάρχει a priori καθορισμένη γωνία την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα: ορθές γωνίες ορίζονται σε κάθε σημείο, και είναι όλες ίσες.

Ιδιότητα 5.4 (Ιδιότητα Εύδοξου - Αρχιμήδη για γωνίες) *Θεωρούμε γωνίες $\angle AOB$ και $\angle AO\Delta$. Ορίζουμε τα n-πολλαπλάσια της γωνίας $\angle AO\Delta$ με τρόπο ανάλογο με τα n-πολλαπλάσια του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ στην Ιδιότητα 5.1. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε η γωνία $n\angle AO\Delta$ είτε είναι μεγαλύτερη από την $\angle AOB$ είτε είναι μεγαλύτερη από 2 ορθές.*

Για να μετρήσουμε μία γωνία ∠AOB ως προς μονάδα μέτρου μία ορθή, διχοτομούμε επανειλημένα την ορθή γωνία και προσεγγίζουμε την AOB με υποδιαιρέσεις της ορθής. Έτσι βρίσκουμε μία αύξουσα και φραγμένη ακολουθία ρητών αριθμών ϑ_i που συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό ϑ, το **μέτρο** της γωνίας AOB.

Δραστηριότητα 5.1 Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του ορισμού του μέτρου της γωνίας AOB, κατ' αναλογία με τον ορισμό του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος.

Θεωρήστε ορθή γωνία $\mathrm{X}\mathrm{O}\Psi_0$ και $\mathrm{O}\Psi_1$ τη διχοτόμο της. Ορίστε αναδρομικά, για κάθε i, $\mathrm{O}\Psi_i$ να είναι η διχοτόμος της $\mathrm{XO}\Psi_{i-1}$. Από την Ιδιότητα 5.4, υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός n_i, τέτοιος ώστε $n_i\angle\mathrm{XO}\Psi_i$ είναι μεγαλύτερη από την AOB ή μεγαλύτερη από 2 ορθές.

Ορίστε $\vartheta_i = \frac{n_i-1}{2^i}$. Δείξτε οτι η ακολουθία ρητών αριθμών ϑ_i είναι αύξουσα και φραγμένη από το 2, και συνεπώς συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Το όριο ϑ της ακολουθίας είναι το μέτρο της γωνίας AOB ως προς μονάδα μέτρου μία ορθή, είνα.

Με τον ορισμό της (κυρτής) γωνίας που έχουμε δώσει, το μέτρο μίας γωνίας είναι πάντα μικρότερο από 2 ορθές. Έχουμε όμως ορίσει και αθροίσματα γωνιών που μπορούν να έχουν μέτρο μεγαλύτερο από 2 ορθές.

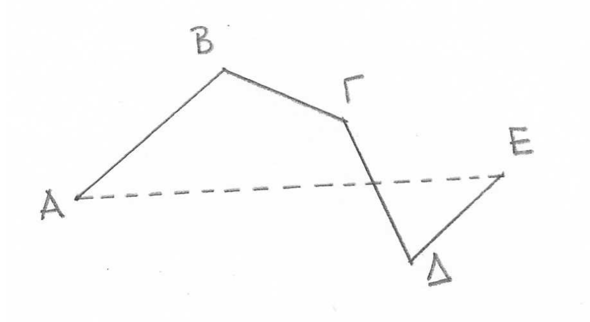
Ως μονάδα μέτρου γωνίας συνηθίζεται να χρησιμοποιείται το $\frac{1}{90}$ της μίας ορθής, που ονομάζεται **μοίρα** και συμβολίζεται $^\circ$. Έτσι $1\llcorner = 90^\circ$. Σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρου το $\frac{2}{\pi}$ της μίας ορθής. Αυτή η μονάδα σχετίζεται με το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία.

Πρόταση 5.5 *Δύο (κυρτές) γωνίες είναι ίσες εάν και μόνον εάν έχουν το ίδιο μέτρο.*

□

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Θεωρούμε σημεία A_1, A_2, …, A_n. Η **τεθλασμένη** γραμμή $A_1A_2 \ldots A_n$ είναι η γραμμή που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$.



Σχῆμα 5.2: Τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕ.

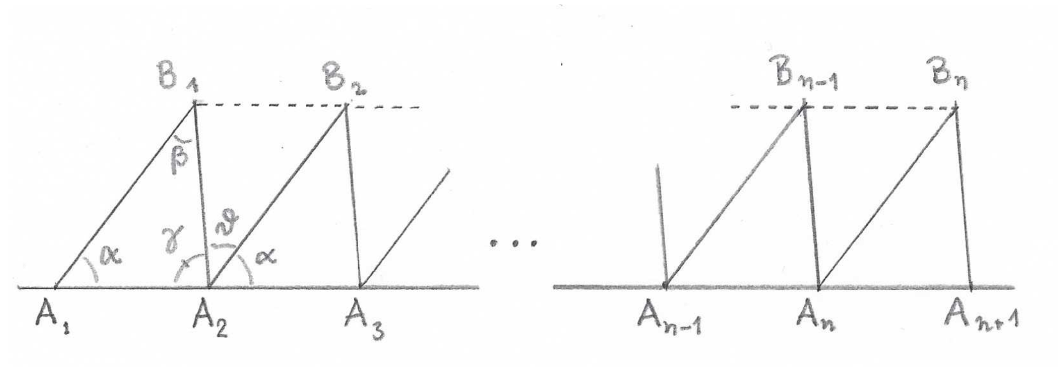
Δραστηριότητα 5.2 Χρησιμοποιήστε επαγωγή στον αριθμό n των σημείων μίας τεθλασμένης γραμμής, για να δείξετε οτι το μήκος της τεθλασμένης, $|A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_{n-1}A_n|$, είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_n.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες σημείων και ευθειών που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, θα δείξουμε οτι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από ή ίσο με δύο ορθές. Αργότερα θα δούμε οτι η διαφορά μεταξύ της ισότητας και της γνήσιας ανισότητας διακρίνει την Ευκλείδεια Γεωμετρία από τη μή Ευκλείδεια ή Υπερβολική Γεωμετρία.

Θεώρημα 5.6 *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από ή ίσο με δύο ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και λαμβάνουμε σημεία A_1, A_2, …, A_{n+1} σε μία ευθεία ε τέτοια ώστε A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_{n+1} είναι διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ίσα με ΑΓ. Θεωρούμε επίσης σημεία B_1, B_2, …, B_n, στην ίδια μεριά της ευθείας ε, τέτοια ώστε τα τρίγωνα $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A\_3$, …, $A_nB_nA_{n+1}$ να είναι όλα ίσα με το ΑΒΓ.

Συμβολίζουμε α, β, γ τα μέτρα των γωνιών $\angle A$, $\angle B$ και $\angle \Gamma$ του τριγώνου ΑΒΓ, και θέτουμε $\vartheta = 2\llcorner - (\alpha + \gamma)$. Τότε οι γωνίες $\angle B_1A_2B_2$, $\angle B_2A_3B_3$, …, $\angle B_{n-1}A_nB_n$ έχουν όλες μέτρο ϑ, και συνεπώς είναι ίσες. Από το πρώτο κριτήριο και όλα τα τρίγωνα $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, …, $B_{n-1}A_nB_n$ είναι ίσα. Αφού $\alpha + \vartheta + \gamma = 2\llcorner$, για να ισχύει $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\llcorner$ αρκεί να δείξουμε οτι $\beta \leq \vartheta$. Υποθέτουμε οτι $\beta > \vartheta$. Τότε συγκρίνοντας



Σχῆμα 5.3: Εάν το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι > 2∟ οδηγούμαστε σε άτοπο.

τα τρίγωνα $A_1B_1A_2$ και $B_1A_2B_2$ βρίσκουμε οτι έχουν δύο ίσες πλευρές και η γωνία $\angle A_1B_1A_2$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\angle B_1A_2B_2$. Από το Θεώρημα 4.16, η πλευρά A_1A_2 είναι μεγαλύτερη από την πλευρά B_1B_2, άρα $|A_1A_2| > |B_1B_2|$. Θέτουμε $\kappa = |A_1A_2| - |B_1B_2| > 0$.

Τώρα θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $A_1B_1B_2 \ldots B_nA_n$. Αυτή έχει μήκος μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα A_1A_n. Άρα

$$|A_1B_1| + |B_1B_2| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nA_n| > |A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_{n-1}A_n|\,.$$

Αφού τα τρίγωνα $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ είναι ίσα, η αριστερή πλευρά είναι $2|A_1B_1| + (n-1)|B_1B_2|$, ενώ η δεξιά πλευρά είναι $(n-1)|A_1A_2|$. Άρα

$$2|A_1B_1| > (n-1)(|A_1A_2| - |B_1B_2|) = (n-1)\kappa\,.$$

Αφού $\kappa > 0$, εάν επιλέξουμε $n - 1 > \frac{2|AB|}{\kappa}$ καταλήγουμε σε άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι $\beta \le \vartheta$ και συνεπώς $\alpha + \beta + \gamma \le 2$∟.

□

Ασκήσεις

Ασκηση 5.3 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ και ύψη υ_α, υ_β, υ_γ, να αποδείξετε οτι

$$\upsilon_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma\,.$$

Ασκηση 5.4 Για εσωτερικό σημείο Ο ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, δείξτε οτι

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) < |\mathrm{OA}| + |\mathrm{OB}| + |\mathrm{O\Gamma}| < \alpha + \beta + \gamma\,.$$

Κεφάλαιο 6

Παράλληλες Ευθείες

Υπενθυμίζουμε οτι δύο ευθείες ονομάζονται παράλληλες όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο. Δύο παράλληλες ευθείες ε και ζ συμβολίζονται $\varepsilon \parallel \zeta$.

Γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη.

Εάν δύο ευθείες ε και ζ τέμνονται από μία τρίτη ευθεία γ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ τους χαρακτηρίζονται ανά ζεύγη ως

α΄. **εντός επί τα αυτά μέρη** οι A_4 και B_1, και οι A_3 και B_2

β΄. **εκτός επί τα αυτά μέρη** οι A_1 και B_4, και οι A_2 και B_3

γ΄. **εντός εναλλάξ** οι A_4 και B_2, και οι A_3 και B_1

δ΄. **εκτός εναλλάξ** οι A_1 και B_3, και οι A_2 και B_4

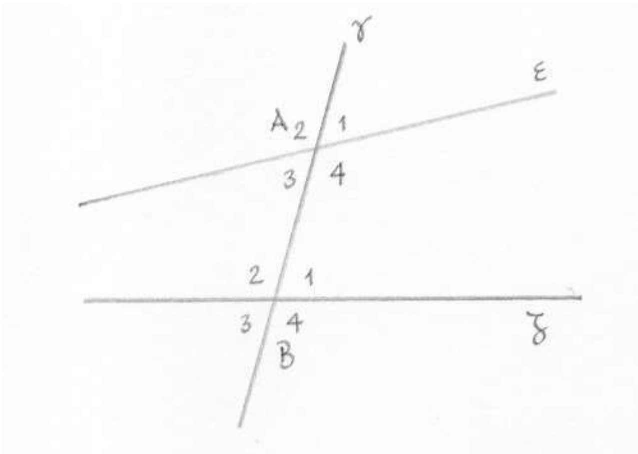
ε΄. **εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη** οι A_4 και B_4, οι A_3 και B_3, οι B_1 και A_1 και οι B_2 και A_2

ϛ΄. **εντός εκτός εναλλάξ** οι A_4 και B_3, οι A_3 και B_4, οι B_1 και A_2, και οι B_2 και A_1

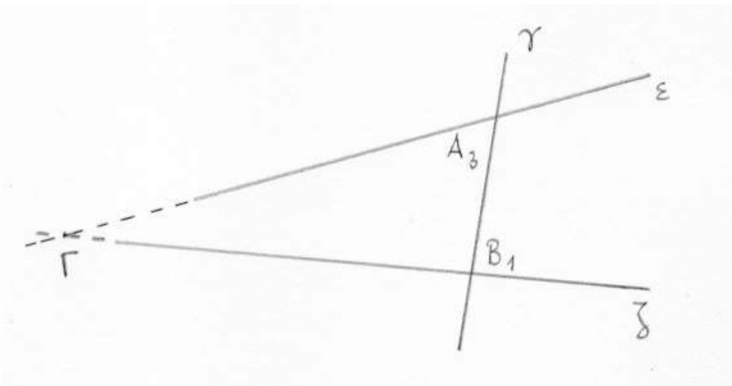
Έχουμε δει, στο Θεώρημα 4.19, οτι εάν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Δραστηριότητα 6.1 Δείξτε οτι εάν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν

- Τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε είναι παράλληλες.
- Τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές τότε είναι παράλληλες.



Σχῆμα 6.1: Δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη.



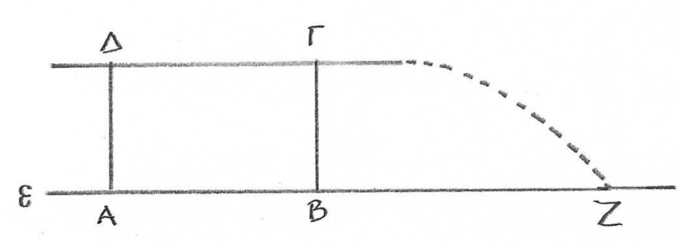
Σχῆμα 6.2: Εντός εναλάξ ίσες.

Παραλληλόγραμμο Saccheri

Το παραλληλόγραμμο Saccheri είναι ένα τετράπλευρο που έχει δύο ορθές γωνίες και τις απέναντι κάθετες πλευρές ίσες. Μελετήθηκε ως μέρος των προσπαθειών απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων.

Θεώρημα 6.1 (Παραλληλόγραμμο Saccheri) *Θεωρούμε δύο σημεία A και B στην ευθεία ε, και ίσα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$, κάθετα στην ίδια μεριά της ε. Τότε οι γωνίες $\angle A\Delta\Gamma$ και $\angle B\Gamma\Delta$ είναι ίσες, και η ευθεία $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλη προς την ε.*

Απόδειξη. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΑΓ είναι ίσα από το πρώτο κριτήριο. Άρα $\angle \mathrm{A\Delta B} = \angle \mathrm{B\Gamma A}$. Επίσης $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$, και τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα από το τρίτο κριτήριο. Άρα $\angle \mathrm{A\Gamma\Delta} = \angle \mathrm{B\Delta\Gamma}$. Προσθέτοντας τις ίσες γωνίες έχουμε



Σχῆμα 6.3: Το παραλληλόγραμμο Saccheri.

$\angle A\Delta\Gamma = \angle B\Gamma\Delta$.

Τώρα υποθέτουμε οτι η ημιευθεία ΔΓ τέμνει την ημιευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ, έτσι ώστε να σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΓΖ. Από το τρίγωνο ΑΔΖ έχουμε $1\llcorner + \angle\Delta ZA \leq 2\llcorner$. Από το τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε $1\llcorner + \angle B\Gamma Z + \angle\Gamma ZB \leq 2\llcorner$. Προσθέτουμε τις ανισότητες και έχουμε

$$2\llcorner + \angle A\Delta Z + \angle B\Gamma Z + \angle\Delta ZA + \angle\Gamma ZB \leq 4\llcorner\,.$$

Αλλά $\angle A\Delta Z + \angle B\Gamma Z = 2\llcorner$, και καταλήγουμε σε $4\llcorner + \angle\Delta ZA + \angle\Gamma ZB \leq 4\llcorner$, άτοπο.

□

Αποδείξαμε οτι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, αλλά χωρίς το αίτημα των παραλλήλων δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί οτι ΑΒ = ΔΓ, ούτε οτι οι γωνίες στο Γ και Δ είναι ορθές.

Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη.

Θα διατυπώσουμε το πέμπτο αίτημα των Στοιχείων, ή αίτημα των παραλλήλων, στην ακόλουθη μορφή.

Ιδιότητα 6.2 *Από σημείο εκτός ευθείας περνάει μόνο μία παράλληλη προς την ευθεία.*

Κατά τη διάρκεια της προσπάθειας να αποδειχθεί αίτημα των παραλλήλων, που συνεχίστηκε για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια, βρέθηκαν πολλές άλλες προτάσεις που είναι λογικά ισοδύναμες με αυτό. Δηλαδή εάν δεχθούμε το αίτημα των παραλλήλων μπορούμε να τις αποδείξουμε, και αντίστροφα, αν δεχθούμε μία από αυτές τις προτάσεις μπορούμε να αποδείξουμε το αίτημα των παραλλήλων. Κάποιες από αυτές τις προτάσεις είναι οι ακόλουθες:

- Υπάρχει τρίγωνο του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές.

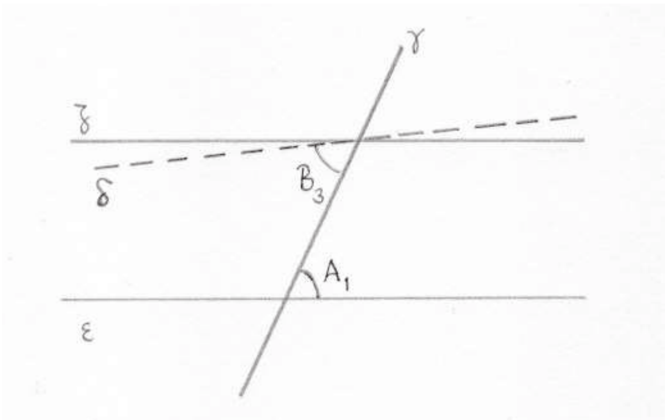
- Υπάρχει τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες.
- Υπάρχουν τρίγωνα με αυθαίρετα μεγάλο εμβαδόν.
- Σημεία τα οποία ισαπέχουν από ευθεία και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, σχηματίζουν ευθεία.

Ας δούμε τώρα τί επί πλέον μπορούμε να πούμε για παράλληλες ευθείες αν δεχθούμε την Ιδιότητα 6.2. Ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.19.

Θεώρημα 6.3 *Εάν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες, καθώς και τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι οι παράλληλες ευθείες ε και ζ τέμνονται από την γ, στα σημεία A και B. Θα δείξουμε οτι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\angle A_1$ και $\angle B_3$ είναι ίσες. Εάν δεν συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχει άλλη ευθεία δ από το B που σχηματίζει τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Αλλά τότε από το σημείο B περνάνε δύο ευθείες παράλληλες προς την ε, άτοπο.

□



Σχήμα 6.4: Παράλληλες τεμνόμενες από ευθεία.

Δραστηριότητα 6.2 Δείξτε οτι δύο παράλληλες τεμνόμενες από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές.

Πόρισμα 6.4 *Αν μία ευθεία βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με δύο παράλληλες ευθείες και τέμνει μία από αυτές τότε τέμνει και την άλλη.*

Απόδειξη. Εάν δ και ε είναι παράλληλες, η ζ τέμνει τη δ στο A και δεν τέμνει την ε, τότε υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την ε, άτοπο.

□

Πόρισμα 6.5 *Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς τρίτη, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.*

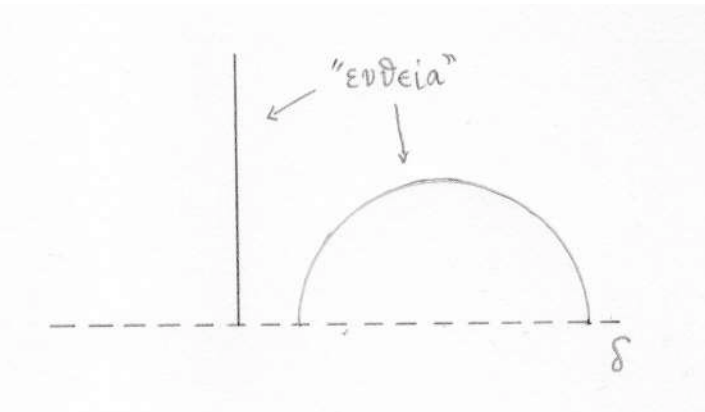
Δραστηριότητα 6.3 Αποδείξτε το προηγούμενο Πόρισμα, υποθέτοντας οτι οι τρεις ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Ισχύει το αποτέλεσμα και όταν οι τρεις ευθείες δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο;

Πώς θα ήταν μία γεωμετρία χωρίς το 5^o αίτημα;

Μπορούμε να πάρουμε μία ιδέα από ένα μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου, όπου ισχύουν όλα τα υπόλοιπα αξιώματα, αλλά υπάρχουν περισσότερες παράλληλες από ένα σημείο προς μία ευθεία. Αν ορίσουμε τις έννοιες σημείο και ευθεία με τον ακόλουθο τρόπο, τότε ισχύουν όλες οι Ιδιότητες που έχουμε δεχθεί, εκτός από την 6.2.

''Σημεία'' είναι τα στοιχεία του άνω ημιεπιπέδου στο μιγαδικό επίπεδο, $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

''Ευθείες'' είναι τα ημικύκλια στο $\mathcal{H}$ με κέντρο στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ και οι ημιευθείες στο $\mathcal{H}$ που είναι κάθετες στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

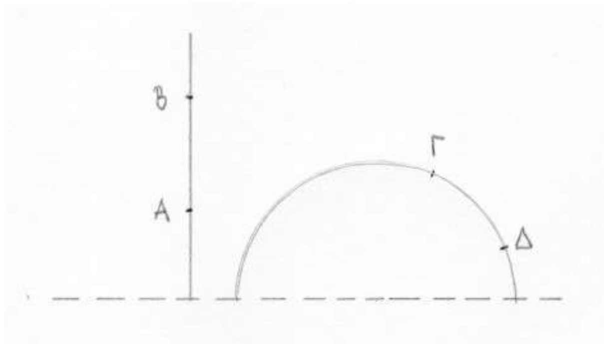


Σχήμα 6.5: Το υπερβολικό επίπεδο.

Η σχέση ''βρίσκεται'' ορίζεται ως η σχέση ανήκει: το σημείο z βρίσκεται στην ευθεία ε εάν $z \in \varepsilon$. Η σχέση ''μεταξύ'' ορίζεται βάσει της αντίστοιχης έννοιας στο μιγαδικό επίπεδο: εάν τα τρία σημεία u, w, z βρίσκονται στην ευθεία ε, το w βρίσκεται μεταξύ του u και του z σημαίνει οτι w ανήκει στο διάστημα που ορίζουν τα u και z εάν ε είναι ημιευθεία, ή στο τόξο που ορίζουν τα u και z εάν ε είναι ημικύκλιο.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε οτι ισχύουν οι Ιδιότητες. Για παράδειγμα,

- Εάν z και w είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\mathcal{H}$, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που διέρχεται από το z και το w.



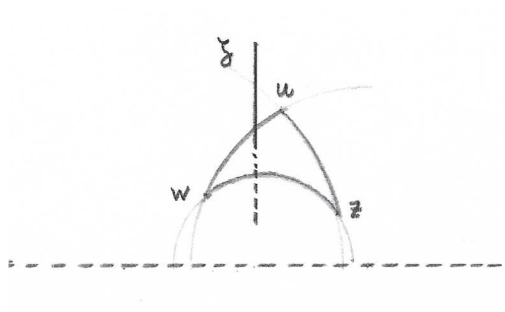
Σχῆμα 6.6: Δύο σημεία προσδιορίζουν μία ευθεία.

- Δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είτε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

- Εάν z και w είναι διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε υπάρχουν άπειρα διαφορετικά σημεία u στην ευθεία zw τέτοια ώστε $z - u - w$, και υπάρχουν άπειρα διαφορετικά σημεία τέτοια ώστε $z - w - u$.

- Ένα σημείο z σε μία ευθεία ε χωρίζει την ε σε δύο ημιευθείες που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το z.

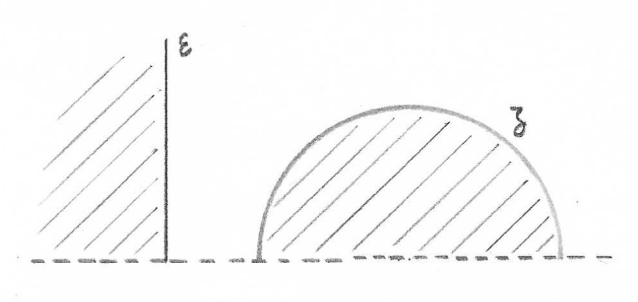
- **Αξίωμα του Pasch.** Θεωρούμε ένα τρίγωνο uwz και μία ευθεία ζ που δεν διέρχεται από καμία κορυφή του τριγώνου. Εάν η ζ τέμνει μία πλευρά του τριγώνου, τότε η ζ τέμνει και μία άλλη από τις πλευρές του τριγώνου.



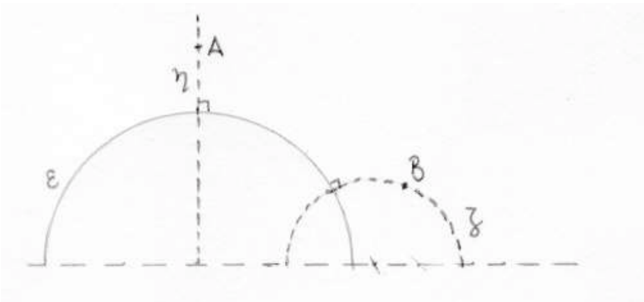
Σχῆμα 6.7: Το αξίωμα του Pasch στο υπερβολικό επίπεδο.

- Μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

- Από ένα σημείο υπάρχει μοναδική κάθετος προς μία ευθεία



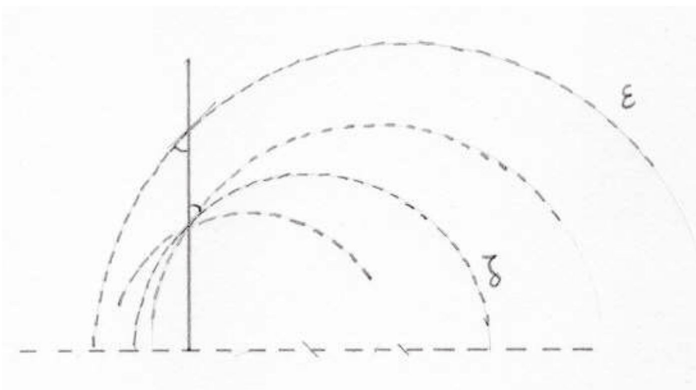
Σχῆμα 6.8: Ημιεπίπεδα στο υπερβολικό επίπεδο.



Σχῆμα 6.9: Μοναδική κάθετος από σημείο σε ευθεία.

Αλλά υπάρχουν και σημαντικές διαφορές από τα αποτελέσματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας που εξαρτώνται από το αίτημα των παραλλήλων.

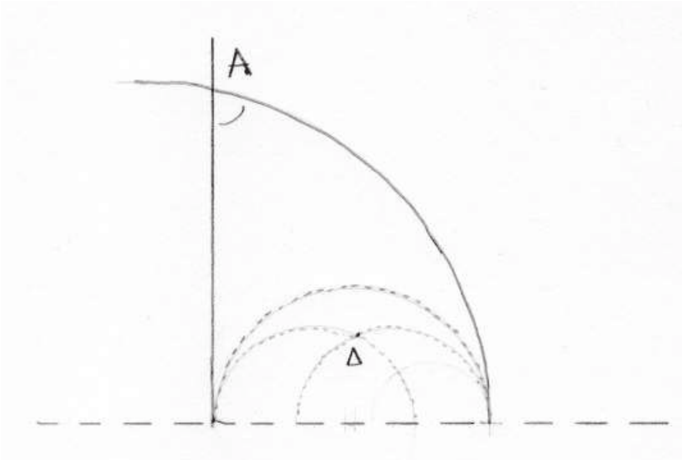
Ορίζουμε ως παράλληλες τις ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο. Εάν οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, οι ευθείες είναι παράλληλες, αλλά όχι μόνον τότε!



Σχῆμα 6.10: Πολλές παράλληλες από ένα σημείο.

Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές. Αλλά *το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι πάντα μικρότερο από δύο ορθές.*

Στο υπερβολικό επίπεδο δεν υπάρχουν αυθαίρετα μεγάλα τρίγωνα. Συγκεκριμένα, στο εσωτερικό μίας γωνίας ∠Α υπάρχουν σημεία από τα οποία δεν περνάει καμία ευθεία που να τέμνει και τις δύο πλευρές της γωνίας.



Σχῆμα 6.11: Δεν υπάρχει τρίγωνο με γωνία ∠Α, τέτοιο ώστε η πλευρά α να περνάει από το σημείο Δ.

Συνέπειες του αξιώματος των παραλλήλων.

Στη συνέχεια θα δούμε κάποιες προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που βασίζονται στο αξίωμα των παραλλήλων.

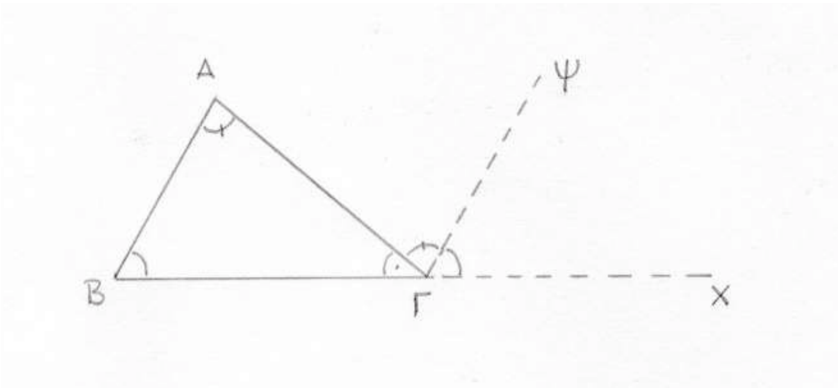
Θεώρημα 6.6 *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ και στην προέκταση λαμβάνουμε σημείο Χ. Από το Γ φέρουμε ΓΨ παράλληλη προς την ΒΑ. Η γωνία ∠Α είναι ίση με την ∠ΑΓΨ ως εντός εναλλάξ. Η γωνία ∠Β είναι ίση με την ∠ΨΓΧ ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Άρα

$$\angle\Gamma + \angle A + \angle B = \angle B\Gamma A + \angle A\Gamma\Psi + \angle\Psi\Gamma X = \angle B\Gamma X = 2\llcorner\,.$$

□

Πόρισμα 6.7 *Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με μία ορθή.*



Σχήμα 6.12: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

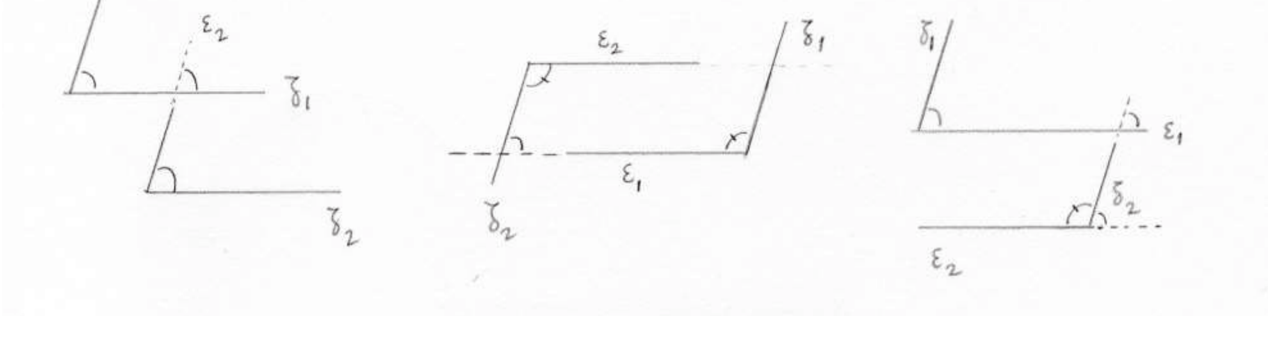
Πόρισμα 6.8 *Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.*

Πρόταση 6.9 *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και γωνίες μέτρου* η, ϑ, *τέτοιες ώστε* $\eta + \vartheta < 2\llcorner$, *υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με* $\angle \Gamma AB = \eta$ *και* $\Gamma BA = \vartheta$.

Απόδειξη. Υπάρχουν ημιευθείες ΑΧ και ΒΨ από την ίδια μεριά της ΑΒ, τέτοιες ώστε $\angle XAB = \eta$ και $\angle \Psi BA = \vartheta$. Αυτές δεν είναι παράλληλες, αφού οι εντός επί τα αυτά γωνίες δεν είναι παραπληρωματικές, άρα τέμνονται σε ένα σημείο Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

□

Πρόταση 6.10 *Αν οι πλευρές μίας γωνίας είναι μία προς μία παράλληλες προς τις πλευρές μίας άλλης γωνίας, τότε οι γωνίες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.*

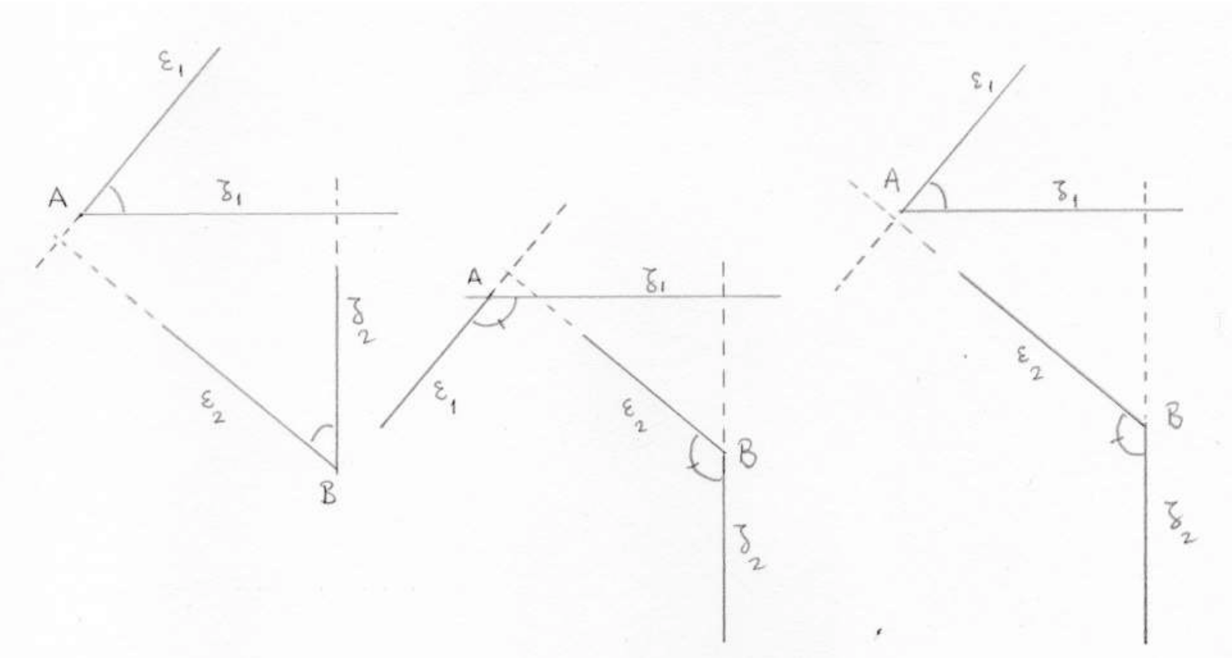


Σχήμα 6.13: Γωνίες με παράλληλες πλευρές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αυτής της Πρότασης, όπως και της επόμενης, χρειάζεται να εξετάσουμε διαφορετικές σχετικές θέσεις των δύο γωνιών, όπως στο Σχήμα 6.13. Σε όλες τις περιπτώσεις η απόδειξη είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.

□

Πρόταση 6.11 *Αν οι πλευρές μίας γωνίας είναι μία προς μία κάθετες προς τις πλευρές μίας άλλης γωνίας, τότε οι γωνίες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.*



Σχήμα 6.14: Γωνίες με κάθετες πλευρές είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη. Από το σημείο Β φέρουμε παράλληλη προς την ε_1, Σχήμα 6.14. Αυτή έχει κοινό σημείο με τη ζ_1. Στις γωνίες που σχηματίζονται σε αυτό το σημείο, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.3.

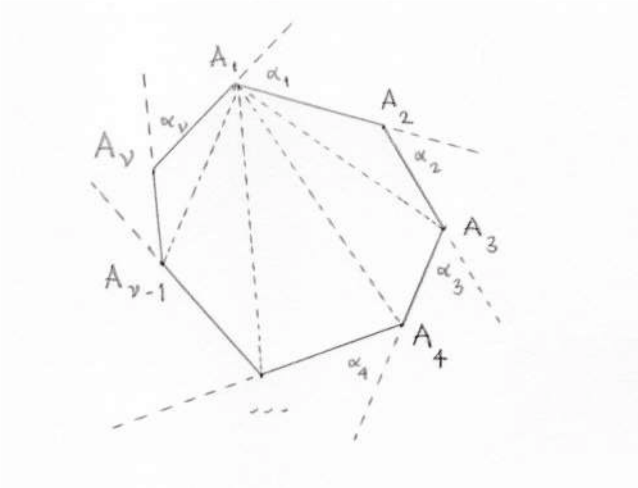
□

Δραστηριότητα 6.4 Συμπληρώστε τις αποδείξεις των δύο προηγούμενων Προτάσεων.

Θεώρημα 6.12 *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι $2\nu - 4$ ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε κυρτό ν-γωνο με κορυφές $A_1A_2\dots A_\nu$. Από την κορυφή A_1 φέρουμε διαγωνίους A_1A_3, A_1A_4, …, $A_1A\nu - 1$. Σχηματίζονται $\nu - 2$ τρίγωνα, και το άθροισμα των γωνιών του ν-γώνου είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών των $\nu-2$ τριγώνων, το οποίο είναι $2(\nu-2)\llcorner$.

□



Σχῆμα 6.15: Το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου.

Θεώρημα 6.13 *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε κυρτό ν-γωνο με κορυφές $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_\nu$. Η κάθε εξωτερική γωνία $\angle\alpha_1$, $\angle\alpha_2$, …, $\angle\alpha_\nu$ είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής γωνίας, άρα $\angle\mathrm{A}_i + \angle\alpha_i = 2\llcorner$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}(\angle\mathrm{A}_1+\angle\alpha_1)+\cdots+(\angle\mathrm{A}_\nu+\angle\alpha_\nu) &= 2\nu\llcorner\\ (\angle\mathrm{A}_1+\cdots+\angle\mathrm{A}_\nu)+(\angle\alpha_1+\cdots+\angle\alpha_\nu) &= 2\nu\llcorner\\ (2\nu-4)\llcorner+(\angle\alpha_1+\cdots+\angle\alpha_\nu) &= 2\nu\llcorner\,.\end{aligned}$$

Άρα $(\angle\alpha_1+\cdots+\angle\alpha_\nu) = 4\llcorner$.

□

Ασκήσεις

Στις επόμενες Ασκήσεις να μην χρησιμοποιήσετε το αίτημα των παραλλήλων.

Ασκηση 6.5 Θεωρούμε σημεία Α και Β στην ευθεία ε, και σημεία Γ, Δ στην ίδια μεριά της ε, τέτοια ώστε ΑΔ = ΒΓ και ∠ΔΑΒ είναι ίση ή παραπληρωματική της ΓΒΑ. Δείξτε οτι η ευθεία ΓΔ είναι παράλληλη της ε.

Ασκηση 6.6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ δείξε οτι η διάμεσος ΑΜ έχει μήκος μικρότερο από $\frac{1}{2}(|\mathrm{AB}| + |\mathrm{A\Gamma}|)$.

Ασκηση 6.7 Δείξε οτι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των μηκών των διαμέσων είναι μικρότερο σπό την περίμετρο του τριγώνου

Ασκηση 6.8 Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ. Δείξτε οτι οι ευθείες ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.

Στις επόμενες Ασκήσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αίτημα των παραλλήλων.

Ασκηση 6.9 Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχουν δύο σημεία Γ και Γ' σε αντίθετες μεριές της ευθείας ΑΒ, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}\Gamma'$ είναι ισόπλευρα.

Ασκηση 6.10 Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, δείξτε οτι

α΄. Οι διχοτόμοι δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνιών είναι παράλληλες.

β΄. Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι κάθετες.

Ασκηση 6.11 Αν από την κορυφή Α ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη βάση ΒΓ, αυτή διχοτομεί την εξωτερική γωνία του τριγώνου.

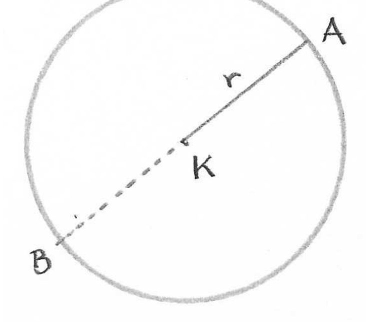
Ασκηση 6.12 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και υποθέτουμε οτι υπάρχει σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ. Μπορείτε να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ;

Κεφάλαιο 7

Ο κύκλος

Ο **κύκλος** (Κ, r) με **κέντρο** Κ και **ακτίνα** r είναι το σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση r από το σημείο Κ. Εάν Α είναι σημείο του κύκλου, το ευθύγραμμο τμήμα ΚΑ ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου. **Εσωτερικό** του κύκλου (Κ, r) ονομάζουμε το σύνολο των σημείων των οποίων η απόσταση από το Κ είναι μικρότερη από την ακτίνα r. **Εξωτερικό** του κύκλου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων των οποίων η απόσταση από το Κ είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα r.

Δύο κύκλοι είναι **επιθέσιμοι** ή **ίσοι** όταν οι ακτίνες τους είναι ίσες.

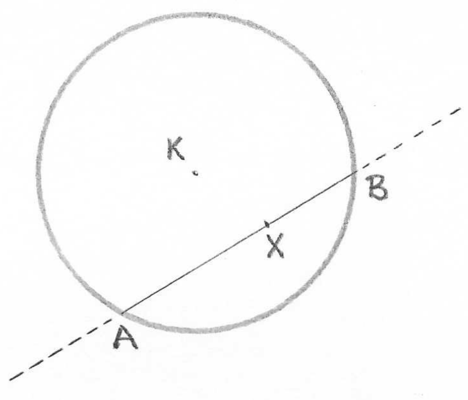


Σχῆμα 7.1: Στοιχεία ενός κύκλου: κέντρο, ακτίνα, διάμετρος.

Από την Ιδιότητα 3.9, μία ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ περιέχει ακριβώς δύο σημεία Α και Β που βρίσκονται σε απόσταση r από το Κ, και συνεπώς ανήκουν στον κύκλο. Τέτοια σημεία λέγονται **αντιδιαμετρικά**. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται **διάμετρος** του κύκλου (Κ, r).

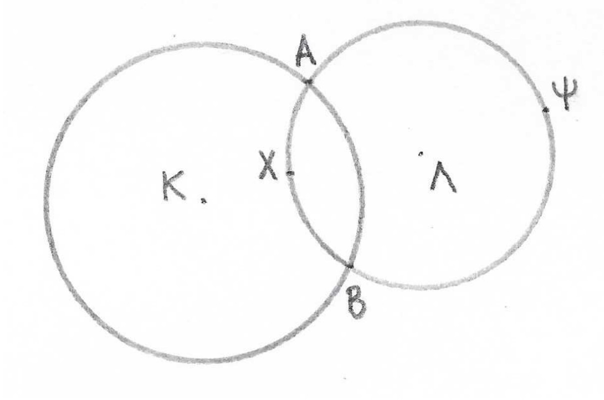
Θα δεχθούμε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες δύο θεμελιώδεις ιδιότητες των κύκλων, οι οποίες μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα του Κεφαλαίου 3.

Θεώρημα 7.1 *Εάν μία ευθεία ε έχει ένα σημείο στο εσωτερικό του κύκλου* (*Κ*, r)*,* *τότε η ευθεία ε έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, Α και Β. Όλα τα σημεία της ευθείας που ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου βρίσκονται μεταξύ του Α και του Β.*



Σχῆμα 7.2: Κοινά σημεία κύκλου και ευθείας.

Θεώρημα 7.2 *Εάν ένας κύκλος (Λ, s) έχει ένα σημείο στο εσωτερικό και ένα σημείο στο εξωτερικό του κύκλου (K, r), τότε ο κύκλος (Λ, s) έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τον κύκλο (K, r).*

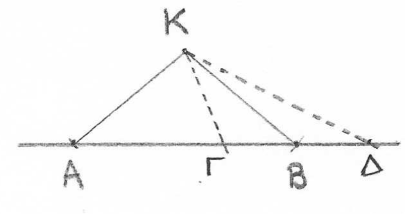


Σχῆμα 7.3: Τεμνόμενοι κύκλοι.

Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β στον κύκλο (K, r). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η **χορδή** που ορίζουν τα δύο σημεία.

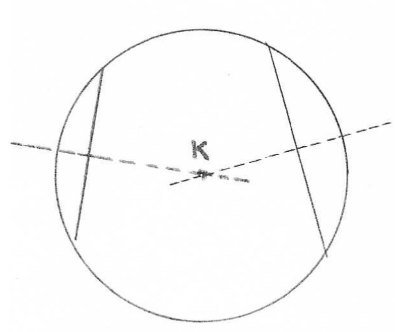
Πρόταση 7.3 *Μία χορδή ΑΒ δεν περιέχει άλλα σημεία του κύκλου εκτός από τα άκρα της Α και Β. Κάθε άλλο σημείο της χορδής βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.*

Λήμμα 7.4 *Εάν KAB είναι ισοσκελές τρίγωνο, $KA = KB$, και Δ είναι σημείο στην ευθεία AB, με $A - B - \Delta$, τότε $K\Delta > KB$. Εάν Γ είναι σημείο με $A - \Gamma - B$, τότε $K\Gamma < KB$.*



Σχῆμα 7.4: Αποστάσεις από σημείο σε ευθεία.

Πρόταση 7.5 *Το κέντρο του κύκλου (K, r) περιέχεται στη μεσοκάθετο κάθε χορδής του κύκλου.*



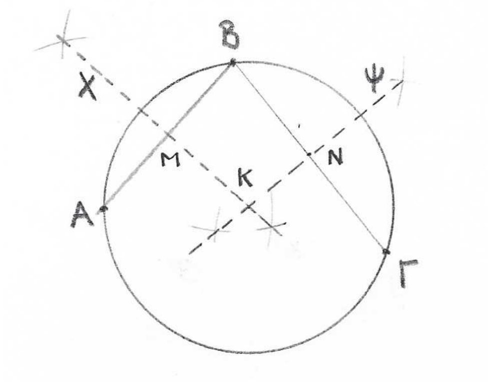
Σχῆμα 7.5: Μεσοκάθετος χορδής.

Πρόταση 7.6 *Το μήκος χορδής του κύκλου (K, r) είναι μικρότερο ή ίσο από το μήκος $2r$ της διαμέτρου. Μία χορδή με μήκος $2r$ συμπίπτει με διάμετρο.*

Κύκλος από τρία σημεία

Θεώρημα 7.7 *Εάν A, B και Γ είναι τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος που διέρχεται από αυτά.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις μεσοκαθέτους ΜΧ και ΝΨ των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Εάν αυτές είναι παράλληλες, τότε οι ευθείες ΒΜ και ΒΝ είναι κάθετες σε



Σχῆμα 7.6: Κύκλος από τρία σημεία.

παράλληλες ευθείες, άρα ταυτίζονται, και τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, άτοπο. Άρα οι μεσοκάθετοι τέμνονται, έστω στο σημείο Κ. Από την ιδιότητα της μεσοκαθέτου έχουμε ΚΑ = ΚΒ και ΚΒ = ΚΓ. Άρα ισχύει και ΚΑ = ΚΓ, δηλαδή το Κ βρίσκεται και στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Ο κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΑ διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

Εάν ένας κύκλος διέρχεται από τα τρία σημεία Α, Β και Γ, τότε το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο των χορδών ΑΒ και ΒΓ, και συνεπώς συμπίπτει με το Κ, ενώ η ακτίνα του είναι ΚΑ. Συμπεραίνουμε οτι ο κύκλος από τα σημεία Α, Β, Γ είναι μοναδικός.

□

Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του. Αυτός ονομάζεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο αυτού του κύκλου λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου.

Πρόταση 7.8 *Μία ευθεία ε περιέχει το πολύ δύο σημεία ενός κύκλου.*

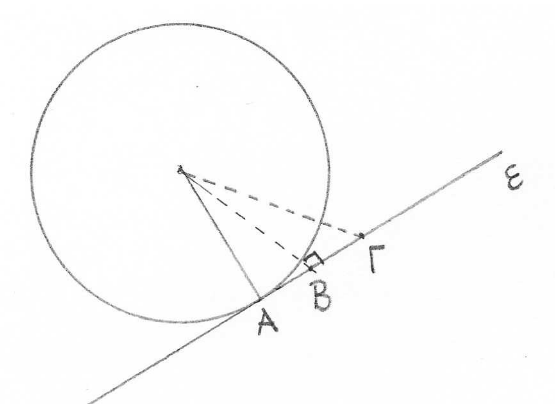
Απόδειξη. Εάν υπήρχαν τρία σημεία της ευθείας ε στον κύκλο, τότε ένα από αυτά θα βρισκόταν μεταξύ των άλλων δύο, δηλαδή στη χορδή που ορίζουν τα άλλα δύο. Αλλά από την Πρόταση 7.3, μία χορδή δεν περιέχει σημεία του κύκλου άλλα από τα άκρα της.

□

Εφαπτόμενη κύκλου

Μία ευθεία που έχει μόνον ένα κοινό σημείο με έναν κύκλο λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου. Το επόμενο Θεώρημα δείχνει οτι υπάρχει μία και μόνο μία εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του κύκλου.

Θεώρημα 7.9 *Μία ευθεία ε που έχει μόνον ένα κοινό σημείο A με κύκλο, είναι κάθετη στο A προς την ακτίνα του κύκλου.*

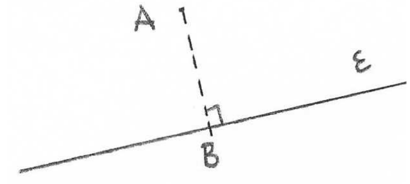


Σχῆμα 7.7: Ακτίνα και εφαπτόμενη.

Απόδειξη. Εάν η ακτίνα ΚΑ δεν είναι κάθετη στην ε, έστω ΚΒ η κάθετος από το Κ στην ε, και σημείο Γ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΚΒΓ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές μία προς μία ίσες, άρα είναι ίσα. Συνεπώς ΚΑ = ΚΓ, και το σημείο Γ βρίσκεται στον κύκλο. 'τοπο, αφού υποθέσαμε οτι η ε έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

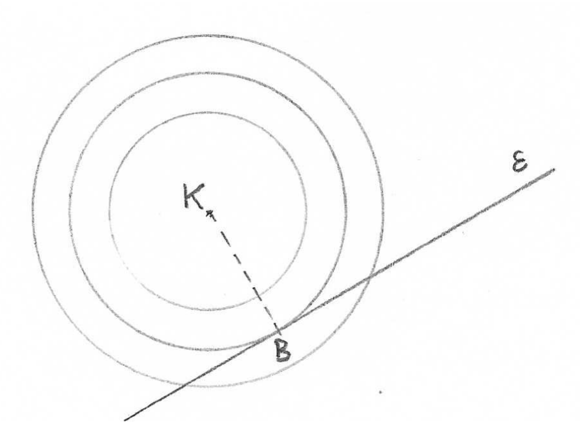
□

Για ευθεία ε και σημείο Α που δεν βρίσκεται στην ε, η **(ορθογώνια) προβολή** του Α στην ε είναι το σημείο Β της ευθείας ε για το οποίο ΑΒ είναι κάθετος στην ε.



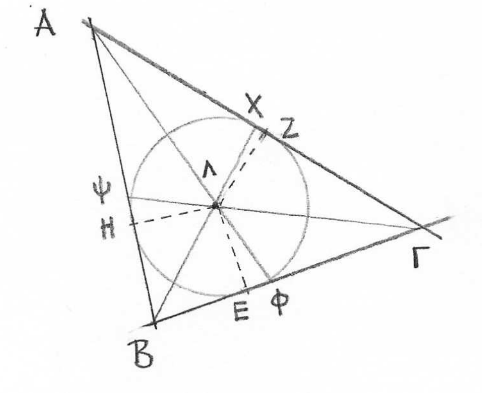
Σχῆμα 7.8: Ορθογώνια προβολή.

Πρόταση 7.10 *Θεωρούμε ευθεία ε και σημείο K που δεν βρίσκεται στην ε. Έστω B η προβολή του A στην ε. Ο κύκλος (K, r) τέμνει την ευθεία ε σε δύο σημεία όταν $|KB| < r$. Ο κύκλος εφάπτεται στην ε όταν $|KB| = r$. Ο κύκλος δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία ε όταν $|KB| > r$.*



Σχῆμα 7.9: Κύκλος και ευθεία.

Θεώρημα 7.11 *Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από ένα κοινό σημείο Λ, το οποίο είναι κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.*



Σχῆμα 7.10: Κύκλος εγγεγραμμένος σε τρίγωνο.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε οτι τα σημεία της διχοτόμου μίας γωνίας είναι τα σημεία που απέχουν εξ ίσου από τις πλευρές της γωνίας, Πρόταση 4.33. Οι διχοτόμοι ΒΧ και ΓΨ των γωνιών ∠Β και ∠Γ τέμνονται σε ένα σημείο Λ, αφού οι γωνίες ∠ΓΒΧ και ∠ΒΓΨ έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Το σημείο Λ απέχει εξ ίσου από την ΒΑ και την ΒΓ, και απέχει εξ ίσου από την ΓΒ και την ΓΑ. Άρα απέχει εξ ίσου και από την ΑΒ και την ΑΓ, συνεπώς το Λ βρίσκεται και στη διχοτόμο ∠ΑΦ.

Θέτουμε Ε, Ζ, Η τις προβολές του Λ πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ είναι ίσα και κάθετα στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Ο κύκλος με κέντρο Λ και ακτίνα ΛΕ διέρχεται από τα σημεία Ε, Ζ και Η, και αφού οι ακτίνες ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ είναι κάθετες στις πλευρές, ο κύκλος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

□

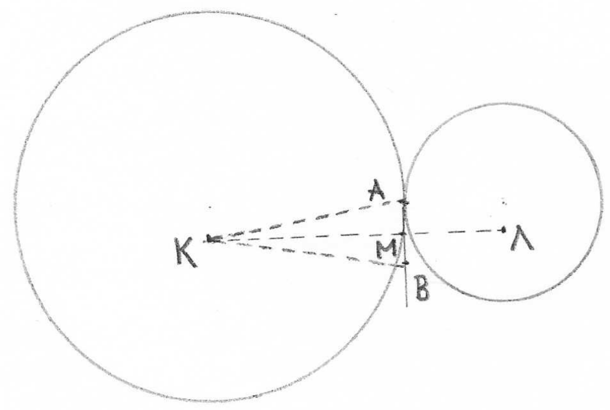
Ο κύκλος με κέντρο Λ που εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου ονομάζεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο αυτού του κύκλου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου.

Εάν δύο κύκλοι έχουν τρία κοινά σημεία τότε, από το Θεώρημα 7.7, ταυτίζονται. Συμπεραίνουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 7.12 *Δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.*

Εάν δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β, η χορδή ΑΒ λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Δύο κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο λέγονται **ομόκεντροι**. Η ευθεία που ενώνει τα κέντρα δύο μή ομόκεντρων κύκλων λέγεται **διάκεντρος**. Δύο κύκλοι που έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο λέγονται **εφαπτόμενοι**.

Πρόταση 7.13 *Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται στη διάκεντρο των δύο κύκλων. Αντίστροφα, εάν δύο κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο στη διάκεντρο, τότε αυτό είναι μοναδικό και οι κύκλοι εφάπτονται.*



Σχήμα 7.11: Σημείο επαφής στη διάκεντρο.

Απόδειξη. Εάν το σημείο Α στο οποίο εφάπτονται δύο κύκλοι δεν είναι στη διάκεντρο ΚΛ, φέρουμε την κάθετο ΑΜ από το Α στη διάκεντρο, και την προεκτείνουμε μέχρι το σημείο Β, έτσι ώστε ΒΜ = ΑΜ. Τα τρίγωνα ΚΑΜ και ΚΒΜ είναι ίσα, άρα ΚΒ = ΚΑ. Τα τρίγωνα ΛΑΜ και ΛΒΜ είναι επίσης ίσα, άρα ΛΒ = ΛΑ. Συνεπώς το σημείο B είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων, άτοπο. Άρα το σημείο A βρίσκεται στη διάκεντρο.

Αντίστροφα, εάν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, A και B, τότε τα κέντρα K και Λ των δύο κύκλων βρίσκονται στη μεσοκάθετο του AB. Συνεπώς κανένα από τα σημεία A, B δεν βρίσκεται στη διάκεντρο KΛ.

□

Πρόταση 7.14 *Δύο κύκλοι* $(K,\, r)$ *και* $(\Lambda,\, s)$ *εφάπτονται σε ένα σημείο εάν και μόνο εάν η διάκεντρος και οι ακτίνες τους ικανοποιούν μία από τις ισότητες*

$$|K\Lambda| = |r - s| \quad \acute{\eta} \quad |K\Lambda| = r + s\,.$$

Δύο κύκλοι $(K,\, r)$ *και* $(\Lambda,\, s)$ *τέμνονται σε δύο σημεία εάν και μόνο εάν η διάκεντρος και οι ακτίνες τους ικανοποιούν τις ανισότητες*

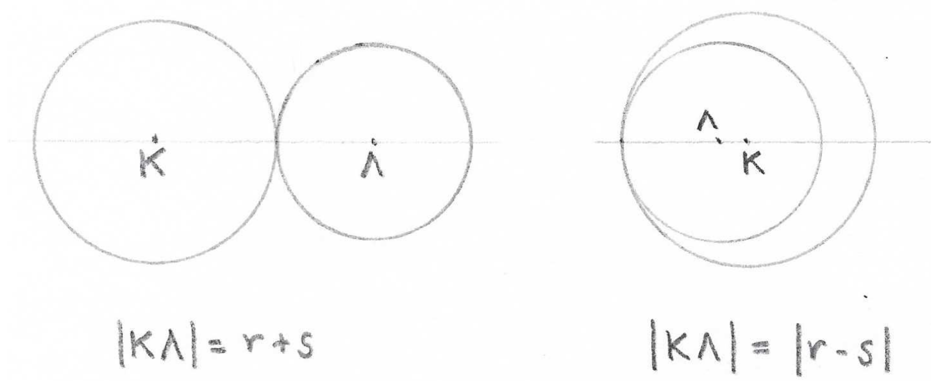
$$|r - s| < |K\Lambda| < r + s\,.$$

Δύο κύκλοι $(K,\, r)$ *και* $(\Lambda,\, s)$ *δεν έχουν κοινά σημεία όταν ικανοποιείται μία από τις ανισότητες*

$$|K\Lambda| < |r - s| \quad \acute{\eta} \quad |K\Lambda| > r + s\,.$$

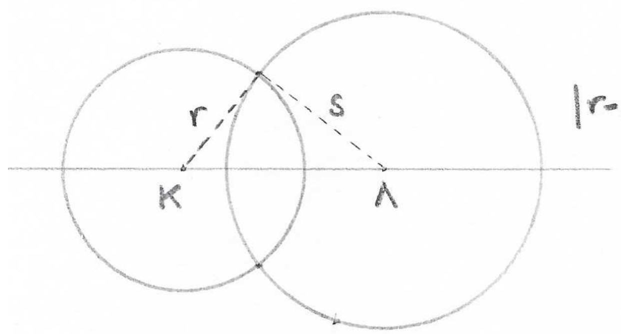
Απόδειξη. Οι δύο κύκλοι εφάπτονται σε ένα σημείο A, εάν και μόνον εάν τα σημεία K, Λ και A βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο, και ισχύει μία από τις ισότητες

$$|\mathrm{K\Lambda}| = |\mathrm{KA}| + |\mathrm{\Lambda A}|, \quad |\mathrm{KA}| = |\mathrm{K\Lambda}| + |\mathrm{\Lambda A}|, \quad |\mathrm{\Lambda A}| = |\mathrm{\Lambda K}| + |\mathrm{KA}|\,.$$



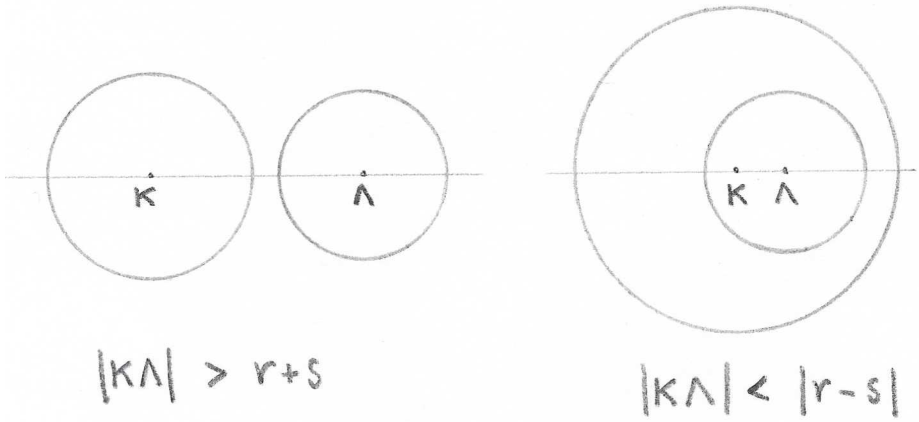
Σχήμα 7.12: Δύο κύκλοι: ένα κοινό σημείο.

Εάν οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, σχηματίζονται δύο τρίγωνα με πλευρές μήκους r, s και $|\mathrm{K}\Lambda|$. Συνεπώς πρέπει να ικανοποιούνται οι τριγωνικές ανισότητες $|r - s| < |\mathrm{K}\Lambda| < r + s$. Αντίστροφα, εάν ικανοποιούνται οι τριγωνικές ανισότητες, υπάρχει σημείο του κύκλου (K, r) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ, s), και από το Θεώρημα 7.2 οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.



Σχήμα 7.13: Δύο κύκλοι: δύο κοινά σημεία.

Εάν ικανοποιείται μία από τις ανισότητες $|\mathrm{K}\Lambda| < |r - s|$ ή $|\mathrm{K}\Lambda| > r + s$, οι κύκλοι δεν έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία. Συνεπώς δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

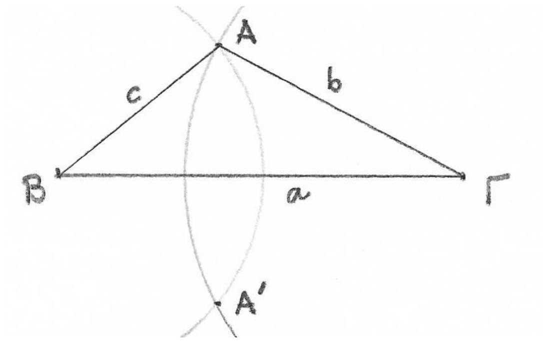


Σχήμα 7.14: Δύο κύκλοι: κανένα κοινό σημείο.

□

Θεώρημα 7.15 *Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών τρεις θετικούς αριθμούς a, b και c εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι τριγωνικές ανισότητες*

$$|b-c| < a < b+c\,.$$



Σχῆμα 7.15: Τρίγωνο με δοθέντα μήκη πλευρών.

Απόδειξη. Εάν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c τότε ικανοποιούνται οι ανισότητες, Θεώρημα 4.23. Αντίστροφα, εάν οι τρεις αριθμοί ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις, θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ μήκους a, και κύκλους (Β, c) και (Γ, b). Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Α και Α$'$ που δεν βρίσκονται στη διάκεντρο ΒΓ. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα, ΑΒΓ και Α$'$ΒΓ, με μήκη πλευρών a, b και c.

□

Ασκήσεις

Ασκηση 7.1 Οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται σε ένα σημείο Γ. Να αποδείξετε οτι η μεσοκάθετος του AB διέρχεται από το Γ.

Ασκηση 7.2 Δίνεται ευθεία ε και σημείο A στην ε. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στην ε στο A.

Ασκηση 7.3 Αν η ευθεία ε τέμενει τους ομόκεντρους κύκλους (K, r) και K, s) σε τέσσερα σημεία A, B, Γ, De, και τα Γ, Δ βρίσκονται μεταξύ των A και B, δείξετε οτι AΓ = BΔ.

Ασκηση 7.4 Εάν (K, r) και (Λ, r) είναι ίσοι κύκλοι που δεν τέμνονται, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τους δύο κύκλους είναι ίσες.

Κεφάλαιο 8

Γεωμετρικές κατασκευές – 1

Στα αιτήματα του Ευκλείδη περιλαμβάνονται μόνο τρία που αναφέρονται στη δυνατότητα κατασκευής ενός σχήματος.

- Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Αυτό σχετίζεται με το γεγονός οτι οι κατασκευές που μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη κατέχουν κεντρική θέση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ο **κανόνας** είναι ευθύς χάρακας χωρίς κανένα διακεκριμένο σημείο. Δεν έχει αρχή ή μονάδα μήκους. Επιτρέπει απλώς να συνδέουμε δύο δοθέντα σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα ή να προεκτείνουμε ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Ο **διαβήτης** επιτρέπει να σχεδιάζουμε κύκλους με δοθέν σημείο ως κέντρο και ακτίνα ίση με δοθέν διάστημα. Μπορούμε επίσης να τον χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε πάνω σε μία ευθεία ένα σημείο που να απέχει από δοθέν σημείο της ευθείας απόσταση ίση με δοθέν διάστημα.

Πολλές απλές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη. Αυτό οδήγησε στα λεγόμενα *άλυτα προβλήματα* της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

- τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας
- κατασκευή κανονικού επταγώνου
- διπλασιασμός του κύβου
- τετραγωνισμός του κύκλου

Αυτός ο περιορισμός του Ευκλείδη δεν εμπόδισε τους αρχαίους γεωμέτρες να χρησιμοποιήσουν και άλλα όργανα προκειμένου να λύσουν κάποια από αυτά τα προβλήματα, όπως τον κανόνα με δύο διακεκριμένα σημεία, το γνώμονα και κάποιες συγκεκριμένες καμπύλες. Τον 19^o αιώνα αποδείχθηκε οτι αυτά τα προβλήματα δεν είναι δυνατόν να λυθούν με κανόνα και διαβήτη.

Βασικές κατασκευές

Για να κατασκευάσουμε ένα σημείο πρέπει να το εκφράσουμε ως τομή δύο ευθειών, δύο κύκλων ή μίας ευθείας και ενός κύκλου που έχουν δοθεί ή μπορούν να κατασκευασθούν από τα δοθέντα.

Για να κατασκευάσουμε μία ευθεία αρκεί να γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας τα οποία έχουν δοθεί ή μπορούν να κατασκευασθούν από τα δοθέντα.

Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο αρκεί να γνωρίζουμε ένα σημείο (το κέντρο του κύκλου) και δύο σημεία που ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα που θα αποτελέσει την ακτίνα του κύκλου.

Η διαδικασία της κατασκευής διακρίνεται στην **ανάλυση**, τη **σύνθεση**, την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

Αν. Στην ανάλυση θεωρούμε οτι έχει κατασκευαστεί το ζητούμενο σχήμα, και προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή του σε θεμελιώδεις γεωμετρικές κατασκευές ή σε κατασκευές που ήδη γνωρίζουμε. Η ανάλυση στοχεύει να μας υποδείξει το δρόμο για τη λύση του προβλήματος.

Σύν. Στη σύνθεση, ακολουθώντας τη λογικά αντίστροφη πορεία της ανάλυσης, περιγράφουμε τις επί μέρους κατασκευές που οδηγούν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος.

Απ. Αφού ολοκληρώσουμε τη σύνθεση, αποδεικνύουμε οτι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες.

Διερ. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις ή να μην υπάρχει καμία λύση. Στη διερεύνηση αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα για να υπάρχει λύση, και εξετάζουμε την ύπαρξη περισσοτέρων λύσεων.

Σε κάποιες από τις επόμενες κατασκευές θα δούμε διεξοδικά τα τέσσερα μέρη.

Ξεκινάμε με την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου, που είναι η πρώτη πρόταση του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων

Κατασκευή 8.1 *Να κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.*

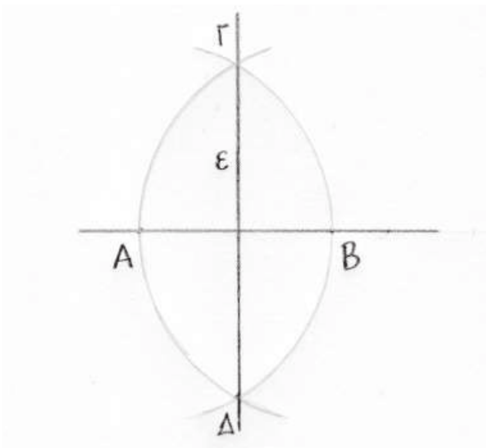
Αν. Εάν ΑΒ είναι το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα, και ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο, ΑΓ είναι ίση με την ΑΒ, άρα το σημείο Γ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ. Παρόμοια, το σημείο Γ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΑΒ. Άρα το σημείο Β είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων.

Σύν. Φέρω τους κύκλους (Α, |ΑΒ|) και (Β, |ΒΑ|). Αφού η απόσταση των κέντρων είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτίνων, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, Γ και Δ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Το ίδιο ισχύει για το τρίγωνο ΑΒΔ.

Απ. Πράγματι, οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Διερ. Παρατηρούμε οτι πάντα μπορεί να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα, και οτι υπάρχουν δύο τέτοια τρίγωνα, ΑΒΓ και ΑΒΔ.

Κατασκευή 8.2 *Να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος.*



Σχήμα 8.1: Κατασκευή μεσοκαθέτου.

Αν. Εάν γνωρίζω δύο σημεία της μεσοκαθέτου του ΑΒ, μπορώ να τη σχεδιάσω. Τα σημεία της μεσοκαθέτου είναι αυτά που ισαπέχουν από τα Α και Β. Ένα σημείο που ισαπέχει από τα Α και Β είναι σημείο τομής δύο κύκλων με κέντρο Α, Β και ίση ακτίνα.

Σύν. Φέρω τους κύκλους (Α, |ΑΒ|) και (Β, |ΒΑ|) που τέμνονται σε δύο σημεία, Γ και Δ. Φέρω την ευθεία ε που περνάει από τα Γ και Δ. Αυτή είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Απ. Πράγματι, εάν ένα σημείο ισαπέχει από τα Α, Β βρίσκεται στην μεσοκάθετο. Άρα τα Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο, και συνεπώς η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος.

Διερ. Παρατηρούμε οτι πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η μεσοκάθετος του διαστήματος ΑΒ, και οτι είναι μοναδική.

Στην Πρόταση 4.24 είχαμε αποδείξει την ύπαρξη και μοναδικότητα του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 3.10 ύπαρξης γωνίας ίσης προς δοθείσα γωνία. Πρακτικά είναι πιο εύκολο να κατασκευάσουμε το μέσο χρησιμοποιώντας τη μεσοκάθετο.

Κατασκευή 8.3 *Να κατασκευάσουμε το μέσο ευθύγραμμου τμήματος.*

Αν. Υποθέτουμε οτι έχουμε βρεί το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το Μ είναι το σημείο τομής του ΑΒ με τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ.

Σύν. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ. Αυτή τέμνει την ευθεία ΑΒ σε ένα σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

Απ. Πράγματι, τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα Α και Β. Άρα το σημείο Μ ισαπέχει από τα Α, Β και βρίσκεται στο διάστημα ΑΒ, άρα είναι το μέσο του ΑΒ.

Διερ. Παρατηρούμε οτι πάντα μπορεί να κατασκευαστεί το μέσο του διαστήματος ΑΒ, και οτι είναι μοναδικό.

Κατασκευή 8.4 *Να κατασκευάσουμε κάθετη σε δοθείσα ευθεία ζ από δοθέν σημείο Α που βρίσκεται πάνω στην ευθεία.*

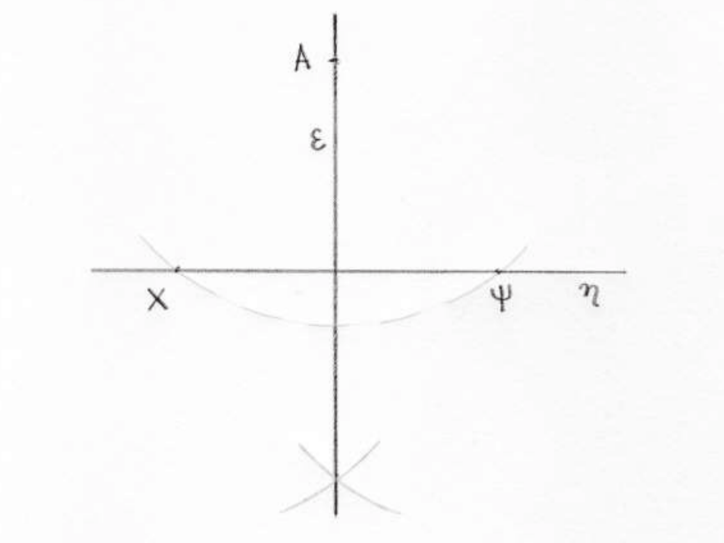
Αν. Η κάθετος στο Α είναι μεσοκάθετος κάθε διαστήματος στην ευθεία ζ του οποίου το Α είναι το μέσο. Άρα αρκεί να βρούμε ένα τέτοιο διάστημα.

Σύν. Έστω Χ τυχόν σημείο της ευθείας, διαφορετικό από το Α. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΧ φέρομε κύκλο. Αυτός τέμνει την ζ σε άλλο ένα σημείο, έστω Ψ. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΧΨ.

Απ. Η ε περνάει από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ζ.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η κάθετος από το Α, και είναι μοναδική.

Κατασκευή 8.5 *Να κατασκευάσουμε κάθετη σε δοθείσα ευθεία ζ από δοθέν σημείο Α που βρίσκεται έξω από την ευθεία.*



Σχῆμα 8.2: Κατασκευή κάθετης από σημείο εκτός της ευθείας.

Αν. Εάν Χ και Ψ είναι σημεία στη ζ που ισαπέχουν από το Α, τότε η μεσοκάθετος του ΧΨ είναι ευθεία κάθετος στη ζ που περνάει από το Α.

Σύν. Έστω Χ τυχόν σημείο της ευθείας. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΧ φέρομε κύκλο. Εάν αυτός εφάπτεται στη ζ, ΑΧ είναι η ζητούμενη ευθεία ε. Εάν αυτός τέμνει τη ζ σε άλλο ένα σημείο, έστω Ψ, κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΧΨ.

Απ. Η ε περνάει από το σημείο Α και είναι κάθετη στη ζ.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η κάθετος από το Α, και είναι μοναδική.

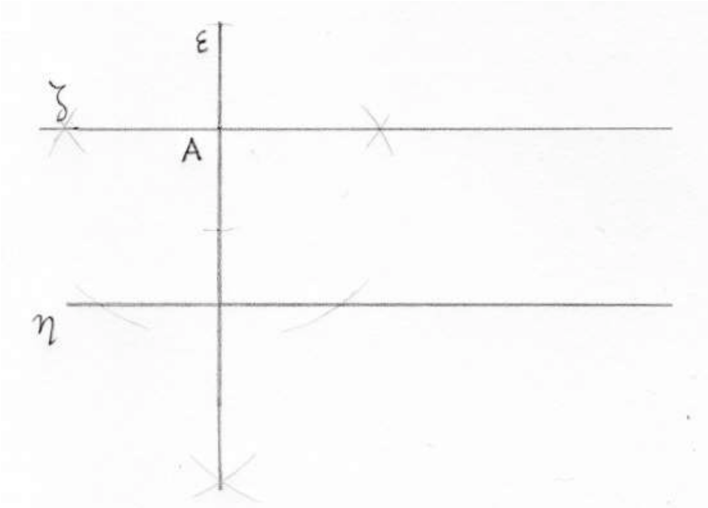
Κατασκευή 8.6 *Να κατασκευάσουμε παράλληλη σε δοθείσα ευθεία ζ από δοθέν σημείο Α που βρίσκεται έξω από την ευθεία.*

Αν. Εάν οι ευθείες ζ και η είναι παράλληλες, τότε κάθε ευθεία κάθετη στη ζ είναι κάθετη και στην η.

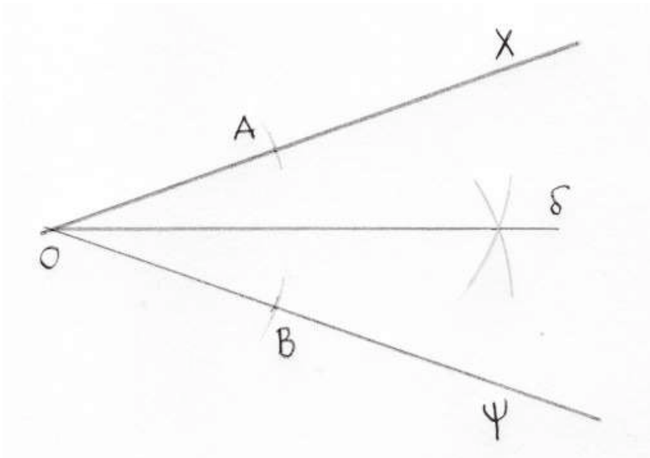
Σύν. Από το Α φέρομε ευθεία ε κάθετη στη ζ. Από το Α φέρομε ευθεία η κάθετη στην ε.

Απ. Η η περνάει από το σημείο Α. Η ε τέμνει τις ζ και η και σχηματίζει τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα η η είναι παράλληλη προς τη ζ.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η παράλληλη από το Α, και είναι μοναδική.



Σχῆμα 8.3: Κατασκευή παράλληλης ευθείας.



Σχῆμα 8.4: Κατασκευή διχοτόμου.

Κατασκευή 8.7 *Να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο γωνίας $\angle X O \Psi$.*

Αν. Εάν τα σημεία A και B πάνω στις ημιευθείες OX και OΨ αντίστοιχα ισαπέχουν από το O, τότε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου OAB είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle$AOB.

Σύν. Επιλέγομε σημείο A πάνω στην ημιευθεία OX και φέρομε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα OA ο οποίος τέμνει την ημιευθεία OΨ στο σημείο B. Από το O φέρομε ευθεία δ κάθετη στην AB. Αυτή είναι η διχοτόμος της $\angle$XOΨ.

Στο Θεώρημα 7.15 είδαμε την κατασκευή τριγώνου με δεδομένα μήκη πλευρών. Χρησιμοποιούμε αυτή την κατασκευή για να κατασκευάσουμε γωνία ίση με δοθείσα γωνία.

Κατασκευή 8.8 *Να κατασκευάσουμε γωνία με πλευρά σε δοθείσα ημιευθεία ΟΧ, ίση προς δοθείσα γωνία ∠ΑΚΒ.*

Στην ημιευθεία ΟΧ κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΔ ίσο με ΚΑ και τρίγωνο ΟΔΕ με ΟΔ = ΚΑ, ΟΕ = ΚΒ και ΔΕ = ΑΒ. Υπάρχουν δύο τέτοια τρίγωνα, και δύο γωνίες ίσες με την ∠ΑΚΒ με πλευρά ΟΧ.

Κατασκευή 8.9 *Να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου δίδεται μία κάθετος πλευρά c και η υποτείνουσα a.*

Αν. Το σημείο Β βρίσκεται στην πλευρά ΑΧ ορθής γωνίας ΧΑΨ, σε απόσταση c από το Α, ενώ το σημείο Γ βρίσκεται στην πλευρά ΑΨ και απέχει a από το Β.

Σύν. Κατασκευάζουμε ορθή γωνία ΧΑΨ, και λαμβάνουμε τμήμα ΑΒ στην ΑΧ ίσο με c. Φέρουμε κύκλο (Β, a), ο οποίος τέμνει την ΑΨ σε δύο σημεία, Γ και Δ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και ικανοποιούν τις απαιτήσεις της κατασκευής.

Διερ. Το τρίγωνο κατασκευάζεται ακριβώς όταν $a > c$.

Κατασκευή 8.10 *Να κατασκευάσουμε τις εφαπτόμενες κύκλου (K, r) από σημείο A εξωτερικό του κύκλου.*

Αν. Το σημείο επαφής Β σχηματίζει με το κέντρο του κύκλου Κ και το σημείο Α ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΚ με υποτείνουσα |ΑΚ| και μία κάθετη πλευρά r.

Σύν. Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με υποτείνουσα ΕΖ = ΚΑ και |ΔΖ| = r. Φέρουμε κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΔΕ. Αυτός τέμνει τον κύκλο (Κ, r) σε δύο σημεία, Β και Γ τα οποία είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων στον κύκλο από το Α.

Απ. Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΓΑΚ είναι ίσα με το ΔΕΖ, άρα οι γωνίες στα Β και Γ είναι ορθές και ΑΒ, ΑΓ είναι εφαπτόμενες στον κύκλο.

Διερ. Εφόσον το σημείο Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, |ΚΑ| > r, και το τρίγωνο ΔΕΖ κατασκευάζεται.

Θα δούμε απλούστερη κατασκευή των εφαπτομένων όταν μιλήσουμε για επίκεντρες και εγγεγραμμένες σε κύκλο γωνίες.

Κατασκευή 8.11 *Να κατασκευάσουμε τις κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων* (K, r) *και* (Λ, s).

Αν. Τα κέντρα των δύο κύκλων (Κ, r) και (Λ, s) μπορεί να βρίσκονται στην ίδια μεριά της κοινής εφαπτομένης ΑΒ ή σε αντίθετες μεριές. Και στις δύο περιπτώσεις οι ακτίνες ΚΑ και ΛΒ είναι κάθετες στην ΑΒ. Στην πρώτη περίπτωση, εάν $r = s$ η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΚΛ. Εάν $r > s$ και Γ είναι η προβολή του Λ στην ΚΑ, σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΛ με υποτείνουσα |ΚΛ| και μία κάθετη πλευρά $r - s$. Στη δεύτερη περίπτωση, εάν Γ είναι η προβολή του Λ στην ΚΑ, σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΛ με υποτείνουσα |ΚΛ| και μία κάθετη πλευρά $r + s$.

Σύν. Εάν $r > s$, κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με υποτείνουσα ΕΖ = ΚΛ και |ΔΕ| = $r - s$. Κατασκευάζουμε σημείο Γέτσι ώστε ∠ΓΚΛ = ∠ΔΕΖ, και ΚΓ = ΕΔ. Προεκτείνουμε την ημιευθεία ΚΓ που τέμνει τον κύκλο (Κ, r) στο Α. Φέρουμε ακτίνα ΛΒ παράλληλη προς την ΚΑ. ΑΒ είναι η κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων που έχει τα κέντρα των δύο κύκλων από την ίδια μεριά. Εάν $r = s$, οι ακτίνες ΚΑ και ΛΒ είναι κάθετες από την ίδια μεριά της ΚΛ.

Για να κατασκευάσουμε τις εφαπτόμενες που έχουν τα κέντρα σε αντίθετες μεριές, κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με υποτείνουσα ΕΖ = ΚΛ και |ΔΕ| = $r+s$. Η ημιευθεία ΚΓ τέμνει τον κύκλο (Κ, r) στο Α. . Φέρουμε ακτίνα ΛΒ παράλληλη προς την ΚΑ. ΑΒ είναι η κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων που έχει τα κέντρα των δύο κύκλων σε αντίθετες μεριές.

Απ. Η κατασκευή παράγει ευθεία κάθετη σε παράλληλες ακτίνες των δύο κύκλων, συνεπώς σε κοινή εφαπτόμενη.

Διερ. Σε κάθε περίπτωση, η κατασκευή του Γ δίδει δύο σημεία, εκατέρωθεν της ευθείας ΚΛ. Κατασκευάζονται δύο εφαπτόμενες κάθε είδους.

Κατασκευή 8.12 *Να κατασκευάσουμε τρίγωνο όταν δίδεται η περίμετρος και δύο γωνίες του.*

Αν. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ, με περίμετρο τ και γωνίες ∠ΑΒΓ = β και ∠ΑΓΒ = γ. Στην προέκταση της βάσης ΒΓ λαμβάνουμε ΒΔ = ΒΑ και ΓΕ = ΓΑ. Σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ, με γωνίες ∠ΑΔΒ = $\frac{1}{2}\beta$ και ∠ΑΕΓ = $\frac{1}{2}\gamma$.

Σύν. Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΔΕ με βάση ΔΕ = τ και γωνίες ∠ΑΔΕ = $\frac{1}{2}\beta$ και ∠ΑΕΔ = $\frac{1}{2}\gamma$. Κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους των ΑΔ και ΑΕ, που τέμνουν τη ΔΕ στα Β και Γ αντίστοιχα. ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Απ. Αφού Β βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΔ, ΑΒ = ΔΒ. Παρόμοια, ΑΓ = ΓΕ. Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ = ΔΒ + ΒΓ + ΓΕ = τ. Η γωνία ∠ΑΒΓ = ∠ΑΔΒ + ∠ΔΑΒ = β, και παρόμοια ∠ΑΓΒ = γ.

Διερ. Η κατασκευή μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε τ, αρκεί οι γωνίες β και γ να έχουν άθροισμα μικρότερο από 2∟.

Ασκήσεις

Ασκηση 8.1 Να κατασκευάσετε κύκλο με ακτίνα $r = \Gamma\Delta$, που να περνάει από τα σημεία Α και Β. (Προσοχή στη διερεύνηση. Ποιά σχέση πρέπει να έχουν τα διαστήματα ΑΒ και ΓΔ για να υπάρχει λύση;)

Ασκηση 8.2 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ίσες με τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΖΗ και τη μεταξύ τους γωνία ίση με τη ΧΟΨ.

Ασκηση 8.3 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ ίση με το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και προσκείμενες γωνίες ίσες με ΧΟΨ και ΛΚΜ.

Ασκηση 8.4 Να κατασκευάσετε ευθεία εφαπτομένη σε κύκλο σε δοθέν σημείο του κύκλου.

Ασκηση 8.5 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε την πλευρά $|\mathrm{B\Gamma}| = a$, το ύψος $|\mathrm{AK}| = \upsilon_a$ και τη διάμεσο $|\mathrm{AM}| = \mu_a$.

Ασκηση 8.6 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε την πλευρά a, το ύψος υ_a και τη διάμεσο $|\mathrm{BN}| = \mu_b$.

Ασκηση 8.7 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε τις πλευρές $|\mathrm{A\Gamma}| = b$, $|\mathrm{AB}| = c$ και τη διάμεσο μ_a.

Ασκηση 8.8 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ όταν γνωρίζετε τη διχοτόμο $|\mathrm{A\Delta}| = \delta_a$, την πλευρά $|\mathrm{AB}| = c$ και τη διαφορά των γωνιών $\omega = |(|\angle \mathrm{B}| - |\angle \Gamma|)|$.

Ασκηση 8.9 Δίδονται τρεις ίσοι κύκλοι, των οποίων τα κέντρα δεν είναι συνευθειακά. Να βρείτε σημείο Α τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες από το Α προς τους τρεις κύκλους είναι ίσες.

Ασκηση 8.10 Δίδονται τρία σημεία Δ, Τ και Σ. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε Δ είναι ένα σημείο της βάσης ΒΓ και ΒΣ και ΓΤ είναι τα ύψη στις δύο ίσες πλευρές.

Ασκηση 8.11 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία οι δύο εφαπτόμενες προς δοθέντα κύκλο είναι κάθετες μεταξύ τους.

Κεφάλαιο 9

Ορισμοί στα Μαθηματικά

Οι ορισμοί στα Μαθηματικά έχουν μία ιδιαίτερη σημασία, και αποτελούν συχνά αντικείμενο δυσκολιών στη διδασκαλία.

Ο ορισμός μίας λέξης σε ένα λεξικό περιγράφει τη χρήση της λέξης σε μία κοινωνία, πιθανόν παρουσιάζοντας τις διαφορετικές χρήσεις της λέξης σε διαφορετικές εποχές ή σε διαφορετικές περιστάσεις.

Στα Μαθηματικά ένας ορισμός δεν περιγράφει τη χρήση ενός όρου, αλλά προσδιορίζει τη σημασία του. Για παράδειγμα, η λέξη *όμοιος* σε ένα λεξικό της Ελληνικής γλώσσας μπορεί να ορίζεται:
όμοιος: αυτός που έχει τα ίδια ή παραπλήσια γνωρίσματα, σχήμα ή ιδιότητες.

Στα Μαθηματικά η λέξη *όμοιος* ορίζεται:
όμοιος: όμοια σχήματα: σχήματα που έχουν ανάλογα μήκη και ίσες γωνίες.

Ένας μαθηματικός ορισμός είναι μία σύντομη διατύπωση βασικών ιδιοτήτων μίας έννοιας που την ταυτοποιούν χωρίς καμμία αμφιβολία. Ο μαθηματικός ορισμός χρησιμεύει:
για συντομία στην έκφραση, ώστε να μην απαριθμούνται οι χαρακτηριστικές ιδιότητες μίας έννοιας ή ενός αντικειμένου,
για να ελεγχθεί εάν ένα αντικείμενο εμπίπτει σε μία κατηγορία,
για να εξαχθούν συμπεράσματα για άλλες ιδιότητες ενός αντικειμένου, μέσω της παραγωγικής μεθόδου.

Αυτές οι χρήσεις καθορίζουν την επιλογή ενός ορισμού. Είναι επιθυμητό ο ορισμός να αναφέρει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για τον προσδιορισμό μίας κατηγορίας αντικειμένων, ώστε να είναι ευκολότερος ο έλεγχος εάν ένα αντικείμενο εμπίπτει στην κατηγορία. Για παράδειγμα, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ένα ορθογώνιο μπορεί να ορίζεται ως ένα τετράπλευρο που έχει τρεις ορθές γωνίες, παρ΄ όλο που όλα τα ορθογώνια έχουν τέσσερεις ορθές γωνίες.

Ένας άλλος παράγων που μπορεί να καθορίσει την επιλογή ενός ορισμού είναι το είδος της ταξινόμησης των αντικειμένων στην οποία αποβλέπουν οι ορισμοί. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Διακρίνουμε δύο βασικά διαφορετικούς τρόπους να ταξινομήσουμε τα αντικείμενα ενός συνόλου: την ιεραρχική ταξινόμηση και τη διαμεριστική ταξινόμηση.

Στην **ιεραρχική ταξινόμηση** κάθε κατηγορία αντικειμένων είναι υποσύνολο μίας άλλης κατηγορίας. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ως υποσύνολο όλων των τριγώνων, και τα ισόπλευρα τρίγωνα ως υποσύνολο των ισοσκελών.

Στη **διαμεριστική ταξινόμηση** οι υποκατηγορίες μίας κατηγορίας είναι ξένες μεταξύ τους και την εξαντλούν. Για παράδειγμα, τα τρίγωνα διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, τα σκαληνά, τα ισοσκελή και τα ισόπλευρα. Με αυτή την ταξινόμηση ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν θεωρείται ισοσκελές.

Συνήθως η ταξινόμηση είναι ένας συνδυασμός αυτών των δύο βασικών διαφορετικών τρόπων. Μία περίπτωση που θα μας απασχολήσει σε αυτό το μάθημα είναι η ταξινόμηση των τετραπλεύρων.

Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων

Στον ορισμό κβ΄ των Στοιχείων ορίζονται τα διάφορα είδη τετραπλεύρων. Ακολουθείται η διαμεριστική ταξινόμηση, την οποία προκρίνει ο Αριστοτέλης. Έτσι τα τετράπλευρα διακρίνονται σε 5 κατηγορίες, τα *τετράγωνα*, τα *ετερομήκη* (ορθογώνια παραλληλόγραμμα), τους *ρόμβους*, τα *ρομβοειδή* (πλάγια παραλληλόγραμμα) και τα *τραπέζια* (όλα τα υπόλοιπα). Αυτή η κατηγοριοποίηση γίνεται στη βάση της ισότητας ή μη των πλευρών και της ύπαρξης κάθετων πλευρών. Δεν χρησιμοποιείται η παραλληλία των πλευρών. Μάλιστα οι παράλληλες ευθείες ορίζονται στον επόμενο Όρο κγ΄.

Ὅρος κβ΄:

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων **τετράγωνον** μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, **ἑτερόμηκες** δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, **ῥόμβος** δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν οὐκ ὀρθογώνιον δέ, **ῥομβοειδὲς** δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ισόπλευρον ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα **τραπέζια** καλείσθω.

Ήδη από την αρχαιότητα υπήρξαν διαφορετικές προσεγγίσεις της ταξινόμησης των τετραπλεύρων, όπως αυτή του Ποσειδωνίου και του Ήρωνα, η οποία ακολουθεί την ιεραρχική ταξινόμηση, με κριτήρια πρώτα την ύπαρξη ή μη παραλλήλων πλευρών, κατόπιν για τα παραλληλόγραμμα την ύπαρξη ορθών γωνιών και τέλος την ισότητα των πλευρών.

Στη σύγχρονη πρακτική η ταξινόμηση των κυρτών τετραπλεύρων συνήθως αποτελεί συνδυασμό ιεραρχικής και διαμεριστικής ταξινόμησης. Αρχικά διακρίνονται τα κυρτά τετράπλευρα ως προς την παραλληλία των πλευρών τους και ταξινομούνται σε αυτά που

- έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες —**παραλληλόγραμμα**
- έχουν μόνο δύο απέναντι πλευρές παράλληλες —**τραπέζια**
- δεν έχουν παράλληλες πλευρές.

Κατόπιν στα παραλληλόγραμμα διακρίνονται τα υποσύνολα των **ορθογωνίων παραλληλογράμμων** και των ισόπλευρων παραλληλογράμμων ή **ρόμβων**, με τα **τετράγωνα** να αποτελούν την τομή των ορθογωνίων και των ρόμβων.

Τα τραπέζια διακρίνονται σε **ισόπλευρα** και **σκαληνά**.

Τέλος μία άλλη σημαντική κατηγορία τετραπλεύρων είναι αυτά που είναι εγγράψιμα σε κύκλο. Τα εγγράψιμα περιλαμβάνουν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τα ισοσκελή τραπέζια, αλλά και τετράπλευρα χωρίς παράλληλες πλευρές.

Οι ορισμοί στη Διδακτική

Οι μαθήτριες και οι μαθητές συχνά συγχέουν το μαθηματικό ορισμό με την καθημερινή έννοια του ορισμού ως περιγραφή της χρήσης μίας λέξης. Έτσι μπορεί να μη δίδουν την απαραίτητη προσοχή σε στοιχεία του ορισμού, ή να απαριθμούν περισσότερες ιδιότητες, που δεν περιλαμβάνονται στον ορισμό. Ή μπορεί να συγχέουν έναν ορισμό με ένα θεώρημα ή ένα αξίωμα. Αυτές οι διακρίσεις είναι σημαντικές για τα Μαθηματικά, και πρέπει να είναι κατανοητές από φοιτήτριες και φοιτητές που ειδικεύονται σε αυτά, αλλά πρέπει να αναρωτηθούμε κατά πόσο είναι σημαντικές για μαθητές ή ακόμα και για φοιτήτριες που σπουδάζουν Μαθηματικά στο πλαίσιο μίας άλλης επιστήμης.

Μερικές φορές ο καλύτερος ορισμός από μαθηματική άποψη, δεν είναι ο καταλληλότερος για να κατανοήσει την έννοια μία μαθήτρια. Για παράδειγμα, ο πιο οικονομικός τρόπος να ορίσουμε ένα ορθογώνιο είναι ως *ένα τετράπλευρο με 3 ορθές γωνίες*. Αυτός ο ορισμός είναι κομψός από μαθηματική άποψη, αλλά από λεξικογραφική άποψη δεν είναι ο πιο φυσιολογικός. Ο μαθητής που προσπαθεί να κατασκευάσει μία νοερή εικόνα για το ορθογώνιο χρειάζεται την πληροφορία οτι και οι τέσσερεις γωνίες είναι ορθές. Χωρίς αυτή την πληροφορία μπορεί να δυσκολευτεί ή να μην καταφέρει να κατασκευάσει μία ικανοποιητική νοερή εικόνα.

Η διάκριση μεταξύ του ορισμού μία έννοιας και της νοερής εικόνας της έννοιας είναι πολύ σημαντική στην Διδακτική των Μαθηματικών. Η νοερή εικόνα που αντιστοιχεί σε μία έννοια στο μυαλό κάθε μαθήτριας και κάθε μαθητή, περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας (ή ότι έχει συγκρατήσει από τον ορισμό το συγκεκριμένο άτομο) αλλά και άλλα στοιχεία που συνδέονται με αυτή την έννοια. Τέτοια στοιχεία είναι παραδείγματα και μη-παραδείγματα, σχήματα, εφαρμογές της έννοιας, ιδιότητες που έχει ή που δεν έχει ένα αντικείμενο, θεωρήματα ή άλλα αποτελέσματα σχετικά με την έννοια.

Η νοερή εικόνα μίας έννοιας είναι μοναδική για κάθε άτομο, αποτέλεσμα της εμπειρίας του μαθητή ή της μαθήτριας με περιπτώσεις ή μη περιπτώσεις της έννοιας και εξελίσσεται με το χρόνο καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα.

Στη νοερή εικόνα μπορεί να περιλαμβάνονται αντιφατικά στοιχεία. Ο μαθηματικός ορισμός, ο οποίος επίσης περιλαμβάνεται στη νοερή εικόνα, μπορεί να χρησιμεύσει στην επίλυση τέτοιων αντιφάσεων. Όταν δύο αντικρουόμενα στοιχεία της νοερής εικόνας μία έννοιας περιέλθουν ταυτόχρονα στην προσοχή του ατόμου, η σύγκριση των στοιχείων με το μαθηματικό ορισμό μπορεί να αποκαλύψει την παρανόηση στην οποία οφείλεται η αντίφαση.

Στόχος της διαδικασίας της μάθησης είναι ο εμπλουτισμός της νοερής εικόνας των διαφόρων μαθηματικών εννοιών, και η βελτίωση της συνοχής της, με την επίλυση των αντιφάσεων.

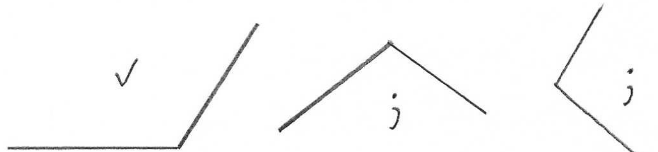
Σε έρευνα σε μαθητές και μαθήτριες του Γυμνασίου παρατηρήθηκαν παρανοήσεις ή περιορισμοί στη νοερή εικόνα γεωμετρικών αντικειμένων, όπως οι ακόλουθες:

- Μία αμβλεία γωνία έχει μία πλευρά οριζόντια. Έτσι μία γωνία όπως στο Σχήμα 9.1 δεν αναγνωρίζεται ως αμβλεία.

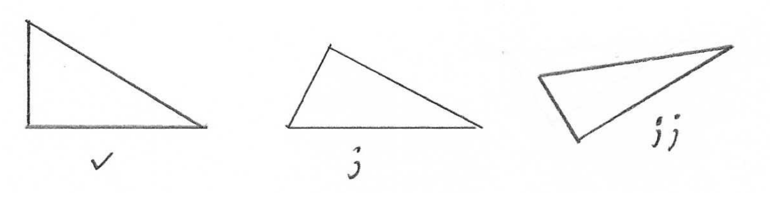
- Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι οριζόντια και κατακόρυφη, Σχήμα 9.2.

- Όταν ζητήθηκε να σχεδιάσουν το ύψος ενός τριγώνου, το ποσοστό επιτυχίας ήταν πολύ χαμηλό για αμβλυγώνια τρίγωνα, όπου το ίχνος του ύψους βρίσκεται έξω από το τρίγωνο, Σχήμα9.3.

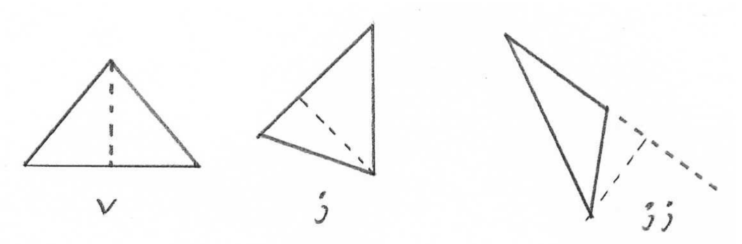
Τέτοιες παρανοήσεις μπορεί να οφείλονται στα παραδείγματα τα οποία παρουσιάζονται στο βιβλίο ή κατά τη διδασκαλία.



Σχήμα 9.1: Αναγνωρίζονται αυτές οι γωνίες ως αμβλείες;



Σχήμα 9.2: Αναγνωρίζονται αυτά τα τρίγωνα ως ορθογώνια;

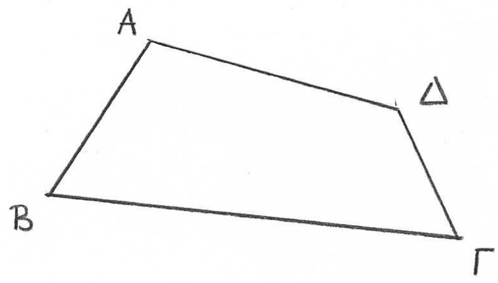


Σχήμα 9.3: Μπορούν να σχεδιάσουν το ύψος αυτών των τριγώνων;

Κεφάλαιο 10

Τετράπλευρα

Τετράπλευρο είναι το σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι οι **κορυφές** του τετραπλεύρου. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ είναι οι **πλευρές** του τετραπλεύρου. Το τετράπλευρο με κορυφές Α, Β, Γ, Δ και πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΑ συμβολίζεται ΑΒΓΔ.



Σχήμα 10.1: Τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

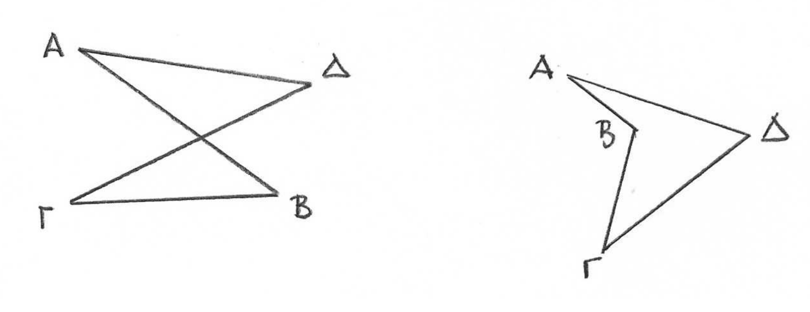
Παρατηρήστε οτι ΑΒΓΔ, ΒΔΓΑ και ΔΓΒΑ συμβολίζουν το ίδιο τετράπλευρο, αλλά ΑΓΒΔ και ΑΒΔΓ συμβολίζουν διαφορετικά τετράπλευρα.

Εάν οι πλευρές ενός τετραπλεύρου δεν έχουν κοινά σημεία εκτός από τις κορυφές, λέμε οτι το τετράπλευρο είναι **απλό**. Στην αντίθετη περίπτωση το ονομάζουμε μή-απλό ή **αυτοτεμνόμενο**.

Εάν σε ένα απλό τετράπλευρο υπάρχουν κορυφές και από τις δύο μεριές μίας πλευράς του τετραπλεύρου, λέμε οτι το τετράπλευρο είναι **μή-κυρτό**. Στην αντίθετη περίπτωση το τετράπλευρο ονομάζεται **κυρτό**.

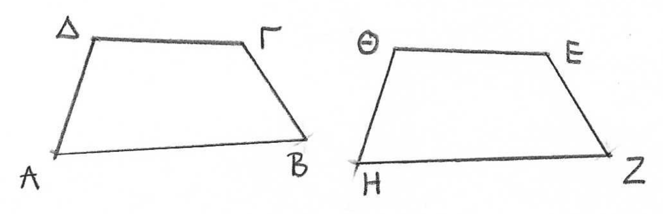
Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε μόνο με απλά κυρτά τετράπλευρα.

Δύο πλευρές ενός (κυρτού) τετραπλεύρου που δεν έχουν κοινή κορυφή λέγονται



Σχῆμα 10.2: Αυτοτεμνόμενο και μή κυρτό τετράπλευρο.

απέναντι. **Διαγώνιοι** του τετραπλεύρου λέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από δύο κορυφές που δεν βρίσκονται στην ίδια πλευρά. **Εσωτερικές γωνίες** του τετραπλεύρου είναι οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο πλευρών του τετραπλεύρου με μία κοινή κορυφή. Κάθε εσωτερική γωνία περιέχει την τέταρτη κορυφή στο εσωτερικό της. **Απέναντι** γωνίες είναι οι εσωτερικές γωνίες που δεν έχουν μία κοινή πλευρά.



Σχῆμα 10.3: Ίσα τετράπλευρα.

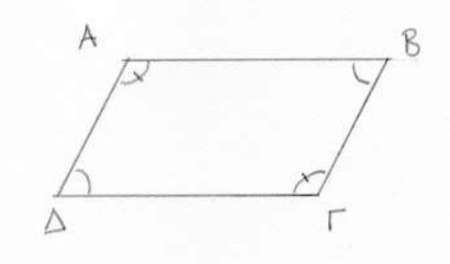
Δύο τετράπλευρα είναι **ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες και αντίστοιχες γωνίες ίσες. Στο Σχήμα 10.3, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ίσο με τα ΕΖΗΘ, ΖΗΘΕ και ΗΖΕΘ, αλλά όχι με το ΕΗΖΘ και το ΕΗΘΖ.

Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο στο οποίο οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

Θα εξετάσουμε *αναγκαίες συνθήκες* ενός παραλληλογράμμου, δηλαδή τις ιδιότητες που έχει κάθε παραλληλόγραμμο.

Πρόταση 10.1 *Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες.*

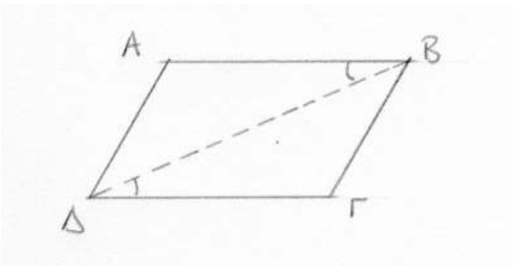


Σχῆμα 10.4: Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες.

Απόδειξη. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ. Θα δείξουμε οτι ∠Α = ∠Γ και ∠Β = ∠Δ. Οι γωνίες ∠Β και ∠Δ είναι παραπληρωματικές της ∠Α ως εντός και επί τα αυτά. Άρα ∠Β = ∠Δ. Οι γωνίες ∠Α και ∠Γ είναι παραπληρωματικές της ∠Β ως εντός και επί τα αυτά. Άρα ∠Α = ∠Γ.

□

Πρόταση 10.2 *Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.*



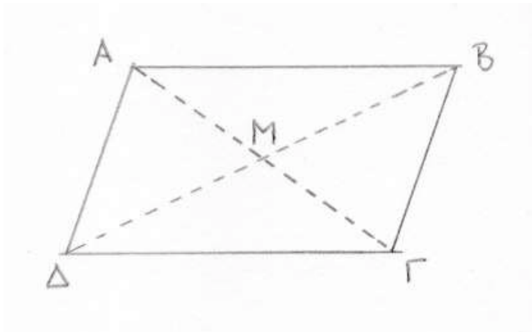
Σχῆμα 10.5: Κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Απόδειξη. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, και διαγώνιο ΒΔ. Θα δείξουμε οτι ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΓΒ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ έχουν την ΒΔ κοινή και ∠ΑΒΔ = ∠ΓΔΒ, ∠ΑΔΒ = ∠ΓΒΔ ως εντός εναλλάξ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ = ΓΔΒ, και ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΓΒ.

□

Πρόταση 10.3 *Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται.*

Απόδειξη. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ. Θα δείξουμε οτι οι διαγώνιοι έχουν κοινό σημείο, και οτι αυτό είναι το μέσο τους. Οι γωνίες ∠ΒΑΓ και ∠ΑΒΓ είναι μικρότερες από τις ∠Α και ∠Β, οι οποίες είναι παραπληρωματικές. Από το 5^o αίτημα, συμπεραίνουμε οτι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται σε σημείο Μ.



Σχῆμα 10.6: Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται.

Θα δείξουμε οτι Μ είναι το μέσο της ΑΓ και της ΒΔ, δηλαδή οτι ΑΜ = ΓΜ και ΒΜ = ΔΜ. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΔΜ έχουν ΑΒ = ΓΔ, ∠ΒΑΓ = ∠ΔΓΑ και ∠ΑΒΔ = ∠ΓΔΒ. Άρα είναι ίσα, και ΑΜ = ΓΜ, ΒΜ = ΔΜ.

□

Αυτές οι ιδιότητες ισχύουν σε κάθε παραλληλόγραμμο: αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα σχήμα παραλληλόγραμμο. Θα δείξουμε οτι κάθε μία από αυτές είναι και ικανή συνθήκη για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο: ένα τετράπλευρο που έχει μία από αυτές τις ιδιότητες είναι παραλληλόγραμμο.

Πρόταση 10.4 *Εάν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και υποθέτουμε οτι ∠Α = ∠Γ, ∠Β = ∠Δ. Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι ∠Α + ∠Β + ∠Γ + ∠Δ = 4 ορθές. Άρα 2∠Α + 2∠Β = 4 ορθές. Συνεπώς οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες, αφού οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ∠Α και ∠Β είναι παραπληρωματικές. Επίσης ∠Δ = ∠Β, άρα οι ∠Α και ∠Δ είναι παραπληρωματικές, και συνεπώς οι ευθείες ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

□

Πρόταση 10.5 *Εάν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και υποθέτουμε οτι ΑΒ = ΔΓ και ΑΔ = ΒΓ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ έχουν τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Συνεπώς οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες: ∠ΑΒΔ = ∠ΓΔΒ και ∠ΑΔΒ = ∠ΓΒΔ. Άρα οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

□

Πρόταση 10.6 *Εάν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και υποθέτουμε οτι ΑΒ = ΔΓ και ΑΒ || ΔΓ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΔΒ έχουν τις γωνίες ∠ΑΒΔ και ∠ΓΔΒ ίσες μία προς μία, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών. Η πλευρά ΒΔ είναι κοινή, και ΑΒ = ΔΓ από υπόθεση. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, και ΑΔ = ΒΓ. Από την Πρόταση 10.5, ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

□

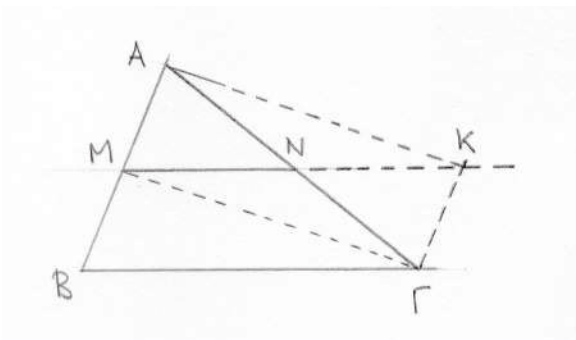
Πρόταση 10.7 *Εάν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, Μ τό σημείο τομής των ΑΓ και ΔΒ. Υποθέτουμε οτι ΑΜ = ΓΜ και ΒΜ = ΔΜ. Στα τρίγωνα ΜΔΑ και ΜΒΓ έχουμε ∠ΑΜΔ = ∠ΓΜΒ ως κατακορυφή, και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, και συνεπώς ∠ΜΔΑ = ∠ΜΒΓ, ΔΑ = ΒΓ. Άρα οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Από την Πρόταση 10.6, ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

□

Τα μέσα των πλευρών

Πρόταση 10.8 *Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.*



Σχήμα 10.7: Το τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών τριγώνου.

Απόδειξη. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, Μ είναι το μέσο της ΑΒ και Ν το μέσο της ΑΓ. Προεκτείνουμε τη ΜΝ προς το Ν και λαμβάνουμε ΝΚ = ΜΝ. Αν δείξουμε οτι ΜΚΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε ΜΝ || ΒΓ και ΜΚ = ΒΓ, άρα ΜΝ = $\frac{1}{2}$ΜΚ = $\frac{1}{2}$ΒΓ.

Για να δείξουμε οτι ΜΚΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε οτι ΚΓ είναι ίσο και παράλληλο με το ΜΒ. Παρατηρούμε οτι ΑΚΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιες διχοτομούνται. Άρα ΚΓ είναι ίσο και παράλληλο με το ΑΜ. Αλλά ΑΜ = ΜΒ και συνεπώς ΚΓ είναι ίσο και παράλληλο προς το ΜΒ.

□

Συνέπεια της Πρότασης 10.8 είναι η ακόλουθη ιδιότητα των τετραπλεύρων.

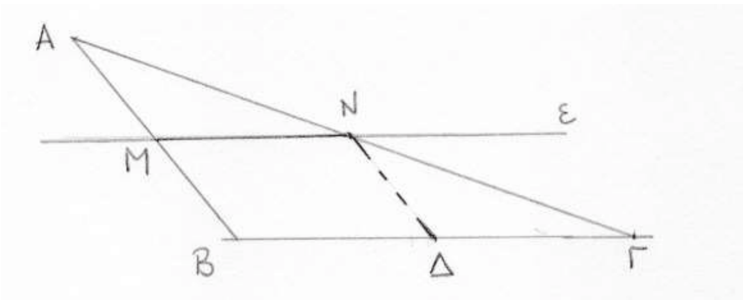
Πόρισμα 10.9 *Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.*

Η ακόλουθη Πρόταση είναι το αντίστροφο της Πρότασης 10.8.

Πρόταση 10.10 *Εάν μία ευθεία τέμνει δύο πλευρές ενός τριγώνου στα Μ και Ν, και το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της, τότε Μ και Ν είναι τα μέσα των δύο πλευρών.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ στην ΑΒ και Ν στην ΑΓ τέτοια ώστε ΜΝ είναι παράλληλο προς την ΒΓ και ίσο με το μισό της. Φέρουμε τη ΝΔ παράλληλη προς την ΑΒ. Τότε ΜΝΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, και ΜΝ = ΒΔ. Αλλά ΜΝ = $\frac{1}{2}$ΒΓ, άρα Δ είναι το μέσο της ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΝΔΓ έχουν από μία πλευρά ίσες, ΜΝ = ΔΓ και τις προσκείμενες γωνίες επίσης ίσες, ∠ΜΝΑ = ∠ΔΓΝ και ∠ΑΜΝ = ∠ΝΔΓ. Άρα είναι ίσα και ΑΝ = ΝΓ, ΑΜ = ΝΔ = ΜΓ.

□



Σχήμα 10.8: Ευθεία παράλληλη στη βάση τριγώνου, που τέμνει δύο πλευρές του.

Ένα άλλο σχετικό αποτέλεσμα είναι η ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 10.11 *Εάν μία ευθεία ε διέρχεται από το μέσο μίας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του τριγώνου, τότε η ε διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσον της ΑΒ, και Ν σημείο στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΜΝ || ΒΓ. Θα δείξουμε οτι ΑΝ = ΝΓ.

Από το Ν φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Δ. Τότε ΜΝΔΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του παράλληλες. Τότε ΑΜ = ΜΒ = ΝΔ. Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΝΔΓ έχουν από μία πλευρά ίσες, ΑΜ = ΝΔ, και τις προσκείμενες γωνίες επίσης ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά, ∠Α = ∠ΔΝΓ και ∠ΑΜΝ = ∠Β = ∠ΝΔΓ. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ΑΝ = ΝΓ.

□

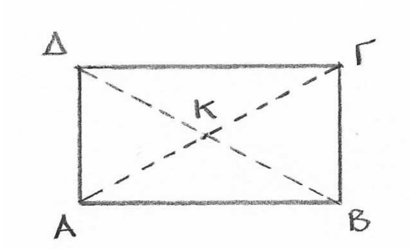
Είδη παραλληλογράμμων

Ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία έχει όλες τις γωνίες ορθές (ως παραπληρωματικές ορθής γωνίας), και ονομάζεται **ορθογώνιο**.

Ένα παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες έχει όλες τις πλευρές ίσες, και ονομάζεται **ρόμβος**.

Ένα ορθογώνιο που είναι και ρόμβος ονομάζεται **τετράγωνο**.

Θεώρημα 10.12 *Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο εάν και μόνον εάν έχει τις διαγώνιες ίσες.*



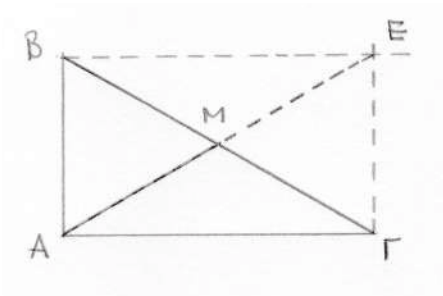
Σχήμα 10.9: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη. Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Θα δείξουμε οτι οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ είναι ίσα, αφού έχουν τη ΔΓ κοινή και ΑΔ = ΒΓ. Άρα και οι υποτείνουσες είναι ίσες, ΑΓ = ΒΔ.

Αντίστροφα, έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΓ = ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ είναι ίσα, αφού έχουν όλες τις πλευρές ίσες. Άρα ∠ΑΔΓ = ∠ΒΓΔ. Αλλά αφού ΑΔ || ΒΓ, οι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Άρα κάθε μία είναι ίση με μία ορθή.

□

Πρόταση 10.13 *Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και χωρίζει το ορθογώνιο τρίγωνο σε δύο ισοσκελή.*

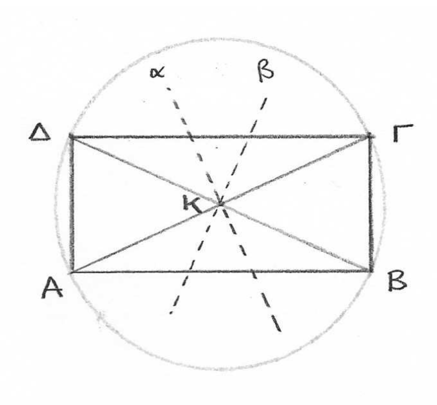


Σχῆμα 10.10: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου.

Απόδειξη. Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, και τη διάμεσο στην υποτείνουσα ΑΜ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ προς το Μ και λαμβάνουμε ΜΕ = ΑΜ. Τότε η διαγώνιες ΑΕ και ΒΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΕ διχοτομούνται, άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο. Αφού η $\angle$Α είναι ορθή, το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, άρα οι διαγώνιες είναι ίσες και ΒΓ = ΑΕ = 2ΑΜ.

□

Θεώρημα 10.14 *Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο εάν και μόνον εάν εγγράφεται σε κύκλο, δηλαδή υπάρχει κύκλος που διέρχεται και από τις τέσσερεις κορυφές του.*



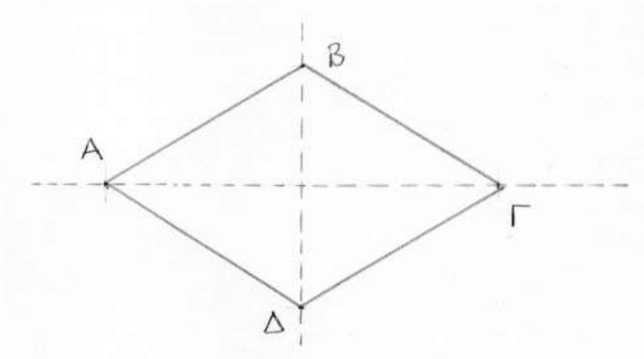
Σχῆμα 10.11: Εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη. Αν ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε το σημείο τομής των διαγωνίων ισαπέχει από τις τέσσερεις κορυφές, άρα το ορθογώνιο εγγράφεται σε κύκλο.

Αντίστροφα, εάν ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται, άρα το κοινό τους μέσο είναι και κοινό σημείο των μεσοκαθέτων τους α και *β*. Εάν οι κορυφές του παραλληλογράμμου βρίσκονται σε κύκλο, τότε οι μεσοκάθετες των διαγωνίων του περιέχουν το κέντρο του κύκλου. Άρα αυτό είναι το σημείο τομής των δύο διαγωνίων, που είναι διάμετροι του κύκλου, συνεπώς ίσες. Άρα ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

□

Θεώρημα 10.15 *Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις αντίστοιχες γωνίες.*



Σχῆμα 10.12: Οι διαγώνιες του ρόμβου.

Απόδειξη. Έστω ένας ρόμβος ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Τότε Ο είναι το μέσον της ΒΔ και ΑΟ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ, άρα είναι και ύψος του, και συνεπώς τέμνει την ΒΔ κάθετα. Η ΑΟ είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας ∠Α του ισοσκελούς τριγώνου, άρα διχοτόμος και της γωνίας του ρόμβου.

□

Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου

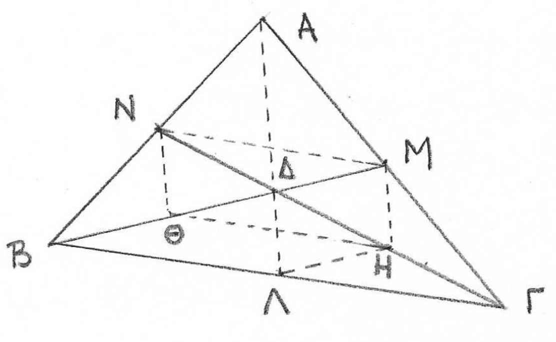
Θεώρημα 10.16 *Σε ένα τρίγωνο*

α΄. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών διέρχονται από το ίδιο σημείο (το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου)

β΄. Οι διχοτόμοι των γωνιών διέρχονται από το ίδιο σημείο (το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου)

γ΄. Οι διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (το κέντρο βάρους του τριγώνου) *δ′. Τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο (το ορθόκεντρο του τριγώνου).*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει τα (α′) και (β′).



Σχῆμα 10.13: Κέντρο βάρος τριγώνου.

Για να αποδείξουμε το (γ′) θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, και ΒΜ, ΓΝ τις δύο διαμέσους. Η ΒΜ τέμνει την πλευρά ΑΓ του ΑΓΝ στο Μ. Άρα τέμνει και μία άλλη πλευρά του τριγώνου. Αυτή δεν μπορεί να είναι η ΑΝ γιατί τότε η ΒΜ θα συνέπιπτε με την ΑΒ. Άρα οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΝ τέμνονται σε ένα σημείο, έστω Δ. Θα δείξουμε οτι και η τρίτη διάμεσος διέρχεται από το Δ.

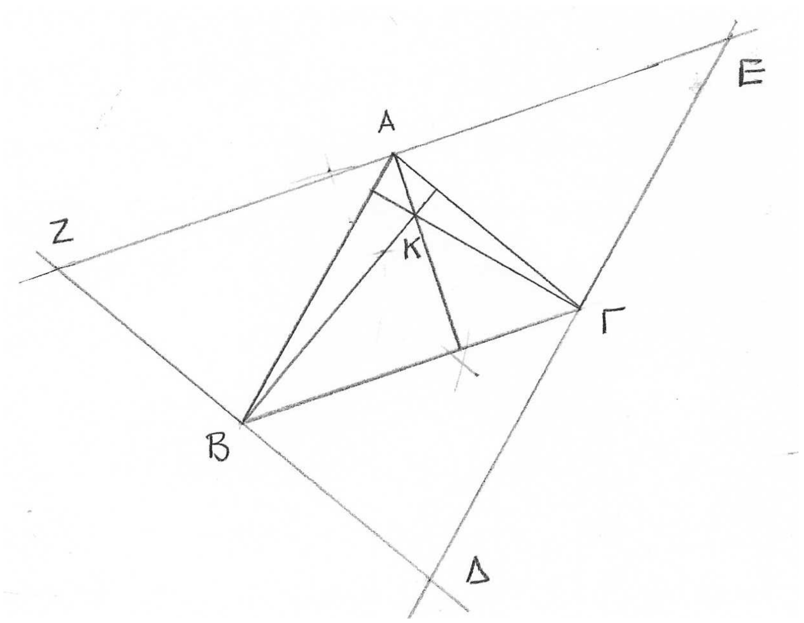
Θεωρούμε τα μέσα Θ και Η των ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Θεώρημα 10.8 τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΝ και ΗΜ είναι παράλληλα προς το ΑΔ και ίσα προς το μισό του. Άρα είναι ίσα μεταξύ τους και παράλληλα. Συνεπώς το ΘΗΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ.

Από το Η φέρουμε παράλληλο προς τη ΒΜ. Αυτή τέμνει την ΓΒ στο μέσο της, έστω Λ, και ΗΛ είναι ίσο με το μισό του ΒΔ, δηλαδή είναι ίσο με ΔΜ. Συμπεραίνουμε οτι DeΜΗΛ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΔ και ΔΛ είναι και οι δύο παράλληλες προς την ΗΜ, δηλαδή είναι στην ίδια ευθεία, και ΑΛ είναι η τρίτη διάμεσος και διέρχεται από το Δ.

Ταυτόχρονα δείξαμε οτι ΒΔ = 2ΛΗ = 2ΔΜ, και παρόμοια ΓΔ = 2ΔΝ, ΑΔ = 2ΔΛ.

Για να αποδείξουμε το (δ′) θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και από τις κορυφές φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές, ΖΕ από το Α παράλληλη προς την ΒΓ, ΖΔ από το Β παράλληλη προς την ΑΓ και ΔΕ από το Γ παράλληλη προς την ΑΒ. Σχηματίζεται τρίγωνο ΔΕΖ. Έχουμε παραλληλόγραμμα ΑΖΒΓ και ΑΒΓΕ, από τα οποία συμπεραίνουμε οτι ΑΖ = ΑΕ. Παρόμοια, ΒΖ = ΒΔ και ΓΔ = ΓΕ.

Εάν ΑΚ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από το Α, η ΑΚ είναι κάθετος στην ΖΕ και διέρχεται από το μέσο της. Δηλαδή είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΖΕ. Παρόμοια, τα ύψη ΒΧ και ΓΨ του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεσοκάθετοι του τριγώνου ΔΕΖ, και από



Σχῆμα 10.14: Ορθόκεντρο.

το (α′) διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.

□

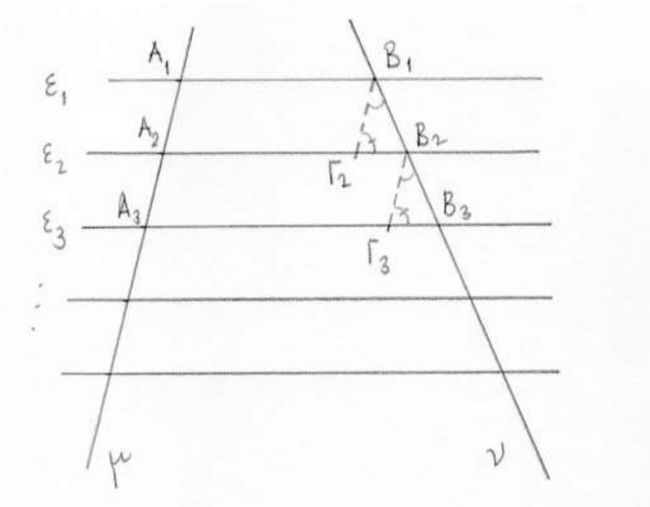
Θεώρημα 10.17 (Ασθενές Θεώρημα του Θαλή) *Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα πάνω σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη τέμνουσα ευθεία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ... και δύο ευθείες μ και ν, που τις τέμνουν σε σημεία A_1, A_2, A_3, ... και B_1, B_2, B_3, ... αντίστοιχα. Υποθέτουμε οτι οι αποστάσεις A_1A_2, A_2A_3 είναι ίσες, και θα δείξουμε οτι οι αποστάσεις B_1B_2, B_2B_3 είναι ίσες. Από τα B_1 και B_2 φέρουμε παράλληλες προς την μ, οι οποίες τέμνουν την ε_2 στο Γ_2 και την ε_3 στο Γ_3 αντίστοιχα. Τα τετράπλευρα $A_1B_1\Gamma_2A_2$ και $A_2B_2\Gamma_3A_3$ είναι παραλληλόγραμμα. Άρα $A_1A_2 = B_1\Gamma_2$ και $A_2A_3 = B_2\Gamma_3$. Συνεπώς $B_1\Gamma_2 = B_2\Gamma_3$. Επίσης $\angle\Gamma_2B_1B_2 = \angle\Gamma_3B_2B_3$ και $\angle B_1\Gamma_2B_2 = \angle B_2\Gamma_3B_3$, αφού έχουν παράλληλες πλευρές. Άρα τα τρίγωνα $B_1\Gamma_2B_2$ και $B_2\Gamma_3B_3$ είναι ίσα. Συμπεραίνουμε οτι $B_1B_2 = B_2B_3$.

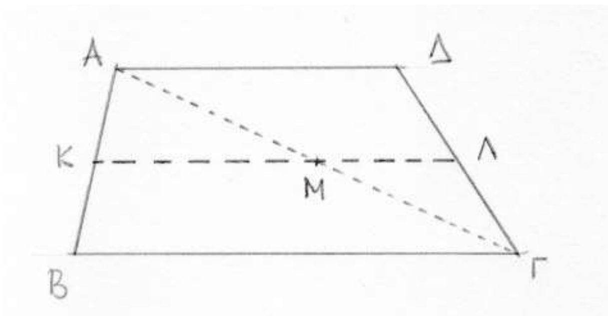
□

Πρόταση 10.18 *Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις, και ίση προς το ημιάθροισμά τους.*

Απόδειξη. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ, με ΑΔ ∥ ΒΓ, Κ το μέσο της ΑΒ και Λ το μέσο της ΔΓ. Έστω Μ το μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε



Σχῆμα 10.15: Ισαπέχουσες παράλληλες ευθείες.



Σχῆμα 10.16: Διάμεσος τραπεζίου.

KM ∥ ΒΓ και KM = $\frac{1}{2}$ΒΓ. Από το τρίγωνο ΓΔΑ έχουμε ΜΛ ∥ ΑΔ και ΜΛ = $\frac{1}{2}$ΑΔ. Αλλά ΑΔ ∥ ΒΓ, και συνεπώς ΜΛ ∥ ΒΓ. Καταλήγουμε οτι ΜΚ και ΜΛ είναι και οι δύο παράλληλες στην ΒΓ. Από το αξίωμα των παραλλήλων, τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και ΚΛ = ΚΜ + ΜΛ = $\frac{1}{2}$(ΒΓ + ΑΔ).

□

Ασκήσεις

Ασκηση 10.1 Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ. Να δείξετε οτι ΔΕ || ΒΓ.

Ασκηση 10.2 Αν ένα κυρτό τετράπλευρο έχει δύο διαδοχικές γωνίες παραπληρωματικές, να αποδείξετε οτι οι διχοτόμοι των άλλων δύο γωνιών του είναι κάθετες.

Ασκηση 10.3 Να δείξετε οτι οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών εξωτερικών γωνιών κυρτού τετραπλεύρου τέμνονται, και η γωνία που σχηματίζουν είναι ίση με το ημιάθροισμα των αντίστοιχων εσωτερικών

Ασκηση 10.4 Στις πλευρές ΑΒ και ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΕ = ΓΖ. Δείξτε οτι η ΕΖ περνάει από το κέντρο του παραλληλογράμμου.

Ασκηση 10.5 Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ = ΒΔ και ΕΗ = ΓΕ. Δείξτε οτι η ΗΖ περνάει από το Α και διχοτομείται από αυτό.

Ασκηση 10.6 Να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου δίδονται τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών και η μεταξύ τους γωνία.

Ασκηση 10.7 Να βρείτε σημείο Ε στην πλευρά ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε ∠ΑΕΒ = ∠ΒΕΓ.

Ασκηση 10.8 Να δείξετε οτι το ύψος προς μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου είναι μικρότερο από το ύψος προς μικρότερη πλευρά.

Ασκηση 10.9 Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Μ με ΒΜ = ΒΓ. Στην προέκταση της ΔΑ παίρνουμε σημείο Ν με ΔΝ = ΔΓ. Να δείξετε οτι ΓΜ και ΓΝ είναι κάθετες.

Ασκηση 10.10 Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, γωνία $\angle\omega$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Βρείτε σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα έτσι ώστε ∠ΔΕΓ = $\angle\omega$ = ∠ΔΖΒ. Δείξτε οτι το άθροισμα ΔΕ + ΔΖ δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου Δ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

Ασκηση 10.11 Έξω από το τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Δείξτε οτι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι επίσης τετράγωνο.

Ασκηση 10.12 Μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Δείξτε οτι το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ισοσκελές, και υπολογίστε τις γωνίες του.

Ασκηση 10.13 Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην προέκταση της βάσης ΒΓ. Δείξτε οτι η διαφορά των αποστάσεων του Δ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ δεν εξαρτάται από τη θέση του Δ.

Ασκηση 10.14 Δείξτε οτι το άθροισμα των αποστάσεων εσωτερικού σημείου ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τριγώνου.

Ασκηση 10.15 Δίδεται τυχαίο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε οτι ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Ασκηση 10.16 Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Να δείξετε οτι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

Ασκηση 10.17 Δείξτε οτι σε ορθογώνιο τρίγωνο η γωνία μεταξύ του ύψους και της διαμέσου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με τη διαφορά των οξειών γωνιών του τριγώνου. Δείξτε επίσης οτι η διχοτόμος της ορθής γωνίας διχοτομεί τη γωνία μεταξύ του ύψους και της διαμέσου.

Ασκηση 10.18 Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να δείξετε οτι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ και ΓΕ χωρίζουν τη διαγώνιο ΒΔ σε τρία τμήματα.

Ασκηση 10.19 Να κατασκευάσετε τρίγωνο του οποίου τα μέσα των πλευρών να είναι τρία δοθέντα μη συγγραμμικά σημεία.

Ασκηση 10.20 Δίδεται τρίγωνο ΛΜΝ. Να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου τα μέσα τριών πλευρών βρίσκονται στα σημεία Λ, Μ, Ν.

Ασκηση 10.21 Να δείξετε οτι η διάμεσος προς μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από τη διάμεσο προς μικρότερη πλευρά.

Ασκηση 10.22 Δείξτε οτι το άθροισμα των βάσεων ενός τραπεζίου είναι μικρότερο από το άθροισμα των διαγωνίων του.

Ασκηση 10.23 Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε το συμμετρικό Ε της κορυφής Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ. Δείξτε οτι ΒΓΔΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Ασκηση 10.24 Να κατασκευάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ όταν γνωρίζετε τα μήκη των πλευρών του και τη γωνία υπό την οποία τέμνονται οι ευθείες ΑΒ και ΔΓ.

Υπόδειξη: Κατά την ανάλυση, θεωρήστε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ είναι παράλληλο και ίσο προς το ΓΔ.

Ασκηση 10.25 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τραπέζιο όταν γνωρίζετε μία γωνία του και το άθροισμα των βάσεών του.

Κεφάλαιο 11

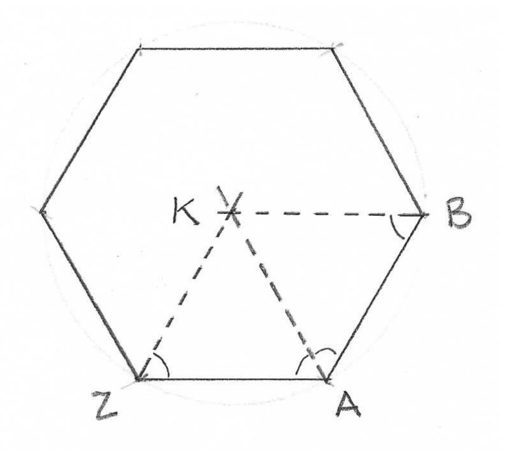
Σχήματα εγγεγραμμένα σε κύκλο

Κανονικά πολυγώνα

Ένα πολύγωνο είναι **κανονικό** όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους, και όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Ειδικές περιπτώσεις κανονικών πολυγώνων που έχουμε δει είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο.

Πρόταση 11.1 *Σε κάθε κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές, κάθε γωνία έχει μέτρο* $\frac{2\nu-4}{\nu}\llcorner$.

Θεώρημα 11.2 *Κάθε πλευρά ενός κανονικού πολυγώνου μαζί με τις διχοτόμους των προσκείμενων σε αυτή γωνιών του πολυγώνου, σχηματίζει ένα ισοσκελές τρίγωνο. Όλα αυτά τα τρίγωνα έχουν κοινή κορυφή K.*



Σχήμα 11.1: Κέντρο κανονικού πολυγώνου.

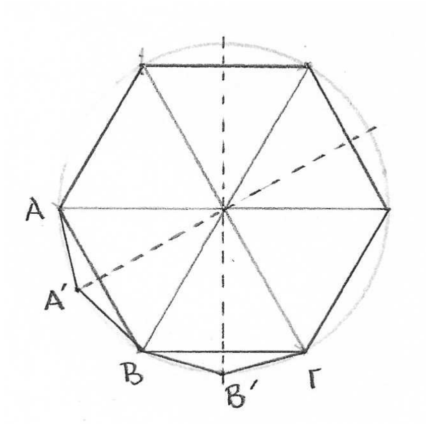
Το σημείο K λέγεται **κέντρο** του κανονικού πολυγώνου, και είναι το κέντρο κύκλου που διέρχεται από όλες τις κορυφές του πολυγώνου.

Απόδειξη. Αφού όλες οι γωνίες του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες, τα μισά τους είναι επίσης ίσα. Άρα όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, με βάση μία πλευρά του κανονικού πολυγώνου. Αφού και οι πλευρές είναι ίσες, όλα τα τρίγωνα είναι ίσα.

□

Η κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές, με κανόνα και διαβήτη, ισοδυναμεί με την κατασκευή γωνίας $\frac{2\nu-4}{\nu}\llcorner$. Το πρόβλημα έχει απασχολήσει τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα. Στα Στοιχεία υπάρχει η κατασκευή για $\nu = 3, 4, 5$, και για τα πολλαπλάσια αυτών των αριθμών με δυνάμεις του 2.

Παρατηρούμε οτι εάν κατασκευάζεται το πολύγωνο με ν πλευρές, μπορούμε να κατασκευάσουμε και πολύγωνο με $2^\mu\nu$ πλευρές, με επανειλημμένη διχοτόμηση της γωνίας στην κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΒ.



Σχήμα 11.2: Διπλασιασμός του αριθμού πλευρών κανονικού πολυγώνου.

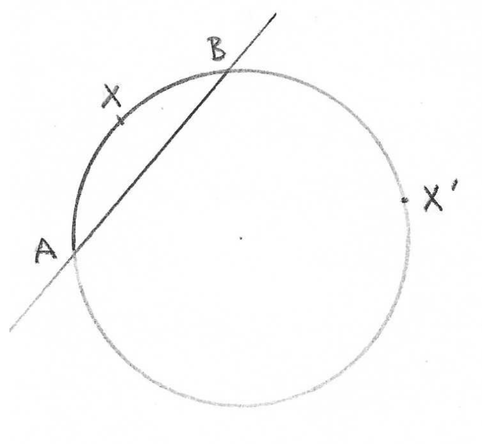
Ο Gauss κατασκεύασε το κανονικό 17-γωνο, και αργότερα απέδειξε οτι οι μόνοι αριθμοί ν για τους οποίους κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές είναι της μορφής

$$\nu = 2^\mu \delta_1 \delta_2 \dots \delta_m ,$$

όπου δ_i είναι διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί της μορφής $\delta = 2^{2^k} + 1$. Μέχρι τώρα οι μόνοι πρώτοι αριθμοί αυτής της μορφής που γνωρίζουμε είναι για $k = 0, 1, 2, 3, 4$, και αντιστοιχούν σε κανονικά πολύγωνα με 3, 5, 17, 257 και 65337 πλευρές.

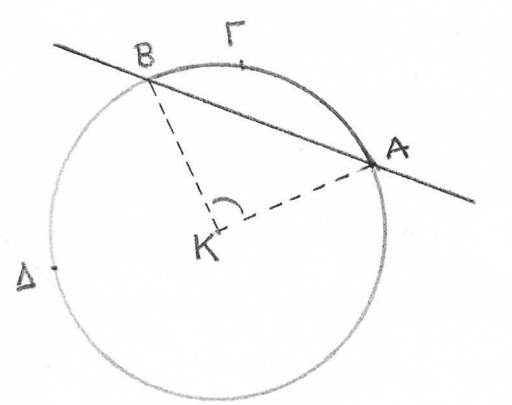
Τόξα και επίκεντρες γωνίες

Δύο σημεία Α και Β σε έναν κύκλο (Κ, r) ορίζουν μία χορδή και δύο **τόξα**. Το κάθε τόξο αποτελείται από όλα τα σημεία του κύκλου που βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας ΑΒ, μαζί με τα σημεία Α και Β. Για κάθε σημείο Χ του κύκλου, διαφορετικό από τα Α και Β, συμβολίζουμε ΑΧΒ το τόξο με άκρα στα Α, Β που περιέχει το σημείο Χ.



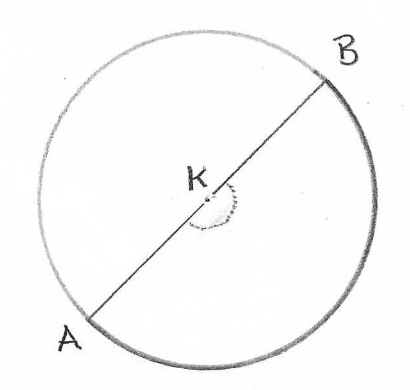
Σχῆμα 11.3: Τόξο κύκλου.

Εάν τα σημεία Α και Β δεν είναι αντιδιαμετρικά, τότε ορίζουν μία (κυρτή) γωνία ∠ΑΚΒ. Θεωρούμε σημεία του κύκλου Γ και Δ, με το Δ στην ίδια μεριά της ΑΒ με το κέντρο Κ του κύκλου, και το Γ στην αντίθετη μεριά. Το τόξο ΑΓΒ είναι το **μικρότερο** (ή έλασσον) τόξο της χορδής ΑΒ, και **αντιστοιχεί στην** (κυρτή) **επίκεντρη γωνία** ∠ΑΚΒ. Το τόξο ΑΔΒ είναι το **μεγαλύτερο** (ή μείζον) τόξο της χορδής ΑΒ, και **αντιστοιχεί στη μή κυρτή επίκεντρη γωνία** ΑΚΒ.



Σχῆμα 11.4: Το τόξο ΑΓΒ αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία ∠ΑΚΒ.

Εάν τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά, τότε η χορδή ΑΒ είναι διάμετρος και τα τόξα λέγονται **ημιπεριφέρειες**. Λέμε οτι τα δύο τόξα αντιστοιχούν στην **πεπλατυσμένη γωνία** ΑΚΒ.



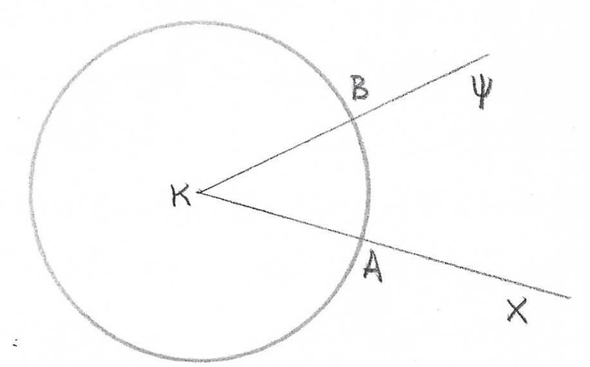
Σχήμα 11.5: Ημιπεριφέρεια.

Δύο τόξα στον ίδιο κύκλο ή σε κύκλους ίσης ακτίνας λέγονται επιθέσιμα ή **ίσα** όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες.

Κάθε σημείο του τόξου ΑΒ διαφορετικό από τα Α, Β ονομάζεται **εσωτερικό** σημείο του τόξου.

Μέσο του τόξου ΑΒ είναι το εσωτερικό σημείο Μ με την ιδιότητα ΑΜ = ΜΒ.

Μία ημιευθεία ΚΧ με αρχή στο Κ και ένας κύκλος (K, r) με κέντρο στο Κ, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, Α. Άρα κάθε γωνία ∠ΧΚΨ ορίζει δύο σημεία στον κύκλο, Α στην ΚΧ και Β στην ΚΨ, και συνεπώς δύο τόξα, ένα με επίκεντρη γωνία ίση με ∠ΧΚΨ και ένα με επίκεντρη γωνία τη μή κυρτή γωνία ΧΚΨ. Με αυτή την αντιστοιχία, ιδιότητες γωνιών μεταφέρονται σε ιδιότητες των τόξων.



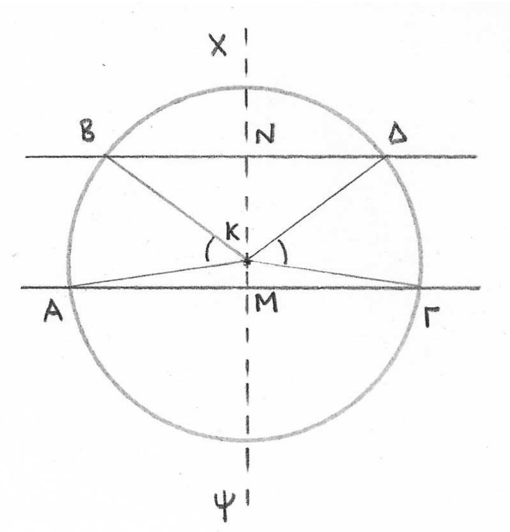
Σχήμα 11.6: Η γωνία ∠ΧΚΨ ορίζει χορδή ΑΒ και δύο τόξα.

Ιδιότητα 11.3 *Θεωρούμε ημιευθεία ΚΦ που τέμνει τον κύκλο (Κ, r) στο Α και γωνία ∠ΧΟΨ. Τότε υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία, Β και Γ στον κύκλο, σε αντίθετες μεριές της ΚΦ, που ορίζουν τόξα ΑΒ και ΑΓ με επίκεντρη γωνία ίση με την ∠ΧΟΨ.*

Ιδιότητα 11.4 *Για κάθε εσωτερικό σημείο Ε του τόξου ΑΒ, λέμε οτι ΑΒ είναι το άθροισμα των τόξων ΑΕ και ΕΒ.*

Ιδιότητα 11.5 *Κάθε τόξο έχει μόνον ένα μέσο, και η ΚΜ διχοτομεί την επίκεντρη γωνία ∠ΑΚΒ.*

Θεώρημα 11.6 *Τα άκρα ίσων τόξων του ίδιου κύκλου ορίζουν δύο παράλληλες ευθείες. Αντίστροφα, δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τον ίδιο κύκλο ορίζουν δύο ίσα τόξα.*



Σχῆμα 11.7: Ίσα τόξα ορίζουν παράλληλες ευθείες.

Απόδειξη. Θεωρούμε τέσσερα διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ και Δ τέτοια ώστε να σχηματίζονται δύο ίσα τόξα ΑΒ και ΓΔ. Υποθέτουμε οτι αυτά είναι τα μη τεμνόμενα τόξα, όπως στο Σχήμα 11.7. Παρατηρούμε όμως οτι σχηματίζονται επίσης τα ζεύγη τεμνόμενων ίσων τόξων ΑΓΔ = ΒΔΓ, ΑΒΔ = ΓΔΒ και ΑΓΔ = ΓΑΒ, για τα οποία ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα.

Έστω ΧΨ η μεσοκάθετος της χορδής ΑΓ, που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου Κ και τέμνει την ΑΓ στο Μ και την ΒΔ στο Ν. Εάν Κ ≠ Μ, από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε ∠ΑΚΜ = ∠ΓΚΜ. Από τα ίσα τόξα ΑΒ και ΓΔ έχουμε ∠ΑΚΒ = ∠ΓΚΔ. Συμπεραίνουμε οτι ∠ΨΚΒ = ∠ΨΚΔ, και συνεπώς οι παραπληρωματικές είναι ίσες,

∠ΒΚΝ = ∠ΔΚΝ. Άρα τα τρίγωνα ΚΒΝ και ΚΔΝ είναι ίσα, από το πρώτο κριτήριο, και οι γωνίες ∠ΚΝΒ και ∠ΚΝΔ είναι ίσες και παραπληρωματικές, άρα ορθές. Συνεπώς ΒΔ και ΑΓ έχουν κοινή κάθετο και είναι παράλληλες.

Αντίστροφα, εάν ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλες χορδές, η κοινή μεσοκάθετος ΧΨ διέρχεται από το κέντρο Κ και σχηματίζει ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΑΚΓ. Συμπεραίνουμε οτι οι γωνίες ∠ΑΚΒ και ∠ΓΚΔ είναι ίσες, άρα το ίδιο ισχύει για τα αντίστοιχα τόξα ΑΒ και ΓΔ.

□

Πόρισμα 11.7 *Ένα τραπέζιο εγγράφεται σε κύκλο εάν και μόνον εάν είναι ισοσκελές.*

Απόδειξη. Εάν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε έχουμε δύο παράλληλες χορδές, και από το Θεώρημα 11.6 οι άλλες δύο πλευρές αντιστοιχούν σε ίσα τόξα.

Εάν το τραπέζιο είναι ισοσκελές, οι μεσοκάθετοι των δύο ίσων πλευρών ΑΒ και ΓΔ τέμνουν την κοινή μεσοκάθετο των βάσεων ΜΝ σε σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Θα δείξουμε οτι Κ = Λ. Τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΔΓΝΜ έχουν όλες τις πλευρές και όλες τις αντίστοιχες γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα. Συνεπώς η απόσταση του σημείου τομής της πλευράς ΜΝ και της μεσοκαθέτου της απέναντι πλευράς, από την κορυφή Μ είναι ίση στα δύο τραπέζια. Άρα τα σημεία τομής Κ και Λ συμπίπτουν.

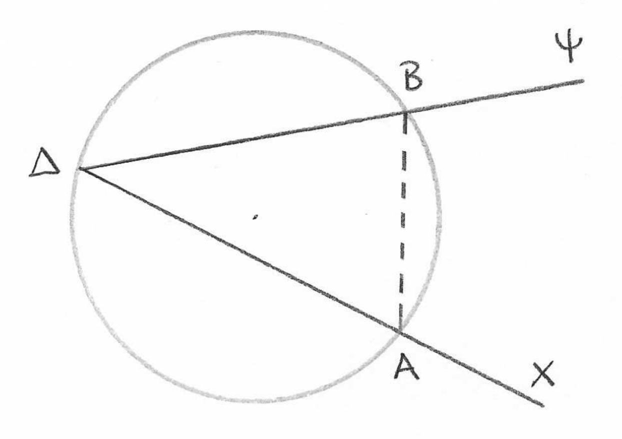
□

Εγγεγραμμένες γωνίες

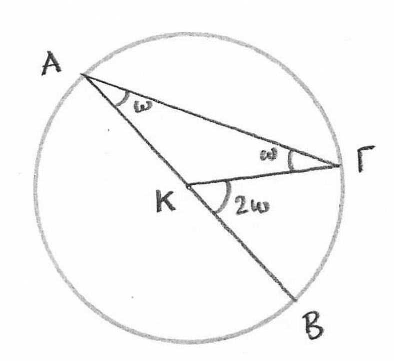
Μία γωνία ∠ΧΔΨ λέγεται **εγγεγραμμένη** στον κύκλο (Κ, r) εάν η κορυφή της βρίσκεται στον κύκλο, και οι πλευρές της ΔΧ και ΔΨ τέμνουν τον κύκλο σε δύο άλλα σημεία Α και Β. Η χορδή ΑΒ λέγεται **χορδή της εγγεγραμμένης** γωνίας. Το τόξο της χορδής ΑΒ το οποίο δεν περιέχει την κορυφή Δ της γωνίας, λέγεται **τόξο επί του οποίου βαίνει η εγγεγραμμένη γωνία** ή **τόξο που βλέπει η εγγεγραμμένη γωνία**. Λέμε επίσης οτι η εγγεγραμμένη γωνία και η επίκεντρος γωνία (κυρτή ή μή κυρτή) που αντιστοιχεί στο ίδιο τόξο **βαίνουν επί του ιδίου τόξου** ή **βλέπουν το ίδιο τόξο**.

Πρόταση 11.8 *Έστω ΑΒ διάμετρος του κύκλου* (*Κ*, r). *Μία εγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ έχει μέτρο το μισό του μέτρου της επίκεντρης γωνίας ΒΚΓ που βλέπει το ίδιο τόξο.*

Απόδειξη. Η επίκεντρη γωνία ∠ΒΚΓ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΓ. Άρα το μέτρο της είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο ίσων



Σχῆμα 11.8: Εγγεγραμμένη γωνία.



Σχῆμα 11.9: Εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία σε διάμετρο.

γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου, άρα ∠ΒΚΓ = 2∠ΒΑΓ.

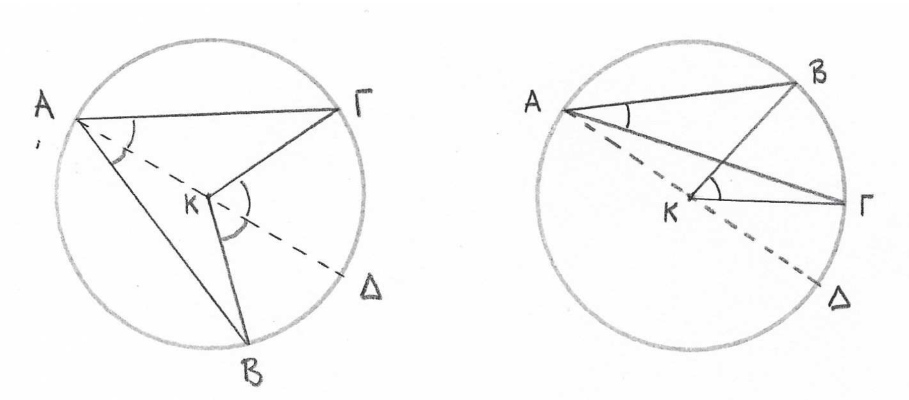
□

Θεώρημα 11.9 *Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο το μισό της επίκεντρης γωνίας που βλέπει το ίδιο τόξο.*

Απόδειξη. Θα αναγάγουμε την απόδειξη σε εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης, παριστάνοντας την εγγεγραμμένη γωνία ως άθροισμα ή διαφορά γωνιών των οποίων μία πλευρά είναι διάμετρος.

Θεωρούμε κύκλο (Κ, r) και εγγεγραμμένη γωνία ∠ΒΑΓ. Εάν Α δεν είναι αντιδιαμετρικό του Β ή του Γ, φέρουμε από την κορυφή Α διάμετρο ΑΔ.

Εάν η ΑΔ περιέχεται στο εσωτερικό της ∠ΒΑΓ, τότε ∠ΒΑΓ είναι το άθροισμα των γωνιών ∠ΒΑΔ και ∠ΔΑΓ.

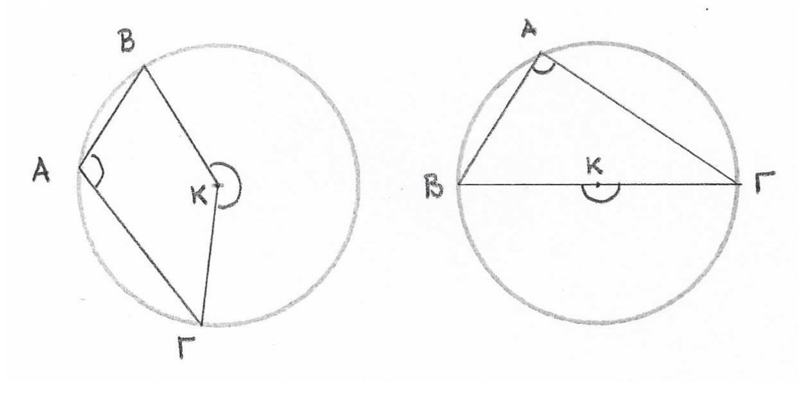


Σχῆμα 11.10: Εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία.

Εάν η ΑΔ δεν περιέχεται στο εσωτερικό της ∠ΒΑΓ, τότε ∠ΒΑΓ είναι η διαφορά των γωνιών ∠ΒΑΔ και ∠ΔΑΓ.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 11.8, οι επίκεντρες γωνίες ∠ΒΚΔ και ∠ΔΚΓ έχουν μέτρο διπλάσιο των εγγεγραμμένων γωνιών ∠ΒΑΔ και ∠ΔΑΓ. Συνεπώς η επίκεντρη γωνία ∠ΒΚΓ, που είναι αντίστοιχα το άθροισμα ή η διαφορά των γωνιών ∠ΒΚΔ και ∠ΔΚΓ, έχει μέτρο διπλάσιο από την εγγεγραμμένη ∠ΒΑΓ.

□



Σχῆμα 11.11: Αμβλεία ή ορθή εγγεγραμμένη γωνία.

Παρατηρούμε οτι όταν η εγγεγραμμένη γωνία είναι οξεία, η αντίστοιχη επίκεντρη είναι κυρτή γωνία. Όταν όμως η εγγεγραμμένη είναι ορθή, η αντίστοιχη επίκεντρη είναι η πεπλατυσμένη γωνία, που έχει μέτρο 2∟. Τέλος, όταν η εγγεγραμμένη γωνία είναι αμβλεία, η αντίστοιχη επίκεντρη είναι μή κυρτή. Στα ακόλουθα Πορίσματα καταγράφουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τόξα.

Πόρισμα 11.10 *Θεωρούμε γωνία ∠ΒΑΓ εγγεγραμμένη σε κύκλο, και το τόξο ΒΔΓ* *που βρίσκεται στο εσωτερικό της $\angle B A \Gamma$.*

α΄. *Εάν η εγγεγραμμένη $\angle B A \Gamma$ είναι οξεία, τότε το τόξο $B \Delta \Gamma$ είναι μικρότερο από ημιπεριφέρεια.*

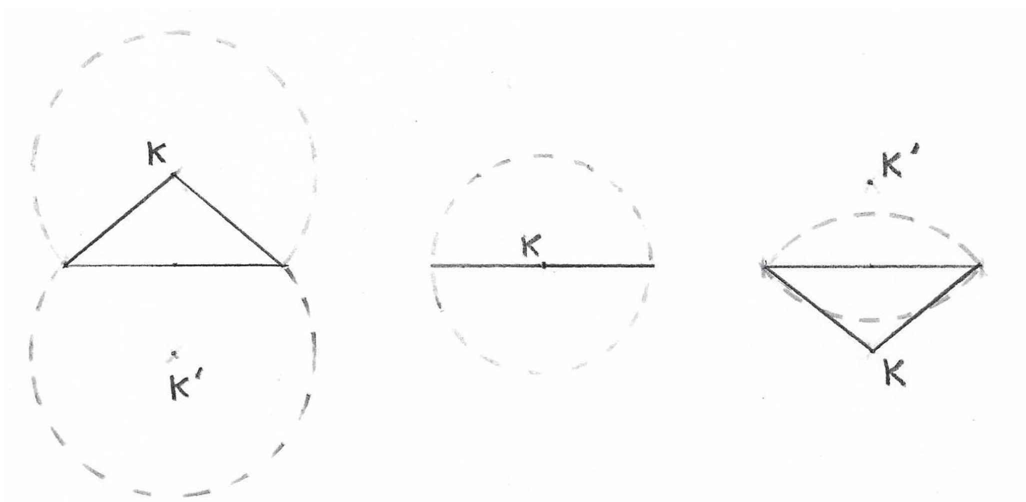
β΄. *Εάν η εγγεγραμμένη $\angle B A \Gamma$ είναι ορθή, τότε το τόξο $B \Delta \Gamma$ είναι ίσο με ημιπεριφέρεια.*

γ΄. *Εάν η εγγεγραμμένη $\angle B A \Gamma$ είναι αμβλεία, τότε το τόξο $B \Delta \Gamma$ είναι μεγαλύτερο από ημιπεριφέρεια.*

Πόρισμα 11.11 *Κάθε χορδή AB ενός κύκλου τον χωρίζει σε δύο τόξα, $A\Gamma B$ και $A\Delta B$, τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές της ευθείας AB. Κάθε σημείο X του τόξου $A\Gamma B$ βλέπει το τόξο $A\Delta B$ υπό σταθερή γωνία ω, και κάθε σημείο Ψ του τόξου $A\Delta B$ βλέπει το τόξο $A\Gamma B$ υπό σταθερή γωνία $2\llcorner - \omega$, την παραπληρωματική της ω.*

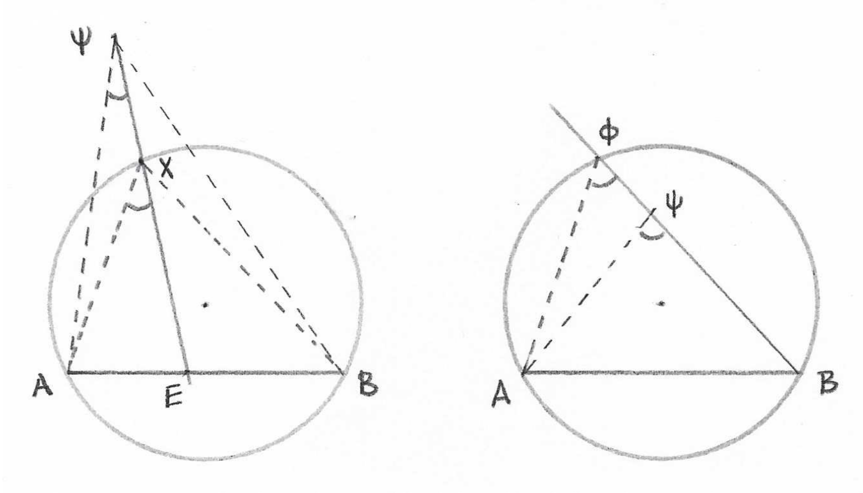
Πόρισμα 11.12 *Όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο, ή σε ίσα τόξα δοθέντος κύκλου, ή σε ίσα τόξα ίσων κύκλων, είναι ίσες μεταξύ τους.*

Θεώρημα 11.13 *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του επιπέδου που βρίσκονται από την ίδια μεριά του ευθύγραμμου τμήματος AB και το βλέπουν υπό δοθείσα σταθερή γωνία ω είναι τόξο κύκλου που διέρχεται από τα άκρα A και B του ευθύγραμμου τμήματος.*



Σχήμα 11.12: Σημεία που βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα AB υπό γωνία ω.

Απόδειξη. Εάν η ω είναι οξεία θεωρούμε σημείο Κ που σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΒ, με βάση ΑΒ και γωνία ΑΚΒ = 2ω. Εάν η ω είναι ορθή, θεωρούμε Κ το μέσο του ΑΒ. Εάν ω είναι αμβλεία, θεωρούμε σημείο Κ που σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΒ, με βάση ΑΒ και γωνία ΑΚΒ = $4\llcorner - 2\omega$. Σε κάθε περίπτωση, κάθε σημείο του κύκλου (Κ, |ΚΑ|), βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό γωνία ω ή $2\llcorner - \omega$. Έστω Δ σημείο που βλέπει το ΑΒ υπό γωνία ω. Τότε κάθε άλλο σημείο του τόξου ΑΔΒ επίσης βλέπει το ΑΒ υπό γωνία ω.



Σχῆμα 11.13: Σημεία που δεν βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό γωνία ω.

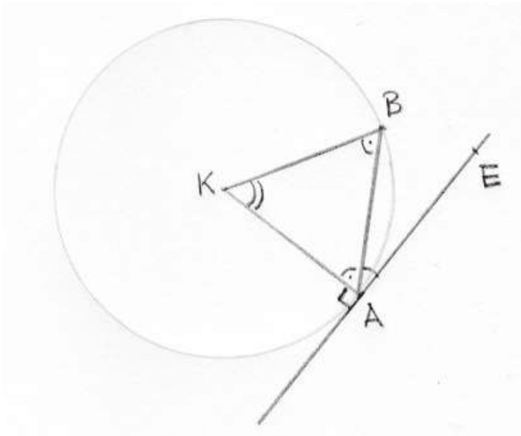
Θα δείξουμε οτι κανένα άλλο σημείο του ημιεπιπέδου της AlΒ που περιέχει το Δ εκτός αυτού του τόξου δεν βλέπει το ΑΒ υπό γωνία ω. Πράγματι, εάν Ψ είναι σημείο του ημιεπιπέδου, εξωτερικό του κύκλου (Κ, |ΚΑ|), και Ε είναι σημείο μεταξύ του Α και του Β, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΨΕ τέμνει το τόξο ΑΔΒ, έστω στο σημείο Χ. Η γωνία ∠ΑΧΕ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΨΧ, συνεπώς είναι μεγαλύτερη από την εσωτερική ∠ΑΨΕ. Παρόμοια, ∠ΒΧΕ είναι μεγαλύτερη από την ∠ΒΨΕ. Συνεπώς η ω = ∠ΑΧΒ είναι μεγαλύτερη από την ∠ΑΨΒ, και Ψ δεν ανήκει στο γεωμετρικό τόπο.

Εάν Ψ είναι σημείο του ημιεπιπέδου, εσωτερικό του κύκλου (Κ, |ΚΑ|), τότε η ημιευθεία ΒΨ τέμνει το τόξο ΑΔΒ, έστω στο σημείο Φ, και ∠ΑΨΒ > ∠ΑΦΒ = ω, και Ψ δεν ανήκει στο γεωμετρικό τόπο.

□

Πόρισμα 11.14 *Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Χ με την ιδιότητα οτι η γωνία ∠ΑΧΒ είναι ορθή, είναι τα σημεία του κύκλου με διάμετρο ΑΒ, εκτός από τα Α και Β.*

Θεώρημα 11.15 *Η γωνία που σχηματίζει χορδή κύκλου με την εφαπτόμενη στο ένα άκρο της χορδής είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βλέπει το τόξο μεταξύ της χορδής και της εφαπτομένης.*



Σχῆμα 11.14: Γωνία μεταξύ χορδής και εφαπτομένης.

Απόδειξη. Θεωρούμε κύκλο (K, r), χορδή AB του κύκλου και εφαπτόμενη ε στο σημείο A του κύκλου.

Έστω $\angle BAE$ η οξεία γωνία μεταξύ της χορδής και της εφαπτομένης. Τότε $\angle KAB + \angle BAE = 1\llcorner$. Από το ισοσκελές τρίγωνο KAB έχουμε $\angle KAB = \angle KBA$ και συνεπώς $\angle AKB + 2\angle KAB = 2\llcorner = 2\angle KAB + 2\angle BAE$. Άρα $\frac{1}{2}\angle AKB = \angle BAE$. Αλλά κάθε γωνία εγγεγραμμένη στο τόξο AHB είναι επίσης ίση με $\frac{1}{2}\angle AKB$ και συνεπώς ίση με την $\angle BAE$.

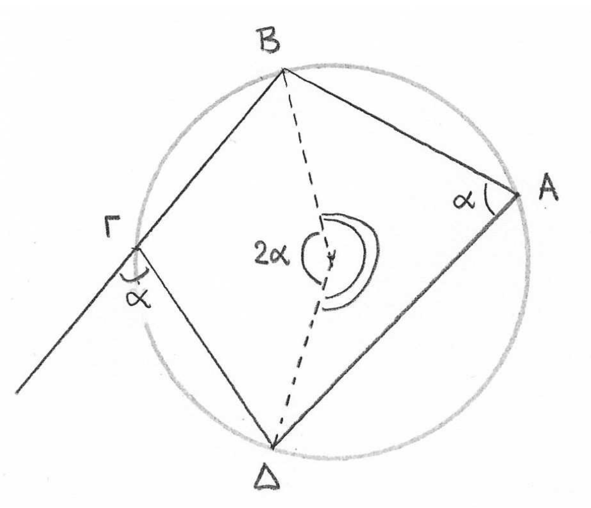
Για την αμβλεία γωνία $\angle BA\Delta$ έχουμε $2\angle BA\Delta = 4\llcorner - 2\angle BAE = 4\llcorner - \angle AKB$, που είναι η μη κυρτή γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο AΘB.

□

Εγγεγραμμένα τετράπλευρα

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** εάν οι μεσοκάθετοι τριών πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο. Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** όταν οι κορυφές του βρίσκονται σε έναν κύκλο. Προφανώς ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, ενώ σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο μπορεί να σχεδιαστεί ένας κύκλος ώστε να είναι εγγεγραμμένο.

Θεώρημα 11.16 *Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Αντίστροφα, εάν δύο απέναντι γωνίες σε ένα τετράπλευρο είναι παραπληρωματικές, το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.*

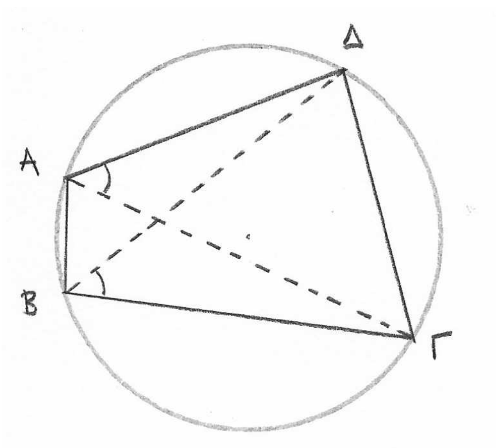


Σχῆμα 11.15: Απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

Απόδειξη. Οι απέναντι γωνίες στις κορυφές Α και Γ βλέπουν τη διαγώνιο ΒΔ υπό παραπληρωματικές γωνίες, αφού οι αντίστοιχες επίκεντρες βαίνουν στα δύο τόξα της χορδής ΒΔ.

Αντίστροφα, εάν οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε το Α βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ υπό γωνία α ενώ το Γ βλέπει το ΒΔ υπο γωνία $\gamma = 2\llcorner - \alpha$. Κατά το Θεώρημα 11.13, τα σημεία Α και Γ ανήκουν σε συμπληρωματικά τόξα του κύκλου που περιέχει τα Β, Δ και το κέντρο του σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΔ, με γωνία στην κορυφή Κ ίση με τη μικρότερη από τις 2α ή 2γ. Συνεπώς ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

□



Σχῆμα 11.16: Α και Β βλέπουν το ΓΔ υπό ίσες γωνίες.

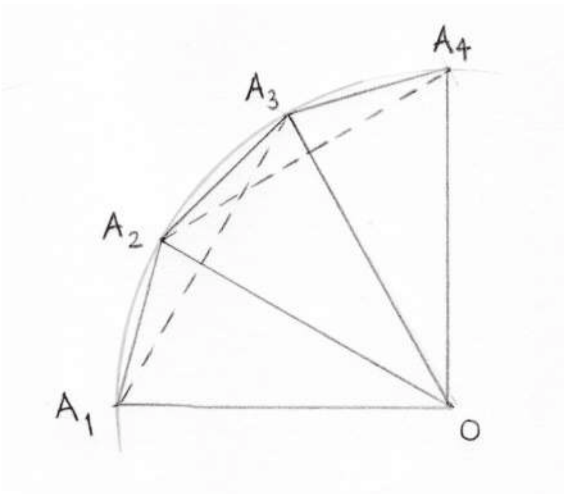
Πόρισμα 11.17 *Κάθε γωνία σε εγγράψιμο τετράπλευρο είναι ίση με την απέναντι εξωτερική γωνία. Αντίστροφα, εάν μία γωνία κυρτού τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εξωτερική γωνία, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.*

Πόρισμα 11.18 *Σε εγγράψιμο τετράπλευρο κάθε μία από τις πλευρές του φαίνεται από τις δύο άλλες κορυφές υπό ίση γωνία. Αντίστροφα, εάν μία πλευρά τετραπλεύρου φαίνεται από τις άλλες δύο κορυφές υπο ίση γωνία, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, Σχήμα 11.16.*

Κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο

Θεώρημα 11.19 *Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε οτι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Θεωρούμε κανονικό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, και φέρουμε τον κύκλο που περνάει από τα $A_1A_2A_3$. Έστω οτι ο κύκλος έχει κέντρο O. Θα δείξουμε οτι $OA_4 = OA_3$, και συνεπώς οτι η κορυφή A_4 βρίσκεται στον ίδιο κύκλο.



Σχήμα 11.17: Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Εξετάζουμε τα τρίγωνα OA_3A_4 και OA_3A_2. Αυτά έχουν την OA_3 κοινή και $A_3A_4 = A_3A_2$ από υπόθεση. Αν δείξουμε οτι $\angle OA_3A_2 = \angle OA_3A_4$, τα τρίγωνα είναι ίσα και $OA_4 = OA_3$.

Αφού $OA_2 = OA_3$, το τρίγωνο OA_2A_3 είναι ισοσκελές, και $\angle OA_3A_2 = \angle OA_2A_3$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε οτι $\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_4$.

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{OA_2A_3} &= \angle \mathrm{A_1A_2A_3} - \angle \mathrm{OA_2A_1}\,, \\ \angle \mathrm{OA_3A_4} &= \angle \mathrm{A_2A_3A_4} - \angle \mathrm{OA_3A_2}\,. \end{aligned}$$

Αφού το πολύγωνο είναι κανονικό,

$$\angle \mathrm{A_1A_2A_3} = \angle \mathrm{A_2A_3A_4}\,.$$

Τα τρίγωνα $\mathrm{OA_1A_2}$ και $\mathrm{OA_2A_3}$ έχουν όλες τις πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα και

$$\angle \mathrm{OA_2A_1} = \angle \mathrm{OA_3A_2}\,.$$

Αφαιρώντας τις δύο ισότητες, έχουμε οτι $\angle \mathrm{OA_2A_3} = \angle \mathrm{OA_3A_4}$.

Καταλήγουμε οτι η κορυφή $\mathrm{A_4}$ βρίσκεται στον ίδιο κύκλο με τις κορυφές $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ και $\mathrm{A_3}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι όλες οι κορυφές του κανονικού πολυγώνου βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

□

Ασκήσεις

Ασκηση 11.1 Εάν δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β, και Γ, Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να δείξετε οτι η ευθεία ΓΔ περνάει από το σημείο Β.

Ασκηση 11.2 Δίδονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ ενός κύκλου. Τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Δείξτε οτι $\mathrm{EH} \perp \mathrm{Z\Theta}$.

Ασκηση 11.3 Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ή εσωτερικά στο σημείο Α. Από το Α φέρουμε δύο ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Β, Γ και τον άλλο στα Δ, Ε. Δείξτε οτι $\mathrm{B\Gamma} \parallel \mathrm{\Delta E}$.

Ασκηση 11.4 Σε κύκλο με διάμετρο ΑΒ φέρουμε δύο παράλληλες χορδές ΑΓ και ΒΔ. Δείξτε οτι $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$ και οτι η ΓΔ είναι διάμετρος.

Ασκηση 11.5 Δείξτε οτι δύο χορδές κύκλου που δεν είναι διάμετροι δεν διχοτομούνται.

Ασκηση 11.6 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Δύο ευθείες που περνούν από τα Α, Β τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Γ, Δ και τον άλλο στα Ε, Ζ. Δείξτε οτι $\mathrm{\Gamma\Delta} \parallel \mathrm{EZ}$. Σε ποιά περίπτωση ισχύει και $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{EZ}$;

Κεφάλαιο 12

Ισομετρίες, Συμμετρίες και Πλακοστρώσεις

Όπως είδαμε στην απόδειξη του πρώτου κριτηρίου ισότητας τριγώνων, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την έννοια της 'εφαρμογής' ενός τριγώνου σε ένα άλλο, χωρίς να διευκρινίζει ακριβώς τι εννοεί. Στη σύγχρονη Γεωμετρία αυτή η έννοια της εφαρμογής ορίζεται μέσω ισομετριών.

Θεωρούμε το σύνολο P των σημείων του επιπέδου. Μία απεικόνιση $U : P \longrightarrow P$ λέγεται **ισομετρία (του επιπέδου)** εάν για κάθε δύο σημεία Α και $\mathrm{B} \in P$, το ευθύγραμμο τμήμα $U(\mathrm{A})U(\mathrm{B})$ είναι ίσο προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Πρόταση 12.1 *Μία ισομετρία είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, και η αντίστροφη είναι επίσης ισομετρία.*

Απόδειξη. Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι μονότιμη, (1–1), όταν δύο διαφορετικά στοιχεία $a, b \in X$ δεν μπορεί να απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο του Y. Δηλαδή εάν $a \neq b$ συνεπάγεται $f(a) \neq f(b)$.

Μία ισομετρία U είναι προφανώς μονότιμη, γιατί εάν Α και Β είναι διαφορετικά σημεία, το ΑΒ έχει θετικό μήκος, ενώ εάν $U(\mathrm{A})$ και $U(\mathrm{B})$ συμπίπτουν, το μήκος του $U(\mathrm{A})U(\mathrm{B})$ είναι μηδέν.

Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι επίτιμη, (επί), όταν κάθε στοιχείο του Y ανήκει στην εικόνα του X. Δηλαδή εάν για κάθε $u \in Y$ υπάρχει $a \in X$ τέτοιο ώστε $f(a) = u$.

Για να δείξουμε οτι U είναι επίτιμη, θεωρούμε δύο σημεία Α, Β. Για κάθε σημείο $\mathrm{X} \in P$ που δεν βρίσκεται στην ευθεία των $U(\mathrm{A})$, $U(\mathrm{B})$, υπάρχει ακριβώς άλλο ένα σημείο X' τέτοιο ώστε $U(\mathrm{A})\mathrm{X}' = U(\mathrm{A})\mathrm{X}$ και $U(\mathrm{B})\mathrm{X}' = U(\mathrm{B})\mathrm{X}$. Θεωρούμε τα σημεία $\Psi \in P$ για τα οποία $\mathrm{A}\Psi = U(\mathrm{A})\mathrm{X}$ και $\mathrm{B}\Psi = U(\mathrm{B})\mathrm{X}$. Υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια σημεία, σε αντίθετες μεριές της ευθείας ΑΒ. Η ισομετρία U απεικονίζει αυτά τα σημεία στα X και X$'$. Άρα ένα από αυτά απεικονίζεται στο X. Παρόμοια δείχνουμε και την περίπτωση που X βρίσκεται στην ευθεία των U(A), U(B).

Για να δείξουμε οτι U^{-1} είναι ισομετρία, για κάθε δύο σημεία Γ και $\Delta \in P$ πρέπει να δείξουμε οτι το ευθύγραμμο τμήμα $U^{-1}(\Gamma)U^{-1}(\Delta)$ είναι ίσο με το ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A} = U^{-1}(\Gamma)$, $\mathrm{B} = U^{-1}(\Delta)$. Αλλά τότε $U(\mathrm{A}) = \Gamma$ και $U(\mathrm{B}) = \Delta$, και αφού U είναι ισομετρία, ΓΔ = AB. Άρα U^{-1} είναι ισομετρία.

□

Πρόταση 12.2 *Η σύνθεση δύο ισομετριών είναι επίσης ισομετρία.*

Απόδειξη. Εάν U και V είναι ισομετρίες και A, B είναι διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $V(U(\mathrm{A}))V(U(\mathrm{B}))$ είναι ίσο με το $U(\mathrm{A})U(\mathrm{B})$, και το $U(\mathrm{A})U(\mathrm{B})$ είναι ίσο με το AB. Άρα $V \circ U$ είναι ισομετρία.

□

Στην 'λγεβρα **ομάδα** ονομάζεται ένα σύνολο G με μία πράξη $(f, g) \longmapsto fg$, με τις ιδιότητες:

α'. Η πράξη είναι προσεταιριστική, $f(gh) = (fg)h$.

β'. Υπάρχει **ουδέτερο** στοιχείο $e \in G$, για το οποίο $ef = f = fe$ για κάθε $f \in G$.

γ'. Για κάθε $f \in G$, υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $fg = e = gf$. Αυτό το g είναι μοναδικό και συμβολίζεται f^{-1}.

Θεώρημα 12.3 *Το σύνολο όλων των ισομετριών του επιπέδου αποτελεί ομάδα, με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.*

Απόδειξη. Η πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι πάντα προσεταιριστική. Άρα για ισομετρίες U, V, W ισχύει $W \circ (V \circ U) = (W \circ V) \circ U$.

Ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική ισομετρία, $I(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, για την οποία ισχύει $I \circ U = U = U \circ I$, για κάθε U.

Η αντίστροφη ισομετρία U^{-1} ικανοποιεί $U \circ U^{-1} = I = U^{-1} \circ U$.

□

Πρόταση 12.4 *Εάν U είναι ισομετρία και ΑΒΓ τρίγωνο στο επίπεδο, τότε $U(A)U(B)U(\Gamma)$ σχηματίζουν τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.*

Αργότερα θα δείξουμε οτι ισχύει και το αντίστροφο: εάν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο.

Αυτή η Πρόταση αναδεικνύει μία αμφισημία που προκύπτει από την ορολογία και το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε. Έχουμε πει οτι δύο επιθέσιμα σχήματα θα λέμε οτι είναι ίσα, και θα γράφουμε, για παράδειγμα, ΑΒΓ = ΔΕΖ. Αυτή η ισότητα δεν σημαίνει οτι τα σύνολο σημείων {Α, Β, Γ} και {Δ, Ε, Ζ} είναι ίσα. Όταν όμως αναφερόμαστε σε ισομετρίες και γράφουμε $U(S) = R$, για κάποια σχήματα S και R, εννοούμε την ισότητα των υποσυνόλων $U(S)$ και R του P.

Λέμε οτι $\mathrm{X} \in P$ είναι **σταθερο σημείο** της ισομετρίας U εάν $U(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.

Πρόταση 12.5 *Μία ισομετρία απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.*

Απόδειξη. Κάθε ευθεία ε μπορεί να χαρακτηριστεί ως η μεσοκάθετος δύο σημείων Α και Β. Αφού μία ισομετρία U διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ σημείων, απεικονίζει όλα τα σημεία που ισαπέχουν από τα Α και Β σε σημεία που ισαπέχουν από τα $U(\mathrm{A})$ και $U(\mathrm{B})$. Άρα $U(\varepsilon)$ είναι η μεσοκάθετος των $U(\mathrm{A})$ και $U(\mathrm{B})$.

□

Έστω ένα σχήμα S, δηλαδή ένα υποσύνολο $S \subseteq P$. Μία ισομετρία U είναι **συμμετρία** του S εάν για κάθε $\mathrm{X} \in S$, $U(\mathrm{X}) \in S$ και $U^{-1}(\mathrm{X}) \in S$. Αυτό σημαίνει οτι S και $U(S)$ είναι ίσα ως υποσύνολα του P.

Πρόταση 12.6 *Το σύνολο των συμμετριών ενός σχήματος s είναι υποομάδα της ομάδας όλων των ισομετριών του επιπέδου, ονομάζεται* ***ομάδα συμμετρίας*** *του S και συμβολίζεται* $\mathrm{Sym}\,(S)$.

Απόδειξη. Ένα υποσύνολο μίας ομάδας είναι υποομάδα εάν περιέχει τις συνθέσεις όλων των στοιχείων του, και για κάθε στοιχείο του περιέχει το αντίστροφο. Από τον ορισμό της συμμετρίας, είναι προφανές οτι εάν U και V είναι συμμετρίες του S, τότε $V \circ U$ και U^{-1} είναι επίσης συμμετρίες του S.

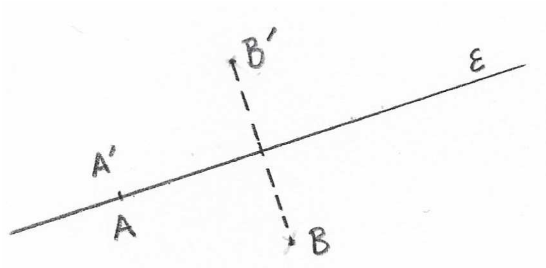
□

Ανακλάσεις

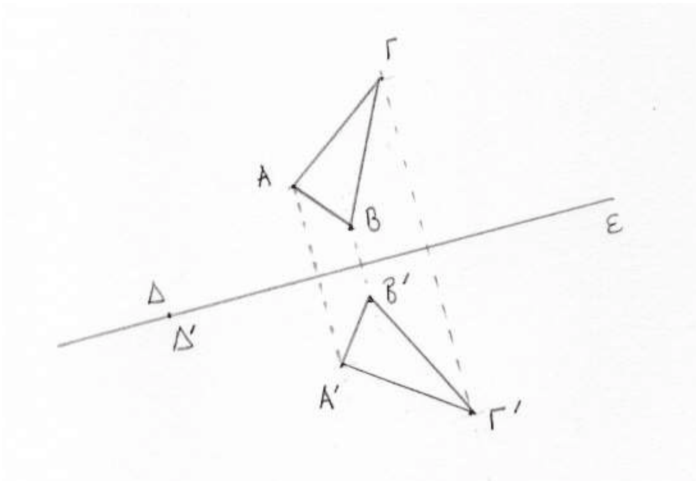
Εάν ε είναι μία ευθεία στο επίπεδο, η **ανάκλαση** στην ευθεία ε είναι η απεικόνιση $M_\varepsilon : P \longrightarrow P$ που αφήνει σταθερά τα σημεία που βρίσκονται στην ε, και απεικονίζει κάθε σημείο Χ που δεν βρίσκεται στην ε, στο σημείο $\mathrm{X}' = M_\varepsilon(\mathrm{X})$ για το οποίο ε είναι η μεσοκάθετος του XX'. Η ευθεία ε είναι ο **άξονας** της ανάκλασης.

Δραστηριότητα 12.1 Εάν Χ είναι σημείο εκτός της ε, κατασκευάστε το σημείο X'.

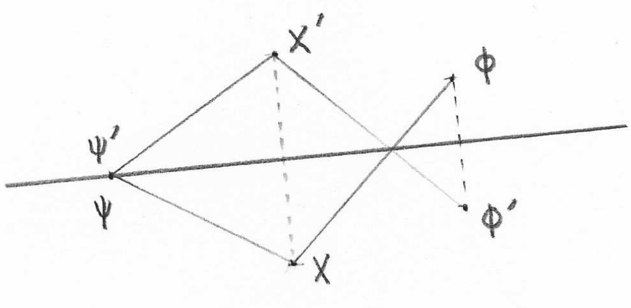
Θεώρημα 12.7 *Η ανάκλαση στην ευθεία ε είναι ισομετρία και $M_\varepsilon \circ M_\varepsilon = I$. Τα σταθερά σημεία της M_ε είναι ακριβώς όλα τα σημεία που βρίσκονται στον άξονα ε.*



Σχῆμα 12.1: Ανάκλαση στην ευθεία ε.



Σχῆμα 12.2: Ανάκλαση.



Σχῆμα 12.3: Η ανάκλαση διατηρεί τις αποστάσεις: $|\mathrm{X}\Psi| = |\mathrm{X}'\Psi'|$ και $|\mathrm{X}\Phi| = |\mathrm{X}'\Phi'|$.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημεία X και Ψ στο επίπεδο. Εάν τα X και Ψ βρίσκονται στην ε, τότε $\mathrm{X}' = \mathrm{X}$, $\Psi' = \Psi$.

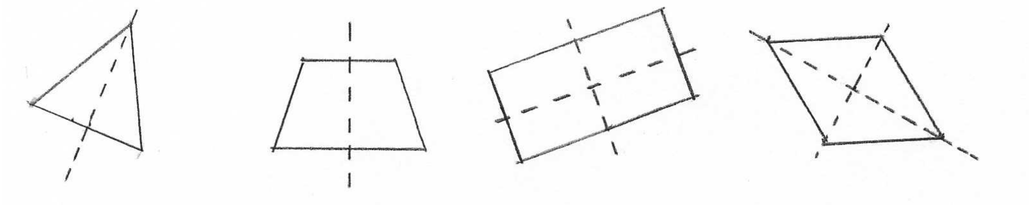
Υποθέτουμε οτι Ψ βρίσκεται στην ε, και X εκτός της ε. Τότε $\Psi = \Psi'$ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του XX'. Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΨX και $\Psi'\mathrm{X}'$ είναι ίσα.

Εάν το Ψ και το Χ βρίσκονται εκτός της ε, τότε τα σημεία Χ, Ψ, Χ$'$, Ψ$'$ σχηματίζουν ένα ισοσκελές τραπέζιο, του οποίου τα ευθύγραμμα τμήματα ΧΨ και Χ$'$Ψ$'$ αποτελούν είτε τις ίσες πλευρές είτε τις ίσες διαγωνίους.

□

Δραστηριότητα 12.2 Αποδείξτε οτι τα σημεία Χ, Ψ, Χ$'$, Ψ$'$ στην προηγούμενη απόδειξη αποτελούν ισοσκελές τραπέζιο.

Οι ανακλάσεις είναι από τις συμμετρίες ενός σχήματος που αντιλαμβανόμαστε πιο εύκολα. Εάν τα σύνολα S και $M_\varepsilon(S)$ είναι ίσα, λέμε οτι S είναι **συμμετρικό ως προς τον άξονα** ε.



Σχήμα 12.4: Σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα.

Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι συμμετρικό ως προς τη μεσοκάθετο της βάσης.

Ένα ισοσκελές τραπέζιο είναι συμμετρικό ως προς την κοινή μεσοκάθετο των βάσεων.

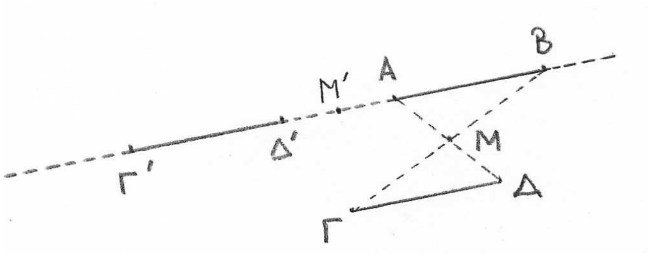
Ένας κύκλος είναι συμμετρικός ως προς κάθε διάμετρο.

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι συμμετρικό ως προς τις μεσοκαθέτους των πλευρών. Ένας ρόμβος είναι συμμετρικός ως προς τις διαγωνίους. Αντιθέτως, ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με άνισες πλευρές δεν έχει κανέναν άξονα συμμετρίας.

Ένα κανονικό πολύγωνο με n κορυφές έχει n άξονες συμμετρίας: είναι συμμετρικό ως προς τις μεσοκαθέτους των πλευρών και ως προς τις διχοτόμους των γωνιών του πολυγώνου.

Μεταφορές

Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος σημείων του επιπέδου (Α, Β), θεωρούμενο ως το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο οποίο διακρίνουμε το σημείο Α ως αρχή και το σημείο Β ως πέρας. Δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι **ισοδύναμα** ως προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, εάν τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ και ΓΒ συμπίπτουν. Εάν τα σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, αυτό σημαίνει οτι ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



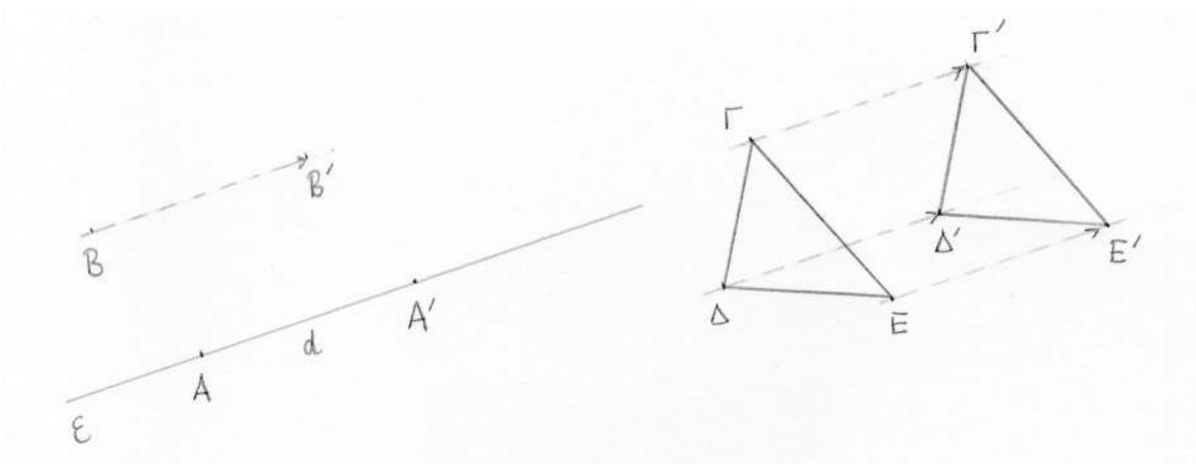
Σχῆμα 12.5: Ισοδύναμα προσανατολισμένα τμήματα.

Θεωρούμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB και ορίζουμε την απεικόνιση $T_{AB} : P \longrightarrow P$ η οποία μεταφέρει κάθε σημείο του επιπέδου κατά ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ισοδύναμο με το AB. Συγκεκριμένα, η T_{AB} απεικονίζει κάθε σημείο X $\in P$ στο σημείο $T_{AB}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}'$, για το οποίο XX′ είναι ισοδύναμο με το AB. Η απεικόνιση T_{AB} ονομάζεται **μεταφορά** κατά AB. Η ευθεία AB είναι ο **άξονας** της μεταφοράς T_{AB}.

'μεση συνέπεια του ορισμού είναι τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Πρόταση 12.8 *Εάν AB και ΓΔ είναι ισοδύναμα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, τότε* $T_{AB} = T_{\Gamma\Delta}$.

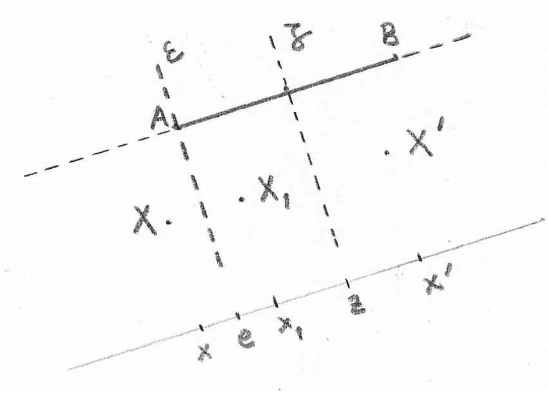
Η αντίστροφη απεικόνιση T_{AB}^{-1} *είναι η μεταφορά κατά το ευθύγραμμο τμήμα με τον αντίθετο προσανατολισμό,* T_{BA}.



Σχῆμα 12.6: Παράλληλη μεταφορά.

Θεώρημα 12.9 *Θεωρούμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB. Η απεικόνιση* T_{AB} *είναι ισομετρία του επιπέδου. Συγκεκριμένα, εάν* ε *είναι η ευθεία κάθετος* *στην AB στο A, και ζ η μεσοκάθετος του AB, τότε*

$$T_{AB} = M_\zeta \circ M_\varepsilon\,.$$



Σχήμα 12.7: Μεταφορά ως σύνθεση ανακλάσεων, (α′).

Απόδειξη. Θα δείξουμε οτι εάν $\mathrm{X}' = M_\zeta \circ M_\varepsilon(\mathrm{X})$, τότε XX' είναι ισοδύναμο με το AB. Το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι κάθετο στις ε και ζ, και έχει μήκος το διπλάσιο της απόστασης t από την ε στη ζ. Γνωρίζουμε οτι XX' είναι κάθετο στην ε, συνεπώς παράλληλο στο AB. Θα δούμε οτι έχει το ίδιο μήκος και την ίδια φορά.

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων στην ευθεία δ κάθετη στην ε από το X. Υποθέτουμε οτι X έχει συντεταγμένη x, το σημείο τομής της ε με τη δ έχει συντεταγμένη e, το σημείο τομής της ζ με τη δ έχει συντεταγμένη z. Τότε $\mathrm{X}_1 = M_\varepsilon(\mathrm{X})$ έχει συντεταγμένη

$$x_1 = x + 2(e - x)$$

και $M_\zeta \circ M_\varepsilon(\mathrm{X})$ έχει συντεταγμένη

$$x' = x_1 + 2(z - x_1)\,.$$

Αντικαθιστώντας το x_1 βρίσκουμε

$$x' = x + 2(z - e)\,,$$

δηλαδή X μεταφέρεται από την $M_\zeta \circ M_\varepsilon$ το διπλάσιο της απόστασης μεταξύ ε και ζ, στην κατεύθυνση από την ε προς τη ζ.

□

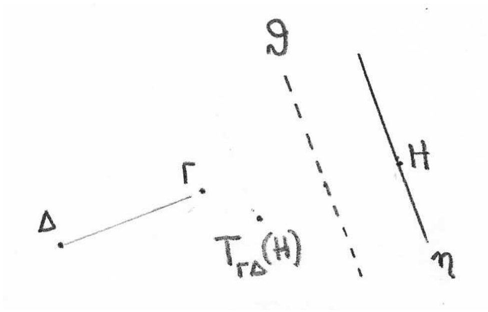
Δραστηριότητα 12.3 Εάν $T = M_\zeta \circ M_\varepsilon$, τότε $T^{-1} = M_\varepsilon \circ M_\zeta$.

Πόρισμα 12.10 *Εάν η και ϑ είναι παράλληλες ευθείες, τότε $M_\vartheta \circ M_\eta$ είναι μεταφορά.*

Πρόταση 12.11 *Θεωρούμε δύο σημεία Γ και Δ, και ευθεία η κάθετη στη ΓΔ. Τότε υπάρχει ευθεία ϑ παράλληλη στην η, τέτοια ώστε*

$$M_\vartheta \circ M_\eta = T_{\Gamma\Delta}\,.$$

Για την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε οτι εάν Η βρίσκεται στην η, ϑ είναι η μεσοκάθετος των σημείων Η και $T_{\Gamma\Delta}(\mathrm{H})$.



Σχήμα 12.8: Μεταφορά ως σύνθεση ανακλάσεων, (β′).

Η ισομετρία T_{AB} δεν έχει κανένα σταθερό σημείο. Κάθε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ είναι συμμετρική ως προς T_{AB}: η μεταφορά την απεικονίζει στον εαυτό της.

Πρόταση 12.12 *Ένα σχήμα S που είναι συμμετρικό ως προς μία μεταφορά, εκτείνεται στο άπειρο. Δηλαδή για κάθε θετικό αριθμό K υπάρχουν σημεία X και Ψ του S τέτοια ώστε* $|X\Psi| > K$.

Απόδειξη. Εάν S είναι συμμετρικό ως προς μία μετατόπιση T_{AB}, τότε S είναι συμμετρικό και προς τις συνθέσεις της T_{AB} με τον εαυτό της. Άρα αν $\mathrm{X} \in S$, τότε όλα τα σημεία $T_{AB}(\mathrm{X}), T^2_{AB}(\mathrm{X}), \ldots, T^n_{AB}(\mathrm{X}), \ldots$ ανήκουν στο S. Αλλά η απόσταση μεταξύ του Χ και του $T^n_{AB}(\mathrm{X})$ είναι ίση με $n|\mathrm{AB}|$.

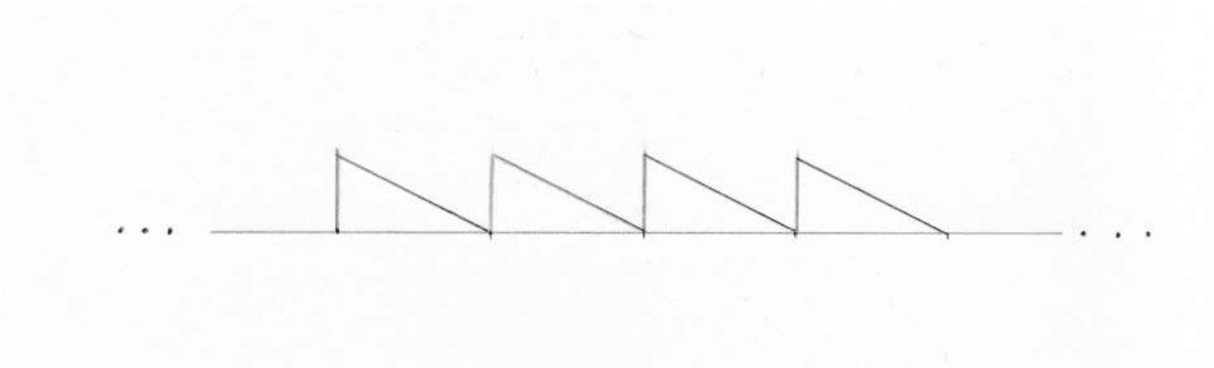
□

Το Σχήμα 12.9 είναι συμμετρικό ως προς μία μεταφορά.

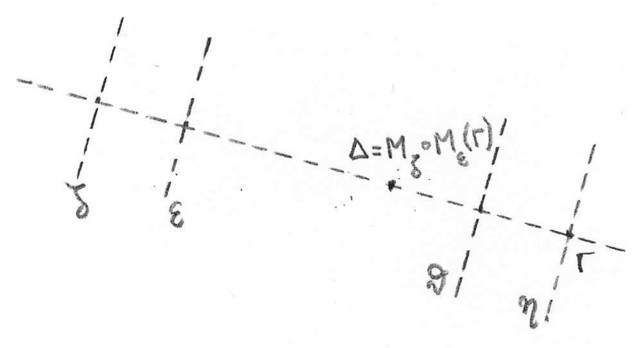
Θεώρημα 12.13 *Η σύνθεση τριών ανακλάσεων σε παράλληλες ευθείες είναι ίση με ανάκλαση σε μία ευθεία παράλληλη με τις αρχικές. Συγκεκριμένα, εάν* ε, ζ, η *είναι παράλληλες ευθείες, τότε υπάρχει ευθεία* ϑ, *παράλληλη προς τις προηγούμενες, τέτοια ώστε*

$$M_\zeta \circ M_\varepsilon \circ M_\eta = M_\vartheta\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο Γ της η, και $\Delta = M_\zeta \circ M_\varepsilon(\Gamma)$. Από την Πρόταση 12.11 γνωρίζουμε οτι $M_\zeta \circ M_\varepsilon$ είναι ίση με τη μεταφορά κατά ΓΔ.



Σχῆμα 12.9: Σχήμα συμμετρικό ως προς μεταφορά.



Σχῆμα 12.10: Σύνθεση τριών ανακλάσεων σε παράλληλες ευθείες.

Έστω ϑ η μεσοκάθετος του ΓΔ. Τότε $M_\vartheta \circ M_\eta(\Gamma) = \Delta$, δηλαδή $M_\vartheta \circ M_\eta$ και $M_\zeta \circ M_\varepsilon$ είναι και οι δύο ίσες με τη μεταφορά $T_{\Gamma\Delta}$. Άρα $M_\zeta \circ M_\varepsilon = M_\vartheta \circ M_\eta$, και αφού $M_\eta^{-1} = M_\eta$,

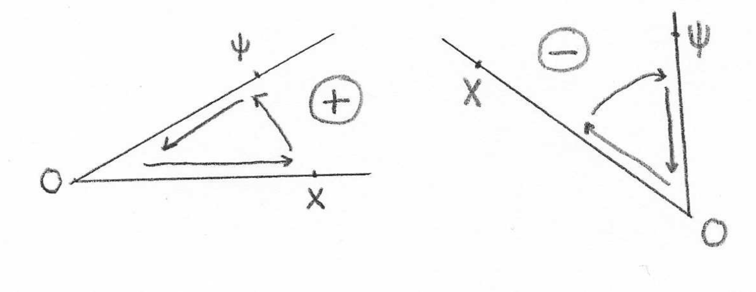
$$M_\zeta \circ M_\varepsilon \circ M_\eta = M_\vartheta \circ M_\eta \circ M_\eta = M_\vartheta\,.$$

□

Περιστροφές

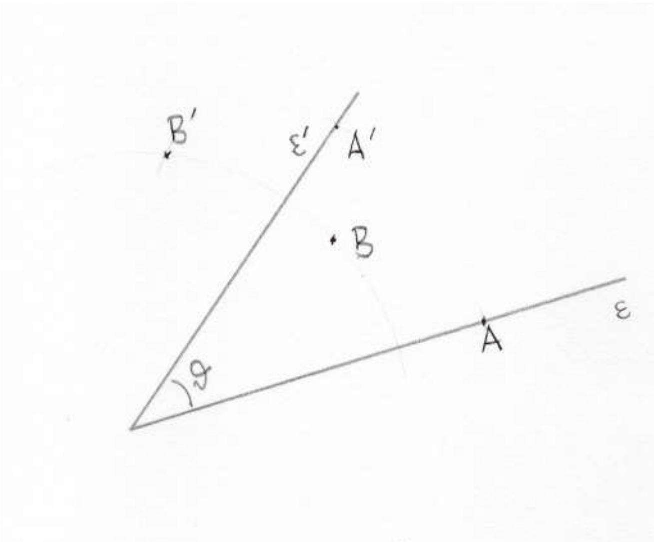
Στα ακόλουθα μετράμε τις γωνίες σε μοίρες.

Μία **προσανατολισμένη γωνία** είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος ημιευθειών με κοινή αρχή, (ΟΧ, ΟΨ), θεωρούμενο ως η γωνία ∠ΧΟΨ στην οποία διακρίνουμε τη αρχική ημιευθεία ΟΧ και την τελική ημιευθεία ΟΨ. Εάν η γωνία ∠ΧΟΨ έχει μέτρο ϑ, το **προσημασμένο μέτρο** της προσανατολισμένης γωνίας (ΟΧ, ΟΨ) είναι ϑ εάν τα προσανατολισμένα τμήματα ΟΧ, ΧΨ, ΨΟ διαγράφουν το τρίγωνο ΟΧΨ με φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ενώ είναι $-\vartheta$ εάν τα προσανατολισμένα τμήματα ΟΧ, ΧΨ, ΨΟ διαγράφουν το τρίγωνο ΟΧΨ με φορά ίδια με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Το προσημασμένο μέτρο πέρνει τιμές $-180 < \vartheta \leq 180$.



Σχῆμα 12.11: Προσανατολισμένη γωνία.

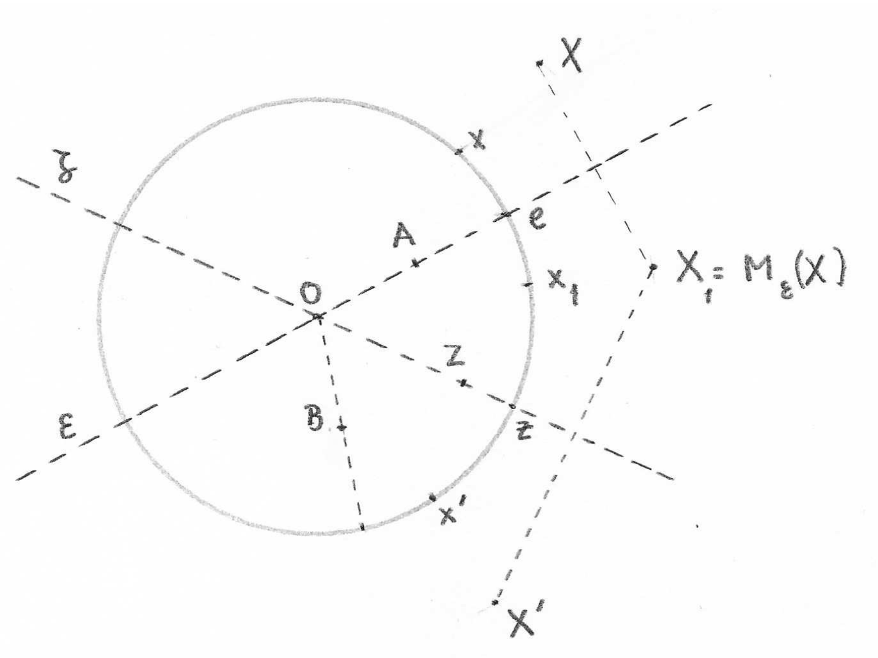
Θεωρούμε σημείο Ο του επιπέδου, και αριθμό ϑ με $-180 < \vartheta \leq 180$. Η **περιστροφή** με **κέντρο** Ο και **προσημασμένο μέτρο** $\vartheta \neq 0$ είναι η απεικόνιση $R_{O,\vartheta} : P \longrightarrow P$, η οποία αφήνει το σημείο Ο σταθερό, και απεικονίζει κάθε σημείο Ki διαφορετικό από το Ο στο σημείο $R_{O,\vartheta}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}'$ για το οποίο $|\mathrm{OX}| = |\mathrm{OX}'|$ και η προσανατολισμένη γωνία $(\mathrm{OX}, \mathrm{OX}')$ έχει μέτρο ίσο με ϑ.



Σχῆμα 12.12: Περιστροφή.

Θεώρημα 12.14 *Θεωρούμε σημείο Ο του επιπέδου, και αριθμό $\vartheta \neq$ με $-180 < \vartheta \leq 180$. Η απεικόνιση $R_{O,\vartheta} : P \longrightarrow P$ είναι ισομετρία. Συγκεκριμένα, εάν Α είναι σημείο* *διαφορετικό από το O,* $R_{O,\vartheta}(A) = B$ *και OZ ϵίναι η διχοτόμος της γωνίας* $\angle AOB$, *θέτουμϵ* ε *την ϵυθϵία OA και* ζ *την ϵυθϵία OZ. Τότϵ*

$$R_{O,\vartheta} = M_\zeta \circ M_\varepsilon \, .$$



Σχῆμα 12.13: Περιστροφή ως σύνθεση ανακλάσεων.

Απόδειξη. Θα δείξουμε οτι για κάθε σημείο X διαφορετικό από το O, και $X' = M_\zeta \circ M_\varepsilon(X)$, η προσημασμένη γωνία (OX, OX$'$) είναι ίση με την (OA, OB).

Θέτουμε $X_1 = M_\varepsilon(X)$. Θεωρούμε τα μέτρα των προσημασμένων γωνιών των ημιευθειών OZ, OX$_1$ και OX$'$ από την ημιευθεία OA, αντίστοιχα z, x, x_1 και x'. Τότε $\vartheta = 2z$ και

$$x_1 = x + 2(0 - x) = -x \, ,$$

$$x' = x_1 + 2(z - x_1) \, ,$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$x' = x + 2z = x + \vartheta \, .$$

Επισημαίνουμε οτι οι πράξεις γίνονται modulo 360, έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να βρίσκεται μεταξύ −180 και 180.

Καταλήγουμε οτι η ισομετρία $M_\zeta \circ M_\varepsilon$ περιστρέφει κάθε σημείο X κατά γωνία ϑ που είναι διπλάσια της γωνίας από την OA στην OZ.

□

Πρόταση 12.15 *Εάν δ και η τέμνονται στο σημείο O και η οξεία γωνία που σχηματίζουν, με προσανατολισμό από την η προς τη δ, έχει προσημασμένο μέτρο ϑ, τότε*

$$M_\delta \circ M_\eta = R_{O,2\vartheta}\,.$$

Η ισομετρία $R_{O,\vartheta}$, για $\vartheta \neq 0$, έχει μοναδικό σταθερό σημείο το Ο.

Λέμε οτι ένα σχήμα S είναι **συμμετρικό ως προς περιστροφή κατά γωνία** ϑ εάν $R_{O,\vartheta}(S) = S$. Ειδικότερα, λέμε οτι S είναι **συμμετρικό ως προς κέντρο** εάν $R_{O,180}(S) = S$.

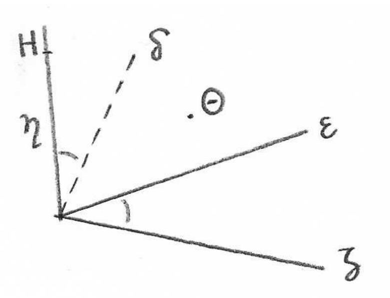
Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι συμμετρικό ως προς την περιστροφή γύρω από το κέντρο του κατά γωνία 120 και -120.

Ένας κύκλος είναι συμμετρικός ως προς κάθε περιστροφή γύρω από το κέντρο του.

Ένα κανονικό πολύγωνο με n κορυφές είναι συμμετρικό ως προς την περιστροφή γύρω από το κέντρο του κατά γωνία $\frac{360\cdot k}{n}$, για $k \neq 0$ τέτοιο ώστε $-n < 2k \leq n$.

Θεώρημα 12.16 *Η σύνθεση τριών ανακλάσεων σε ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο, είναι ίση με ανάκλαση σε μία ευθεία που διέρχεται από το ίδιο σημείο. Συγκεκριμένα, εάν ε, ζ, η είναι ευθείες που διέρχονται από το O, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία δ που διέρχεται από το O τέτοια ώστε*

$$M_\zeta \circ M_\varepsilon \circ M_\eta = M_\delta\,.$$



Σχήμα 12.14: Σύνθεση τριών ανακλάσεων σε συγκλίνουσες ευθείες.

Απόδειξη. Θεωρούμε ημιευθεία ΟΗ της η, και $\Theta = M_\zeta \circ M_\varepsilon(\mathrm{H})$. Έστω ϑ το μέτρο της προσανατολισμένης γωνίας που σχηματίζουν οι (ΟΗ, ΟΘ), και δ η διχοτόμος της ΗΟΘ. Τότε $M_\delta \circ M_\eta(\mathrm{H}) = \Theta$. Δηλαδή $M_\delta \circ M_\eta$ και $M_\zeta \circ M_\varepsilon$ είναι και οι δύο ίσες με περιστροφή με κέντρο Ο και μέτρο ϑ.

Άρα $M_\zeta \circ M_\varepsilon = M_\delta \circ M_\eta$, και αφού $M_\eta^{-1} = M_\eta$,

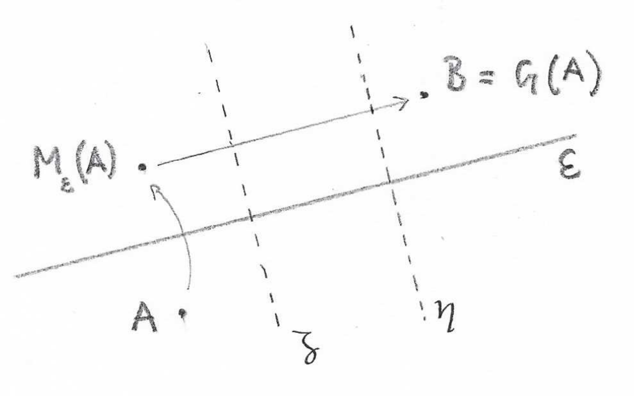
$$M_\zeta \circ M_\varepsilon \circ M_\eta = M_\delta \circ M_\eta \circ M_\eta = M_\delta\,.$$

□

Ολισθανακλάσεις

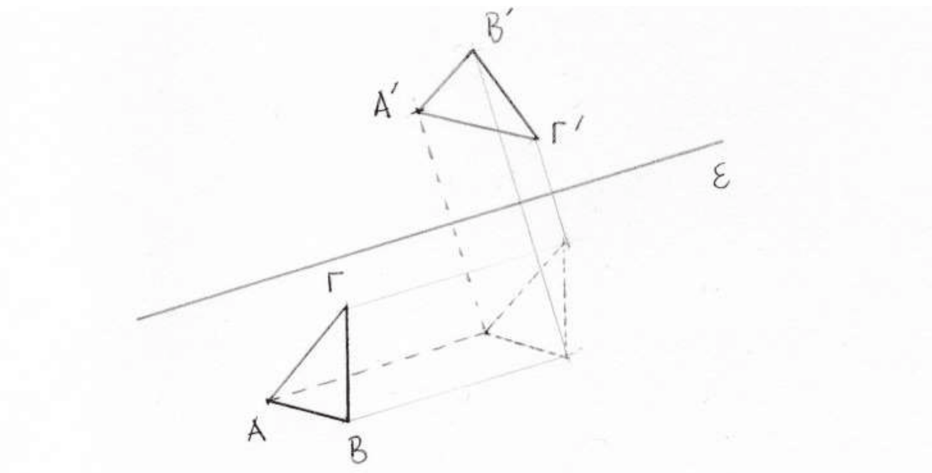
Μία **ολισθανάκλαση** G είναι η σύνθεση μίας ανάκλασης σε ευθεία ε και μίας μεταφοράς κατά ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB παράλληλο προς την ε. Η ευθεία ε είναι ο **άξονας** της ολισθανάκλασης. Παρατηρούμε οτι αυτές οι δύο ισομετρίες μετατίθενται,

$$G = T_{AB} \circ M_\varepsilon = M_\varepsilon \circ T_{AB}\,.$$



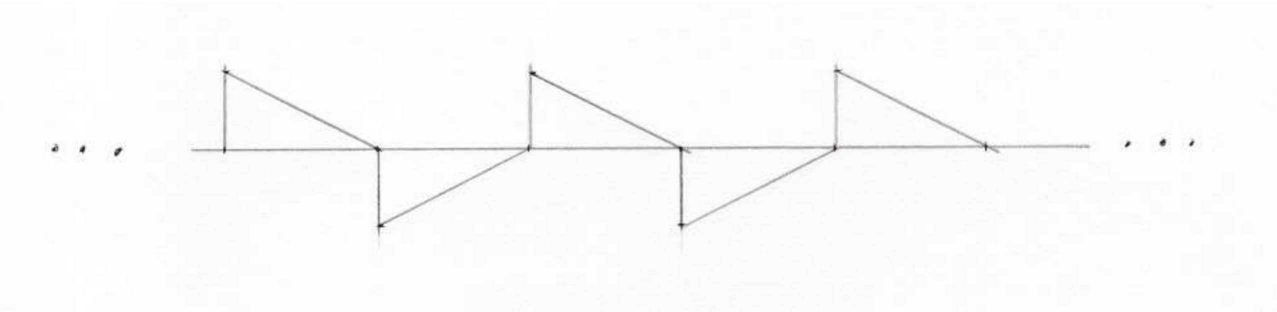
Σχῆμα 12.15: Ολισθανάκλαση.

Πρόταση 12.17 *Μία ολισθανάκλαση δεν έχει σταθερά σημεία. Ένα σχήμα σταθερό ως προς μία ολισθανάκλαση εκτείνεται στο άπειρο.*



Σχῆμα 12.16: Ολισθανάκλαση.

Το Σχήμα 12.17 είναι συμμετρικό ως προς μία ολισθανάκλαση.



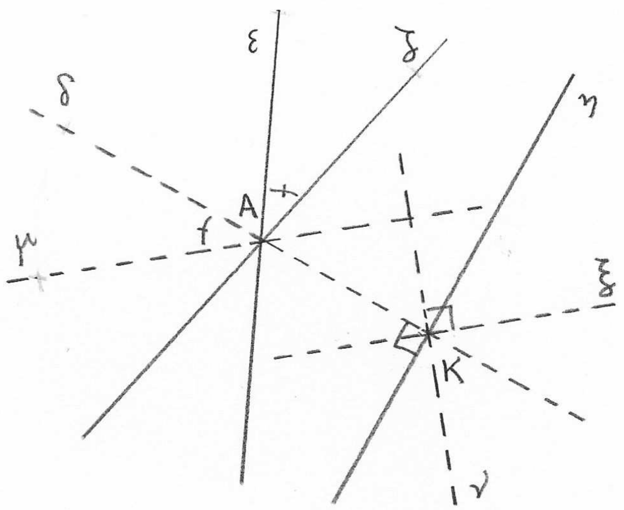
Σχῆμα 12.17: Ταινία συμμετρική ως προς ολισθανάκλαση.

Κάθε ολισθανάκλαση G είναι ίση με τη σύνθεση τριών ανακλάσεων, σε ευθείες ε, ζ, η, όπου ζ και η είναι κάθετες στην ε,

$$G = M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta \,.$$

Το ακόλουθο Θεώρημα δείχνει οτι αντίστροφα, η σύνθεση ανακλάσεων σε τρεις ευθείες σε γενική θέση είναι ολισθανάκλαση.

Θεώρημα 12.18 *Εάν ε, ζ, η είναι τρεις ευθείες που δεν διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και δεν είναι όλες παράλληλες, τότε η σύνθεση $M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta$ είναι ολισθανάκλαση.*



Σχῆμα 12.18: Σύνθεση τριών ανακλάσεων σε γενική θέση.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι οι ε και ζ τέμνονται σε σημείο A. Έστω δ η ευθεία από το A κάθετη στην η, που τέχμνει την η στο K. Από το Θεώρημα 12.16, υπάρχει ευθεία μ που διέρχεται από το Α, τέτοια ώστε $M_\varepsilon \circ M_\zeta = M_\mu \circ M_\delta$, και συνεπώς

$$M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta = M_\mu \circ M_\delta \circ M_\eta \,.$$

Από το Κ φέρουμε την ευθεία ν κάθετο στη μ, και την ευθεία ξ παράλληλη προς τη μ. Η σύνθεση $M_\delta \circ M_\eta$ είναι περιστροφή με κέντρο Κ κατά 180 μοίρες, και είναι ίση με τη $M_\xi \circ M_\nu$. Συνεπώς

$$M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta = M_\mu \circ M_\xi \circ M_\nu \,.$$

Αλλά οι ευθείες μ και ξ είναι παράλληλες, και δεν συμπίπτουν, αφού από την κατασκευή της μ αυτή δεν διέρχεται από το Κ. Άρα $M_\mu \circ M_\xi$ είναι μεταφορά στη διεύθυνση της κοινής καθέτου ν και $M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta = T \circ M_\nu$ είναι ολισθανάκλαση.

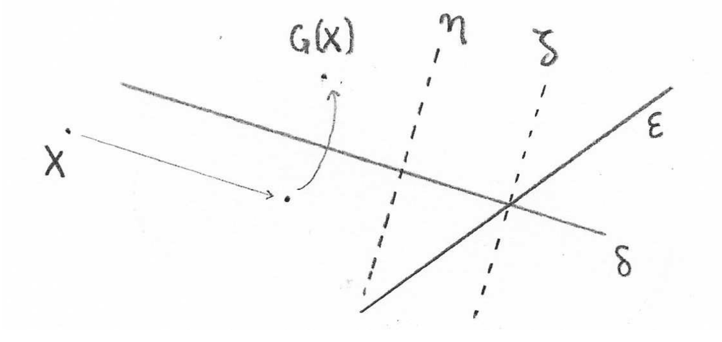
Εάν οι ε και ζ δεν τέμνονται, τότε η ζ τέμνει την η. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο επιχείρημα δείχνουμε οτι $M_\eta \circ M_\zeta \circ M_\varepsilon = T \circ M_\nu$ για μεταφορά T και ανάκλαση M_ν. Αλλά

$$\begin{aligned} M_\varepsilon \circ M_\zeta \circ M_\eta &= (M_\eta \circ M_\zeta \circ M_\varepsilon)^{-1} \\ &= (T \circ M_\nu)^{-1} \\ &= M_\nu \circ T^{-1} \,, \end{aligned}$$

το οποίο πάλι είναι ολισθανάκλαση.

□

Θεώρημα 12.19 *Εάν G είναι ολισθανάκλαση και M είναι ανάκλαση, τότε $M \circ G$ είναι είτε μεταφορά είτε περιστροφή.*



Σχήμα 12.19: Σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων σε γενική θέση.

Απόδειξη. Έστω δ ο άξονας της ολισθανάκλασης G και ε ο άξονας της ανάκλασης M.

Υποθέτουμε οτι η ε τέμνει τη δ στο σημείο Α. Τότε υπάρχουν ευθείες ζ και η κάθετες στη δ, τέτοιες ώστε το σημείο Α βρίσκεται στη ζ και $G = M_\delta \circ M_\zeta \circ M_\eta$. Τότε

$$M_\varepsilon \circ G = M_\varepsilon \circ M_\delta \circ M_\zeta \circ M_\eta \,.$$

Αλλά οι ε, δ και ζ τέμνονται στο Α. Από το Θεώρημα 12.16, υπάρχει ευθεία μ από το Α, τέτοια ώστε $M_\varepsilon \circ G = M_\mu \circ M_\eta$, που είναι μεταφορά εάν οι μ και η είναι παράλληλες και περιστροφή εάν τέμνονται.

Εάν ε και δ είναι παράλληλες, γράφουμε την ολισθανάκλαση ως $G = M_\delta \circ M_\zeta \circ M_\eta$, και

$$M_\varepsilon \circ G = M_\varepsilon \circ M_\delta \circ M_\zeta \circ M_\eta$$

είναι σύνθεση δύο μεταφορών, που είναι μεταφορά.

□

Γενικές ισομετρίες του επιπέδου

Από τα προηγούμενα Θεωρήματα συμπεραίνουμε οτι κάθε σύνθεση ανακλάσεων είναι ίση με τη σύνθεση δύο ή τριών ανακλάσεων. Πράγματι, στα Θεωρήματα 12.13, 12.16, 12.18 και 12.19, έχουμε δει οτι η σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων είναι πάντοτε ίση με μία σύνθεση δύο ανακλάσεων. Εάν έχουμε μία σύνθεση n ανακλάσεων, μπορούμε διαδοχικά να ελαττώνουμε τον αριθμό τους κατά δύο, μέχρι να απομείνουν λιγότερες από τέσσερεις. Θα δείξουμε οτι όλες οι ισομετρίες είναι αυτής της μορφής.

Θεώρημα 12.20 *Μία ισομετρία του επιπέδου που αφήνει σταθερά τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, είναι η ταυτοτική.*

Απόδειξη. Θεωρούμε Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και U ισομετρία του επιπέδου τέτοια ώστε $U(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $U(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ και $U(\Gamma) = \Gamma$.

Έστω Χ σημείο του επιπέδου και $a = |\mathrm{AX}|$, $b = |\mathrm{BX}|$, $c = |\Gamma\mathrm{X}|$. Η ισομετρία U απεικονίζει το Χ σε σημείο $U(\mathrm{X})$ του οποίου οι αποστάσεις από τα Α, Β, Γ είναι ίσες με a, b, c αντίστοιχα. Συνεπώς $U(\mathrm{X})$ βρίσκεται στην τομή των κύκλων (A, a), (B, b) και (Γ, c). Αφού τα κέντρα των κύκλων δεν βρίσκονται στο ίδιο σημείο, το μοναδικό σημείο στο οποίο τέμνονται οι κύκλοι είναι το Χ. Άρα $U(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.

□

Θεώρημα 12.21 *Κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση δύο ή τριών ανακλάσεων σε ευθείες του επιπέδου. Συγκεκριμένα, μία ισομετρία διαφορετική από την ταυτοτική είναι μεταφορά, περιστροφή, ανάκλαση ή ολισθανάκλαση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε U ισομετρία του επιπέδου και Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, με $U(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $U(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ και $U(\Gamma) = \Gamma'$. Έστω $T_{A'A}$ η μεταφορά κατά το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα Α'Α. Τότε $T_{A'A} \circ U$ είναι ισομετρία με σταθερό σημείο Α.

Συμβολίζουμε B'' το σημείο $T_{A'A} \circ U(\mathrm{B})$. Τότε $\mathrm{AB}'' = \mathrm{AB}$. Άρα η περιστροφή με κέντρο Α και προσανατολισμένη γωνία $(\mathrm{AB}'', \mathrm{AB}$ με μέτρο ϑ, αφήνει το Α σταθερό και απεικονίζει το B'' στο Β. Συμπεραίνουμε οτι $R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A} \circ U$ έχει δύο σταθερά σημεία, τα Α και Β.

Τώρα $\Gamma_3 = R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A} \circ U(\Gamma)$ απέχει από τα Α και Β όσο απέχει και το Γ. Άρα, αν $r_A = |\mathrm{A}\Gamma|$ και $r_B = |\mathrm{B}\Gamma|$, το Γ_3 είναι ένα από τα κοινά σημεία των κύκλων (A, r_A) και (B, r_b). Αλλά υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια σημεία, το Γ και η ανάκλαση του Γ στην ευθεία $\varepsilon = \mathrm{AB}$.

Συμπεραίνουμε οτι είτε η $R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A} \circ U$ είτε η $M_\varepsilon \circ R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A} \circ U$ έχει τρία σταθερά σημεία. Από το Θεώρημα 12.21, μία από αυτές τις ισομετρίες είναι η ταυτοτική. Συνεπώς

$$\text{είτε} \quad U = (R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A})^{-1} \quad \text{είτε} \quad U = (M_\varepsilon \circ R_{A,\vartheta} \circ T_{A'A})^{-1}.$$

Δείξαμε οτι κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι σύνθεση ανακλάσεων. Αλλά έχουμε δει οτι μία σύνθεση ανακλάσεων είναι μεταφορά, περιστροφή, ανάκλαση ή ολισθανάκλαση.

□

Σταθερά σημεία και σταθερές ευθείες ισομετριών

Στο επόμενο Θεώρημα καταγράφουμε όσα γνωρίζουμε ήδη για τα σταθερά σημεία μίας ισομετρίας.

Θεώρημα 12.22 *α΄. Η ταυτοτική ισομετρία έχει όλο το επίπεδο ως σταθερά σημεία.*

β΄. Μία ανάκλαση έχει μία ευθεία σταθερών σημείων.

γ΄. Μία περιστροφή έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

δ΄. Μία μεταφορά δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

ε΄. Μία ολισθανάκλαση δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

□

Μία ισομετρία του επιπέδου απεικονίζει κάθε ευθεία σε μία ευθεία, Πρόταση 12.5. Συνεπώς υπάρχει μία επαγόμενη απεικόνιση στο σύνολο L των ευθειών του επιπέδου,

$U : L \longrightarrow L$. Λέμε οτι η ευθεία ε είναι **σταθερή ευθεία** της ισομετρίας U, όταν $U(\varepsilon) = \varepsilon$.

Δέσμη παραλλήλων ευθειών λέμε το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες προς κάποια δεδομένη ευθεία. **Δέσμη ευθειών με κέντρο** Ο λέμε το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Ο.

Θεώρημα 12.23 *α΄. Η ταυτοτική ισομετρία αφήνει όλες τις ευθείες σταθερές.*

β΄. Μία ανάκλαση έχει ως σταθερές ευθείες τον άξονα της ανάκλασης, και τη δέσμη των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα.

γ΄. Μία περιστροφή κατά δύο ορθές έχει ως σταθερές ευθείες τη δέσμη ευθειών που περνούν από το κέντρο της περιστροφής. Κάθε άλλη περιστροφή δεν έχει σταθερές ευθείες.

δ΄. Μία μεταφορά κατά μήκος της ευθείας ε έχει ως σταθερές ευθείες τις ευθείες της δέσμης παραλλήλων προς την ε..

ε΄. Μία ολισθανάκλαση έχει ακριβώς μία σταθερή ευθεία, τον άξονά της.

□

Συμμετρίες των κανονικών πολυγώνων

Ποιές ισομετρίες του επιπέδου απεικονίζουν ένα τρίγωνο στον εαυτό του;

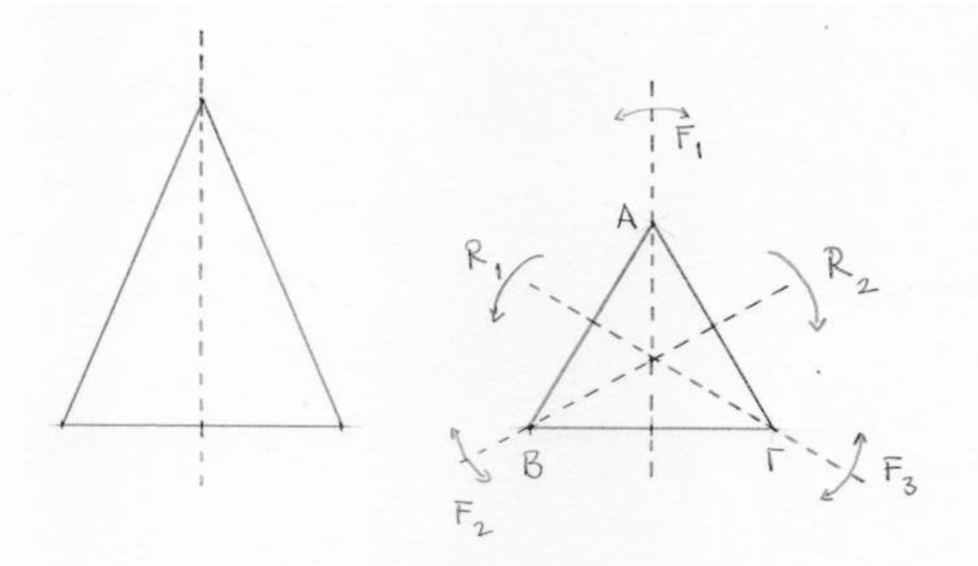
Εάν το τρίγωνο είναι σκαληνό, τότε μόνον η ταυτοτική απεικόνιση το απεικονίζει στον εαυτό του.

Εάν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε εκτός από την ταυτοτική, υπάρχει άλλη μία ισομετρία που το απεικονίζει στον εαυτό του: η ανάκλαση στη μεσοκάθετο της βάσης του τριγώνου.

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περισσότερες συμμετρίες. Κάθε πλευρά μπορεί να απεικονιστεί σε κάθε άλλη, και κάθε κορυφή σε κάθε άλλη. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α μπορεί να απεικονιστεί σε οποιαδήποτε κορυφή Α, Β ή Γ. Κατόπιν η κορυφή Β μπορεί να απεικονιστεί σε οποιαδήποτε από τις άλλες δύο κορυφές. Τέλος η κορυφή Γ απεικονίζεται στην κορυφή που απομένει. Όλες αυτές οι απεικονίσεις των κορυφών μπορούν να γίνουν με ισομετρίες του επιπέδου. Αυτές είναι

- Η ταυτοτική ισομετρία

- Οι περιστροφές R_1 και R_2, γύρω από το κέντρο του τριγώνου κατά γωνία 120 και -120 μοίρες.

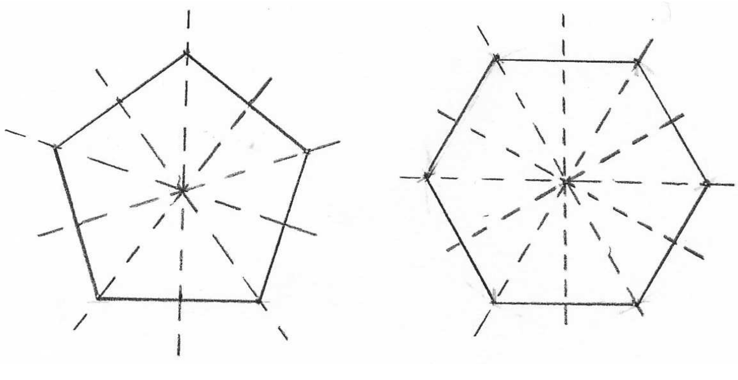


Σχῆμα 12.20: Συμμετρίες ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου.

- Οι ανακλάσεις F_1, F_2 και F_3 στις μεσοκαθέτους κάθε πλευράς του τριγώνου.

Η ομάδα συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου αποτελείται από αυτά τα έξι στοιχεία, και ονομάζεται διεδρική ομάδα D_6.

Σε πολύγωνα με περισσότερες από τρεις κορυφές, δεν μπορεί κάθε συνδυασμός των κορυφών να προκύψει από μία ισομετρία: αφού μία ισομετρία απεικονίζει πλευρές σε πλευρές, δύο γειτονικές κορυφές πρέπει υποχρεωτικά να απεικονιστούν σε γειτονικές κορυφές.



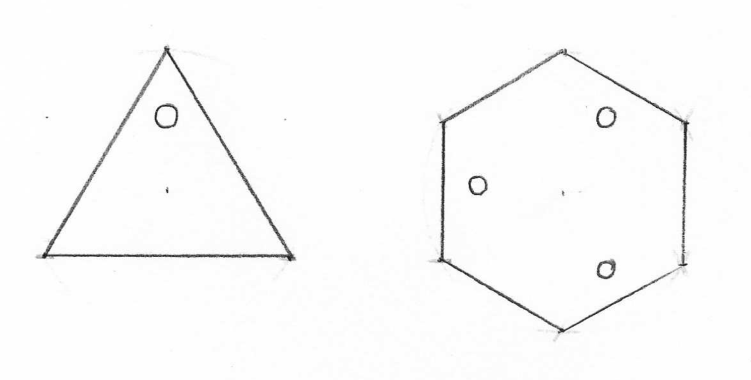
Σχῆμα 12.21: 'ξονες συμμετρίας του πενταγώνου και του εξαγώνου.

Σε ένα πολύγωνο με $n > 3$ κορυφές, υπάρχουν n επιλογές για την πρώτη κορυφή, αλλά για τη δεύτερη μόνο δύο επιλογές μπορεί να προκύψουν από ισομετρία, και αυτές καθορίζουν τη θέση όλων των άλλων κορυφών. Αυτές είναι

- Η ταυτοτική ισομετρία
- Οι $n-1$ περιστροφές γύρω από το κέντρο του πολυγώνου κατά γωνία $\frac{360k}{n}$ μοίρες, για $k \neq 0$ ακέραιο με $-\frac{n}{2} < k < \frac{n}{2}$.
- Οι n ανακλάσεις στους άξονες συμμετρίας του πολυγώνου.

Η ομάδα συμμετρίας του κανονικού πολυγώνου με n κορυφές αποτελείται από $2n$ στοιχεία και ονομάζεται διεδρική ομάδα D_{2n}.

Εάν προσθέσουμε κάποια ''διακόσμηση'' στο πολύγωνο, μπορεί να μειωθούν οι συμμετρίες του σχήματος. Για παράδειγμα, η ομάδα συμμετρίας του τριγώνου με τον κύκλο περιέχει μόνο μία ανάκλαση, ενώ η ομάδα του εξαγώνου με τους τρείς κύκλους είναι ίδια με την ομάδα του τριγώνου.



Σχήμα 12.22: Πολύγωνα με μειωμένη συμμετρία.

Ασκήσεις

Ασκηση 12.4 Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και απέχουν απόσταση d, ποιά είναι η ισομετρία που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε πρώτα την ανάκλαση F_1 στην ευθεία ε_1 και κατόπιν την ανάκλαση F_2 στην ευθεία ε_2;

Ασκηση 12.5 Εάν οι ευθείες ζ_1 και ζ_2 τέμνονται στο σημείο O και σχηματίζουν γωνία ϑ, ποιά είναι η ισομετρία που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε πρώτα την ανάκλαση F_1 στην ευθεία ζ_1 και κατόπιν την ανάκλαση F_2 στην ευθεία ζ_2;

Ασκηση 12.6 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Ασκηση 12.7 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Ασκηση 12.8 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Ασκηση 12.9 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Ασκηση 12.10 Δίδονται δύο ευθείες δ και ε. Η εικόνα της ε από την ανάκλαση M_ε είναι η ευθεία ζ. Δείξτε οτι $M_\delta \circ M_\varepsilon \circ M_\delta = M_\zeta$.

Ασκηση 12.11 Δίδονται δύο σημεία A, B και ευθεία δ. Εάν ε είναι η εικόνα της δ από τη μεταφορά T_{AB}, δείξτε οτι η ε είναι παράλληλη στη δ.

Ασκηση 12.12 Με A, B, δ και ε όπως στην προηγούμενη ’σκηση, δείξτε οτι

$$T_{AB} \circ M_\delta \circ (T_{AB})^{-1} = M_\varepsilon\,.$$

Ασκηση 12.13 Δίδονται δύο σημεία A, B και γωνία ϑ. $R_{A,\vartheta}$ είναι η περιστροφή κατά γωνία ϑ γύρω από κέντρο A. Δείξτε οτι

$$T_{AB} \circ R_{A,\vartheta} \circ (T_{AB})^{-1} = R_{B,\vartheta}\,.$$

Κεφάλαιο 13

Αναλογίες και εμβαδόν

Αναλογίες διαστημάτων

Η έννοια του λόγου αναφέρεται σε ομοειδή μεγέθη. Στους ορισμούς στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων ο λόγος ορίζεται ως μία σχέση "πηλικότητας" μεταξύ ομογενών μεγεθών.

γʹ. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

Αλλά για να ορίζεται ο λόγος, τα μεγέθη πρέπει να είναι συγκρίσιμα: πρέπει ένα πολλαπλάσιο του ενός μεγέθους να μπορεί να ξεπεράσει το άλλο μέγεθος.

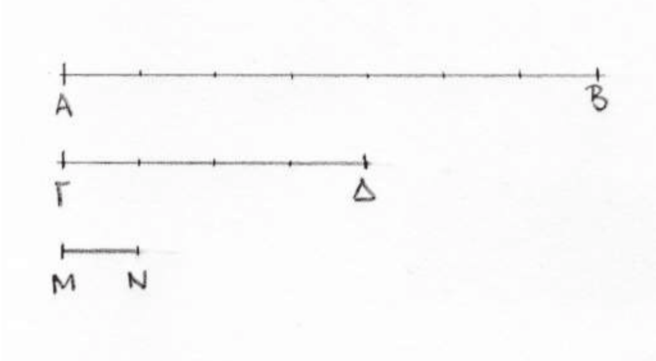
δʹ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Έτσι δεν ορίζεται λόγος μεταξύ μήκους και επιφανείας, ή μεταξύ ενός ευθύγραμμου τμήματος και μίας ευθείας.

Διαισθητικά, για να προσδιορίσουμε το λόγο δύο διαστημάτων ΑΒ και ΓΔ, υποθέτουμε οτι υπάρχει κάποιο διάστημα ΜΝ τέτοιο ώστε κάποιο πολλαπλάσιο του ΜΝ είναι ίσο με το ΑΒ, ΑΒ = κΜΝ, και κάποιο πολλαπλάσιο του ΜΝ είναι ίσο με το ΓΔ, ΓΔ = λΜΝ. Το ΜΝ ονομάζεται κοινό μέτρο των ΑΒ και ΓΔ, και ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ο λόγος του κ προς το λ, δηλαδή το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$, Σχήμα 13.1.

Η μεγάλη ανατροπή στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά ήρθε όταν ανακαλύφθηκε οτι αυτή η διαισθητική προσέγγιση δεν καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Συγκεκριμένα ανακαλύφθηκε οτι υπάρχουν διαστήματα για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο ΜΝ.

Δεν είναι γνωστό πώς ακριβώς διαπιστώθηκε αυτό για πρώτη φορά. Σύμφωνα με την παράδοση, το ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, οι οποίοι θεώρησαν την ανακάλυψή τους τόσο ανατρεπτική που απαγόρευσαν να διαδοθεί αυτή η γνώση. Όταν μάλιστα ο Ίππασος παρέβει την απαγόρευση, τον έπνιξαν στη θάλασσα.



Σχῆμα 13.1: Το ΜΝ είναι κοινό μέτρο των ΑΒ και ΓΔ.

Τέτοια μεγέθη που δεν έχουν κοινό μέτρο ονομάστηκαν *ασύμμετρα*. Αυτή η ανακάλυψη οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες να διαχωρίσουν τη γεωμετρία από την αριθμητική, και να αναπτύξουν μία θεωρία αναλογιών που καλύπτει τόσο τα σύμμετρα όσο και τα ασύμμετρα μεγέθη. Αυτή η θεωρία βασίζεται στον ορισμό της αναλογίας του Ευδόξου.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Ο λόγος δύο μεγεθών α και β συμβολίζεται $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$. Τέσσερα μεγέθη α, β, γ και δ είναι **ανάλογα** σύμφωνα με τον ορισμό του Ευδόξου όταν για οποιουσδήποτε αριθμούς M και N, τα πολλαπλάσια $M\alpha$ και $N\beta$ έχουν ακριβώς την ίδια σχέση ισότητας ή ανισότητας με τα πολλαπλάσια $M\gamma$ και $N\delta$:

$$\begin{aligned} M\alpha > N\beta &\iff M\gamma > \delta\,, \\ M\alpha = N\beta &\iff M\gamma = \delta\,, \\ M\alpha < N\beta &\iff M\gamma < \delta\,. \end{aligned}$$

Τότε γράφουμε $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

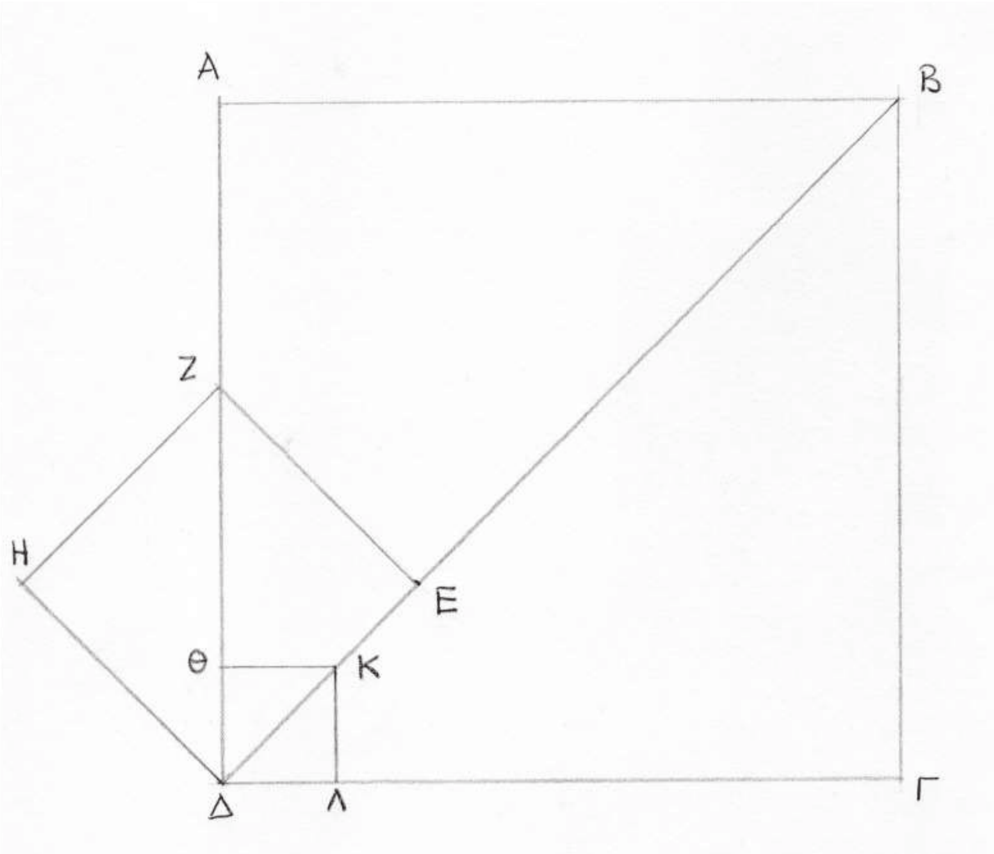
Τα μεγέθη α και δ ονομάζονται *άκροι όροι* της αναλογίας, ενώ τα μεγέθη β και γ ονομάζονται *μέσοι όροι*. Σε μία αναλογία της μορφής $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\delta}$, όπου οι δύο μέσοι όροι ταυτίζονται, λέμε οτι β είναι η *μέση ανάλογος* των α και δ.

Πρόταση 13.1 *Η διαγώνιος ενός τετραγώνου και η πλευρά του δεν έχουν κοινό μέτρο.*

Ο Αριστοτέλης περιγράφει μία αριθμητική απόδειξη αυτής της πρότασης, ανάλογη της σύγχρονης απόδειξης οτι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος αριθμός. Εμείς θα δώσουμε μία γεωμετρική απόδειξη.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και φέρομε τη διαγώνιο ΒΔ, Σχήμα 13.2. Υποθέτουμε οτι υπάρχει κοινό μέτρο των ΑΒ και ΒΔ, δηλαδή οτι υπάρχει ένα διάστημα ΜΝ και θετικοί ακέραιοι κ και λ, τέτοιοι ώστε ΑΒ = κ ΜΝ και ΒΔ = λ ΜΝ.

Πάνω στο ΒΔ παίρνουμε διάστημα ΒΕ = ΑΒ. Από το Ε φέρομε κάθετο στη ΒΔ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Η γωνία ∠ΕΔΖ είναι μισή ορθή, συνεπώς το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Κατασκευάζουμε τετράγωνο με πλευρά ΔΕ.



Σχῆμα 13.2: Πλευρά και διαγώνιος τετραγώνου είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Παρατηρούμε οτι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΕΒΖ είναι ίσα, και συνεπώς ΑΖ = ΕΖ. Για την πλευρά και τη διαγώνιο του τετραγώνου ΔΕΖΗ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{E\Delta} &= \mathrm{B\Delta} - \mathrm{AB} = \lambda\mathrm{MN} - \kappa\mathrm{MN} = (\lambda - \kappa)\mathrm{MN} \\ \mathrm{\Delta Z} &= \mathrm{A\Delta} - \mathrm{AZ} = \mathrm{A\Delta} - \mathrm{E\Delta} = \kappa\mathrm{MN} - (\lambda - \kappa)\mathrm{MN} = (2\kappa - \lambda)\mathrm{MN}\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι το ΜΝ είναι κοινό μέτρο της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου ΔΕΖΗ. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία στο τετράγωνο ΔΕΖΗ, αφαιρώντας από τη διαγώνιο ΖΔ τμήμα ΖΘ ίσο με το ΖΕ, και κατασκευάζοντας το τετράγωνο ΔΘΚΛ με πλευρά ΔΘ. Η πλευρά και η διαγώνιος αυτού του τετραγώνου πάλι έχουν κοινό μέτρο ΜΝ.

Παρατηρούμε οτι $\Delta\mathrm{Z} > \mathrm{EZ} = \mathrm{AZ}$. Συνεπώς $\mathrm{AZ} < \frac{1}{2}\mathrm{A}\Delta$, και $\Delta\Lambda < \frac{1}{4}\Delta\Gamma$. Εάν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία, λαμβάνουμε συνεχώς μικρότερα τετράγωνα. Μετά από αρκετές επαναλήψεις θα λάβουμε ένα τετράγωνο με πλευρά μικρότερη από ΜΝ. Όμως είδαμε οτι ΜΝ είναι κοινό μέτρο όλων των πλευρών και των διαγωνίων που προκύπτουν με αυτή τη διαδικασία. *'τοπο*, αφού ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του ΜΝ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ΜΝ.

Αφού η υπόθεση οτι υπάρχει κοινό μέτρο της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου ΑΒΓΔ οδηγεί σε άτοπο, συμπεραίνουμε οτι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιο κοινό μέτρο.

□

Στη σύγχρονη προσέγγιση δεν χρησιμοποιούμε την θεωρία αναλογιών του Ευδόξου. Η Ιδιότητα 5.2 εξασφαλίζει οτι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος έναν θετικό πραγματικό αριθμό, και ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να οριστεί ως ο λόγος των μηκών τους (ως προς την ίδια μονάδα μήκους):

$$\mathrm{AB} : \Gamma\Delta = \frac{|\mathrm{AB}|}{|\Gamma\Delta|}.$$

Όταν αυτός ο αριθμός είναι ρητός, $\frac{|\mathrm{AB}|}{|\Gamma\Delta|} = \frac{\kappa}{\lambda}$, τα μεγέθη έχουν κοινό μέτρο το τμήμα $\frac{1}{\lambda}\Gamma\Delta$. Όταν ο αριθμός $\frac{|\mathrm{AB}|}{|\Gamma\Delta|}$ είναι άρρητος, τα μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Με αυτή την προσέγγιση, οι ακόλουθες ιδιότητες των αναλογιών προκύπτουν ως συνέπεια των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών.

α΄. Εάν $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}\Theta}$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB}} &= \frac{\mathrm{H}\Theta}{\mathrm{EZ}}, \text{ (ανάπαλιν λόγος) και} \\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} &= \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{H}\Theta}, \text{ (εναλλάξ λόγος).} \end{aligned}$$

β΄. Εάν $\Gamma\Delta = \mathrm{K}\Lambda$, τότε $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{K}\Lambda}$.

γ΄. Εάν $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{K}\Lambda}$ τότε $\Gamma\Delta = \mathrm{K}\Lambda$.

Πρόταση 13.2 *Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ είναι ανάλογα εάν και μόνον εάν το γινόμενο των μηκών των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μηκών των μέσων όρων. Δηλαδή*

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta} \iff |AB|\,|H\Theta| = |\Gamma\Delta|\,|EZ|\,.$$

Εμβαδόν πολυγώνων

Μετά το μήκος ευθύγραμμου τμήματος και το μέτρο γωνίας, το τρίτο μέγεθος της γεωμετρίας του επιπέδου είναι το εμβαδόν πολυγώνων. Η έννοια του εμβαδού προσδιορίζεται από κάποιες ιδιότητες, που αντιστοιχούν στις ιδιότητες της σύγχρονης έννοιας του μέτρου στην πραγματική ανάλυση.

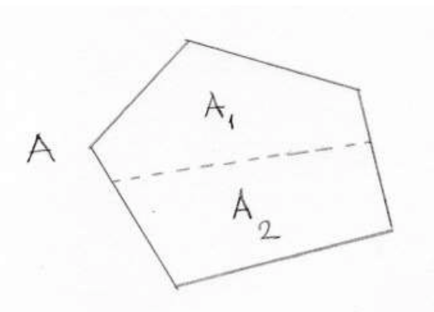
Θεωρούμε το επίπεδο, στο οποίο έχουμε επιλέξει ως μονάδα μήκους το ευθύγραμμο τμήμα ΟΙ. Το **εμβαδόν** είναι μία συνάρτηση στο σύνολο Q όλων των κυρτών πολυγώνων, εμβ $: Q \longrightarrow \mathbb{R}$ που λαμβάνει θετικές τιμές και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Ιδιότητα 13.3 *Εάν ένα πολύγωνο είναι ένωση δύο πολυγώνων που δεν έχουν κοινά σημεία, τότε το εμβαδόν του αρχικού πολυγώνου είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο πολυγώνων, Σχήμα 13.3.*

Ιδιότητα 13.4 *Ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.*

Ιδιότητα 13.5 *Εάν το πολύγωνο S περιέχεται στο πολύγωνο T, τότε $\epsilon\mu\beta(S) < \epsilon\mu\beta(T)$.*

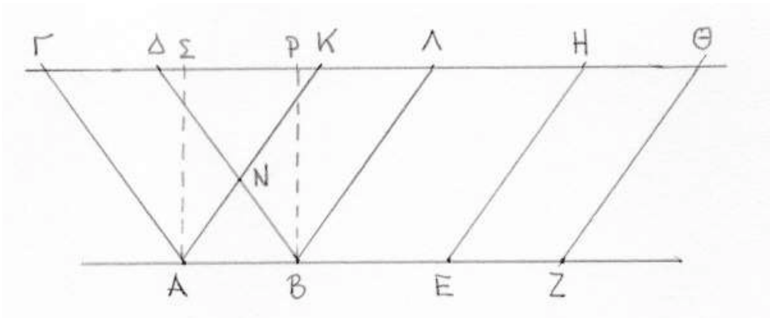
Ιδιότητα 13.6 *Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά μήκους 1 είναι 1.*



Σχήμα 13.3: Η προσθετική ιδιότητα του εμβαδού, εμβ (Α) = εμβ ($Α_1$) + εμβ ($Α_2$).

Βασικό για τη μελέτη των εμβαδών στην Ευκλείδεια γεωμετρία είναι το ακόλουθο Θεώρημα, που περιέχεται στις Προτάσεις λε΄ και λϛ΄ στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων. Για την απόδειξή του θα χρησιμοποιήσουμε τις Ιδιότητες 13.3 και 13.4.

Θεώρημα 13.7 *Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ιδίων παραλλήλων, έχουν ίσο εμβαδόν.*



Σχῆμα 13.4: Παραλληλόγραμμα μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε οτι εάν ε και ζ είναι παράλληλες, και ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ είναι τέσσερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα, εκ των οποίων τα ΑΒ, ΕΖ βρίσκονται πάνω στην ε, και τα ΓΔ, ΗΘ βρίσκονται πάνω στην ζ, τότε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΕΖΘΗ έχουν το ίδιο εμβαδόν, Σχήμα 13.4.

Αρκεί να το αποδείξουμε όταν τα παραλληλόγραμμα έχουν την ίδια βάση, αφού μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΛΚ ίσο με το ΕΖΘΗ, και από την Ιδιότητα 13.4, τα ίσα παραλληλόγραμμα έχουν ίσο εμβαδόν. Επιλέγουμε τα Λ, Κ έτσι ώστε ΑΚ ∥ ΒΛ ∥ ΕΗ, και υποθέτουμε οτι οι ΑΚ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ν.

Τα τρίγωνα ΑΓΚ και ΒΔΛ είναι ίσα, αφού ΓΔ = ΚΛ και ΓΚ = ΓΔ + ΔΚ = ΔΚ + ΚΛ = ΔΛ, και οι προσκείμενες γωνίες είναι ίσες, ∠ΑΓΚ = ∠ΒΔΛ και ∠ΑΚΓ = ∠ΒΛΔ,ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Το τρίγωνο ΑΓΚ διαιρείται στο τρίγωνο ΔΚΝ και το τραπέζιο ΑΓΔΝ, ενώ το τρίγωνο ΒΔΛ διαιρείται στο τρίγωνο ΔΚΝ και το τραπέζιο ΒΝΚΛ. Άρα, από την ιδιότητα 1, τα τραπέζια ΑΓΔΝ και ΒΝΚΛ έχουν ίσο εμβαδόν.

Το παραλληλόγραμμο ΑΒΔΓ διαιρείται στο τραπέζιο ΑΓΔΝ και το τρίγωνο ΑΒΝ, ενώ το παραλληλόγραμμο ΑΒΛΚ διαιρείται στο τραπέζιο ΒΝΚΛ και το τρίγωνο ΑΒΝ. Άρα τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν ίσο εμβαδόν.

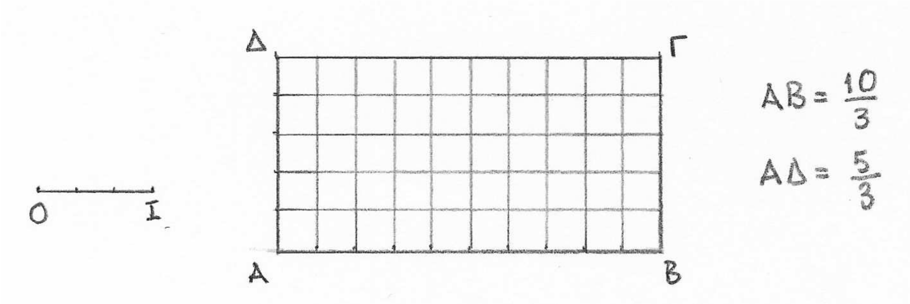
□

Δραστηριότητα 13.1 Στο Σχήμα 13.4 η ΑΚ τέμνει την ΒΔ μεταξύ των ευθειών ε και ζ. Εξετάστε εάν χρειάζεται να τροποποιηθεί η απόδειξη όταν το σημείο τομής βρίσκεται κάτω από την ε ή πάνω από τη ζ.

Εμβαδόν ορθογωνίων παραλληλογράμμων

Λήμμα 13.8 *Θεωρούμε ορθογώνιο με πλευρές* AB *που έχουν μήκος ρητό αριθμό,* $|AB| = p$, $|A\Delta| = q$. *Τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου* $AB\Gamma\Delta$

είναι $\epsilon\mu\beta(AB\Gamma\Delta) = pq$.



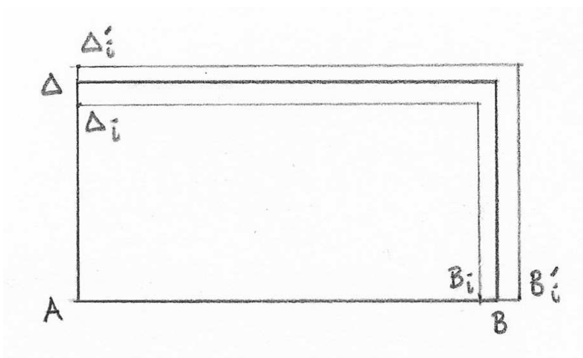
Σχῆμα 13.5: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ρητά μήκη πλευρών.

Απόδειξη. Φέρνουμε τους ρητούς p, q σε κοινό παρονομαστή, $p = \frac{m}{k}$, $q = \frac{n}{k}$. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε m ίσα τμήματα, και την πλευρά ΑΔ σε n ίσα τμήματα, Σχήμα 13.5. Σχηματίζονται mn τετράγωνα με πλευρά μήκους $\frac{1}{k}$. Το τετράγωνο με πλευρά μήκους 1 αποτελείται από k^2 τέτοια τετράγωνα, άρα κάθε ένα έχει εμβαδόν $\frac{1}{k^2}$. Συμπεραίνουμε οτι $\text{εμβ}(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{mn}{k^2} = pq$.

□

Θεώρημα 13.9 *Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές AB και AΔ είναι*

$$\epsilon\mu\beta(AB\Gamma\Delta) = |AB|\,|A\Delta|\,.$$



Σχῆμα 13.6: Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Απόδειξη. Θεωρούμε πλευρές μήκους $|\text{ΑΒ}| = r$ και $|\text{ΑΔ}| = s$. Από τον ορισμό του μήκους, στο Κεφάλαιο 5, γνωρίζουμε οτι για κάθε i, υπάρχουν m_i και n_i τέτοια ώστε

$$\frac{m_i - 1}{2^i} \leq |\text{AB}| < \frac{m_i}{2^i} \quad \text{και} \quad \frac{n_i - 1}{2^i} \leq |\text{AΔ}| < \frac{n_i}{2^i}\,.$$

Στην ημιευθεία ΑΒ θεωρούμε το σημείο B_i τέτοιο ώστε $|\mathrm{AB}_i| = \frac{m_i-1}{2^i}$ και το σημείο B_i' τέτοιο ώστε $|\mathrm{AB}_i'| = \frac{m_i}{2^i}$. Στην ημιευθεία ΑΔ θεωρούμε το σημείο Δ_i τέτοιο ώστε $|\mathrm{A}\Delta_i| = \frac{n_i-1}{2^i}$ και το σημείο Δ_i' τέτοιο ώστε $|\mathrm{A}\Delta_i'| = \frac{n_i}{2^i}$. Τότε το ορθογώνιο με πλευρές AB_i και $\mathrm{A}\Delta_i$ περιέχεται στο ΑΒΓΔ, ενώ το ορθογώνιο με πλευρές AB_i' και $\mathrm{A}\Delta_i'$ περιέχει το ΑΒΓΔ, Σχήμα 13.6. Από την Ιδιότητα 13.5,

$$\frac{m_i - 1}{2^i}\,\frac{n_i - 1}{2^i} < \text{εμβ}\,(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) < \frac{m_i}{2^i}\,\frac{n_i}{2^i}\,.$$

Αφού οι ανισότητες ισχύουν για κάθε i, και $\frac{m_i-1}{2^i} \to r$, $\frac{n_i-1}{2^i} \to s$, έχουμε

$$\text{εμβ}\,(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = rs\,.$$

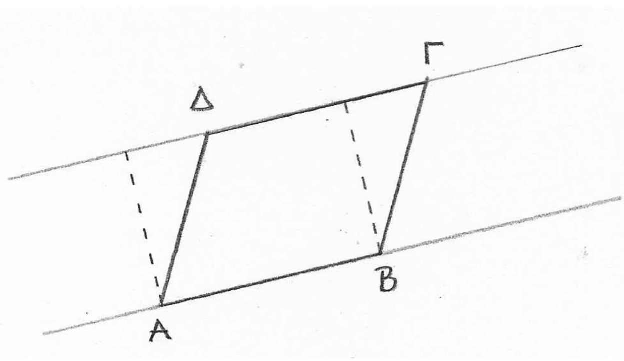
□

Η Πρόταση 13.2 έχει τώρα την ακόλουθη ερμηνεία.

Πόρισμα 13.10 *Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ προς ΓΔ και ΕΖ προς ΗΘ είναι ανάλογα εάν και μόνον εάν το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ και ΗΘ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ορθογώνιο με πλευρές ΓΔ και ΕΖ.*

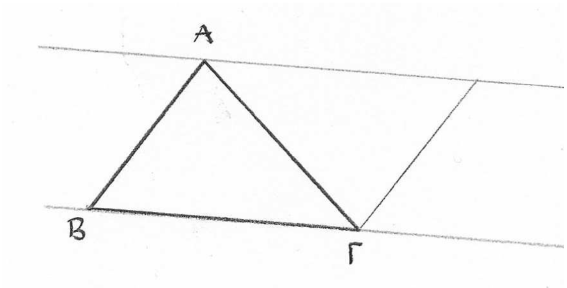
Πόρισμα 13.11 *Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά μήκους α ισούται με α^2.*

Πόρισμα 13.12 *Το εμβαδόν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το γινόμενο του μήκους μίας πλευράς του επί την απόσταση από την απέναντι παράλληλη πλευρά.*



Σχήμα 13.7: Εμβαδόν παραλληλογράμμου.

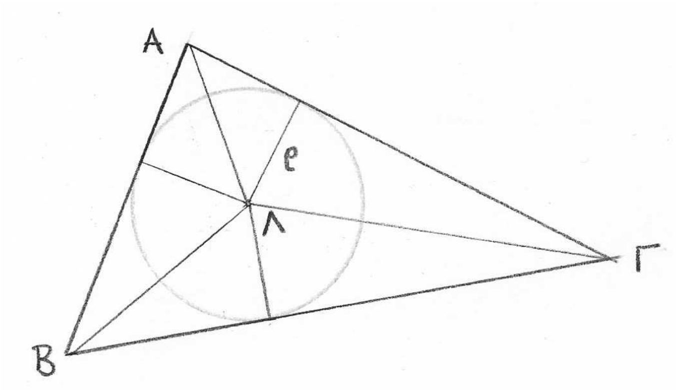
Πόρισμα 13.13 *Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το μισό του γινομένου του μήκους μίας πλευράς του επί το ύψος από την απέναντι κορυφή.*



Σχῆμα 13.8: Εμβαδόν τριγώνου.

Πόρισμα 13.14 *Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου του μήκους των κάθετων πλευρών του.*

Πόρισμα 13.15 *Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το μισό του γινομένου της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου του επί την περίμετρο του τριγώνου.*



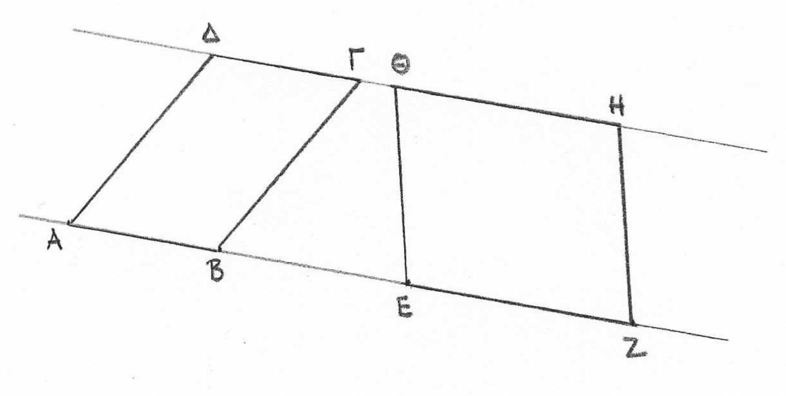
Σχῆμα 13.9: Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου επί την περίμετρο.

Απόδειξη. Το κέντρο Λ του εγγεγραμμένου κύκλου ισαπέχει από τις τρεις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Άρα τα τρίγωνα ΛΑΒ, ΛΒΓ και ΛΑΓ έχουν το ίδιο ύψος, ίσο με την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου, Σχήμα 13.9. Αλλά

$$\begin{aligned}
\text{εμβ}\,(\mathrm{AB\Gamma}) &= \text{εμβ}\,(\Lambda\mathrm{AB}) + \text{εμβ}\,(\Lambda\mathrm{B\Gamma}) + \text{εμβ}\,(\Lambda\mathrm{A\Gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\rho|\mathrm{AB}| + \frac{1}{2}\rho|\mathrm{B\Gamma}|\frac{1}{2}\rho|\mathrm{A\Gamma}| \\
&= \frac{1}{2}\rho(|\mathrm{AB}| + |\mathrm{B\Gamma}| + |\mathrm{A\Gamma}|)\,.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 13.16 *Ο λόγος των εμβαδών δύο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ που έχουν το ίδιο ύψος ως προς τις βάσεις ΑΒ και ΕΖ είναι ίσος με το λόγο αυτών των βάσεων* $\frac{AB}{EZ}$.

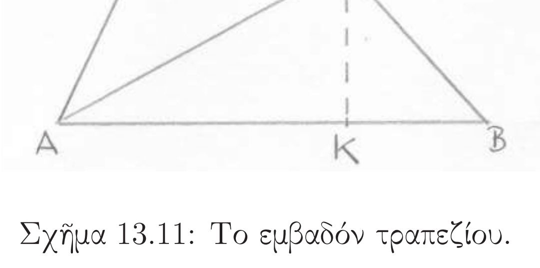


Σχῆμα 13.10: Ο λόγος των εμβαδών παραλληλογράμμων.

Πόρισμα 13.17 *Ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων ΑΒΓ και ΕΖΗ που έχουν το ίδιο ύψος ως προς τις βάσεις ΑΒ και ΕΖ είναι ίσος με το λόγο αυτών των βάσεων* $\frac{AB}{EZ}$.

Πόρισμα 13.18 *Η διάμεσος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ διαιρεί το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ με το ίδιο εμβαδόν.*

Πόρισμα 13.19 *Το εμβαδόν τραπεζίου είναι ίσο με το μισό του αθροίσματος των δύο βάσεων επί το ύψος.*



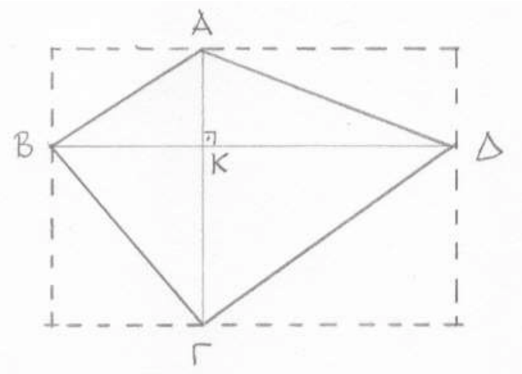
Σχῆμα 13.11: Το εμβαδόν τραπεζίου.

Απόδειξη. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔκαι ύψος ΓΚ. Η διαγώνιος ΑΓ το διαιρεί σε δύο τρίγωνα, ΑΒΓ με βάση ΑΒ και ΓΔΑ με βάση ΓΔ. Τα δύο τρίγωνα έχουν κοινό ύψος ΑΚ, Σχήμα 13.11. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων,

$$\text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma\Delta} = \text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma} + \text{εμβ}\,\mathrm{\Gamma\Delta A} = \frac{1}{2}(|\mathrm{AB}| + |\mathrm{\Gamma\Delta}|)\,|\mathrm{\Gamma K}|\,.$$

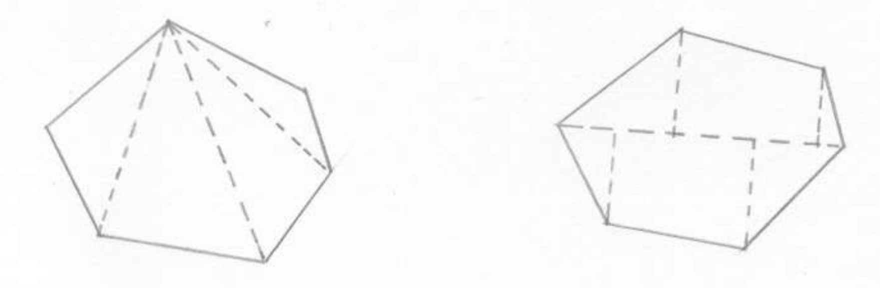
□

Πόρισμα 13.20 *Το εμβαδόν τετραπλεύρου με διαγώνιες κάθετες είναι ίσο με το μισό του γινομένου των διαγωνίων του. Ειδικότερα, αυτό ισχύει για το ρόμβο.*



Σχῆμα 13.12: Το εμβαδόν τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν άλλων πολυγώνων, τα υποδιαιρούμε σε τρίγωνα ή σε ορθογώνια τρίγωνα και ορθογώνια τραπέζια, Σχήμα 13.13.



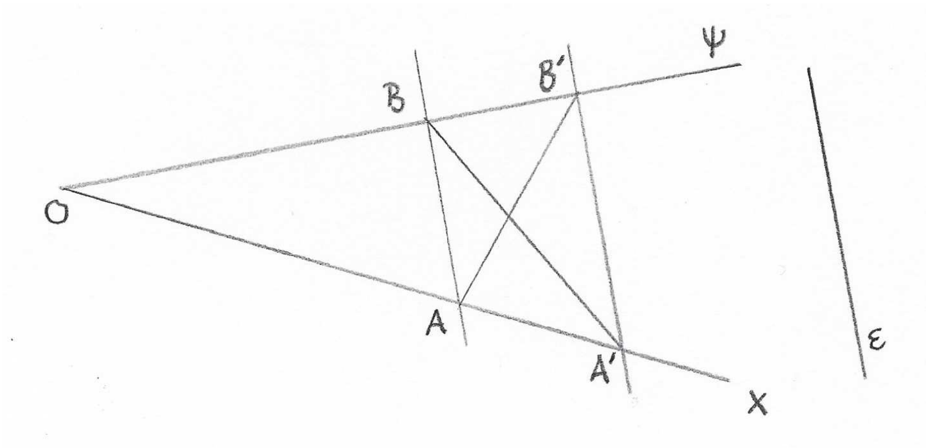
Σχῆμα 13.13: Υποδιαιρέσεις πολυγώνων για τον υπολογισμό του εμβαδού.

Το Θεώρημα του Θαλή

Θεώρημα 13.21 *Θεωρούμε γωνία $XO\Psi$ και ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές της γωνίας. Από τα σημεία A, A' στην OX φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την ε που τέμνουν την $O\Psi$ στα σημεία B και B' αντίστοιχα. Τότε*

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Αντίστροφα, εάν για δύο σημεία A, A' στην OX και δύο σημεία B, B' στην $O\Psi$, οι λόγοι $\frac{OA}{OB}$ και $\frac{OA'}{OB'}$ είναι ίσοι, τότε οι ευθείες AB και $A'B'$ είναι παράλληλες.



Σχήμα 13.14: Παράλληλες ευθείες τέμνουν γωνία.

Απόδειξη. Από την ισότητα των εναλλάξ λόγων, αρκεί να δείξουμε οτι $\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OB}}$. Από το Πόρισμα 13.17, ο λόγος των πλευρών $\mathrm{OA}' : \mathrm{OA}$ είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών των τριγώνων OBA' και OBA, που έχουν τις ανάλογες βάσεις και ίσα ύψη. Αντίστοιχα, ο λόγος $\mathrm{OB}' : \mathrm{OB}$ είναι ίσος με το λόγο των εμβαδών των τριγώνων OAB' και OAB. Άρα αρκεί να δείξουμε οτι

$$\frac{\text{εμβ}\,(\mathrm{OBA}')}{\text{εμβ}\,(\mathrm{OBA})} = \frac{\text{εμβ}\,(\mathrm{OAB}')}{\text{εμβ}\,(\mathrm{OAB})}.$$

Σε αυτή τη σχέση, οι παρονομαστές είναι ίσοι, άρα αρκεί να δείξουμε οτι $\text{εμβ}\,(\mathrm{OBA}') = \text{εμβ}\,(\mathrm{OAB}')$. Αλλά τα τρίγωνα OBA' και OAB' έχουν κοινό μέρος το τρίγωνο OAB, και διαφέρουν κατά τα τρίγωνα ABB' και ABA'. Αυτά έχουν κοινή βάση AB και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων AB και $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$, άρα από το Πόρισμα 13.17 έχουν ίσο εμβαδόν.

Αντίστροφα, εάν ισχύει ΟΑ : ΟΒ = ΟΑ$'$: ΟΒ$'$, και Α$'$Ζ είναι η παράλληλος από το Α$'$ προς την ΑΒ, με Ζ σημείο της ΟΒ, τότε από το πρώτο μέρος, ΟΖ = ΟΒ$'$, και συνεπώς Β$'$ και Ζ συμπίπτουν.

□

Πόρισμα 13.22 *Θεωρούμε σημεία A_1, A_2, A_3 στην ημιευθεία OX, και σημεία B_1, B_2, B_3 στην ημιευθεία $O\Psi$, έτσι ώστε οι ευθείες A_1B_1, A_2B_2 και A_3B_3 είναι παράλληλες. Τότε*

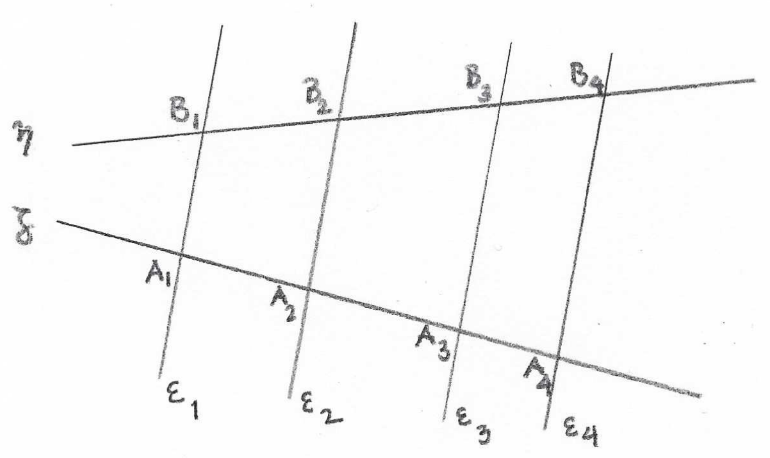
$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}.$$

Αντίστροφα, αν ισχύει αυτή η σχέση τότε οι ευθείες A_1B_1, A_2B_2 και A_3B_3 είναι παράλληλες.

Δραστηριότητα 13.2 Τα αποτελέσματα του Πορίσματος 13.22 ισχύουν και όταν οι ευθείες στις οποίες βρίσκονται τα ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλες. Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 13.16 για να το αποδείξετε.

Το ακόλουθο Θεώρημα καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις.

Θεώρημα 13.23 (Θεώρημα του Θαλή.) *Εάν ε_1, ε_2, ε_3, … είναι παράλληλες ευθείες, και ζ, η είναι δύο ευθείες που τις τέμνουν, τότε τα τμήματα που ορίζουν οι ε_1, ε_2, ε_3, … πάνω στις ζ και η είναι ανάλογα.*



Σχήμα 13.15: Το Θεώρημα του Θαλή.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε οτι εάν η ζ τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3, … στα σημεία Α$_1$, Α$_2$, Α$_3$, …, και η η τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3, … στα σημεία Β$_1$, Β$_2$, Β$_3$, …, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων διαστημάτων πάνω στις δύο ευθείες είναι ίσοι:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \cdots$$

Από το Πόρισμα 13.22 όταν οι ζ και η τέμνονται, και από τη Δραστηριότητα 13.2 όταν είναι παράλληλες, έχουμε

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}.$$

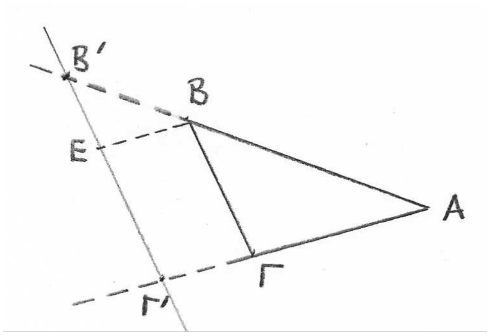
Λαμβάνοντας τον εναλλάξ λόγο έχουμε

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

□

Πρόταση 13.24 *Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία B' και Γ' αντίστοιχα. Τότε*

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB'}{B'\Gamma'}.$$

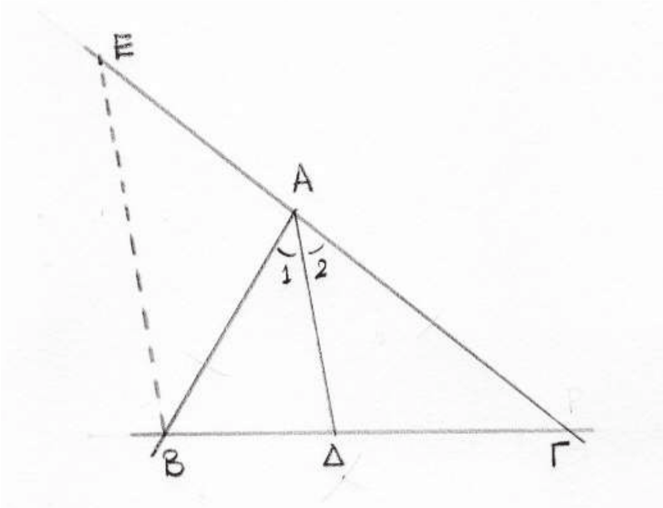


Σχῆμα 13.16: Ο λόγος της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι B βρίσκεται μεταξύ του A και του B$'$. Από το B φέρουμε παράλληλο προς την AΓ, η οποία τέμνει την B$'$Γ$'$ στο E. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 13.22 στη γωνία $\angle AB'\Gamma'$, και έχουμε $\frac{B'A}{BA} = \frac{B'\Gamma'}{E\Gamma'}$. Αλλά $E\Gamma' = B\Gamma$ και ο εναλλάξ λόγος είναι

$$\frac{B'A}{B'\Gamma'} = \frac{BA}{B\Gamma}.$$

□



Σχῆμα 13.17: Η διχοτόμος διαιρεί την απέναντι πλευρά σε μέρη ανάλογα προς τις άλλες πλευρές.

Πρόταση 13.25 *Η διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε δύο τμήματα που έχουν λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τριγωνο ΑΒΓ και διχοτόμο ΑΔ, έτσι ώστε $\angle\text{ΒΑΔ} = \angle\text{ΓΑΔ}$. Θα δείξουμε οτι $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$.

Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο σημείο Ε, Σχήμα 13.17. Από το Θεώρημα του Θαλή, 13.23, έχουμε $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε οτι ΑΕ = ΑΒ, δηλαδή οτι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος, $\angle\text{ΒΑΔ} = \angle\text{ΓΑΔ}$. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, $\angle\text{ΒΑΔ} = \angle\text{ΑΒΕ}$. Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ειναι ίσες, $\angle\text{ΓΑΔ} = \angle\text{ΑΕΒ}$. Άρα $\angle\text{ΑΒΕ} = \angle\text{ΑΕΒ}$, και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

□

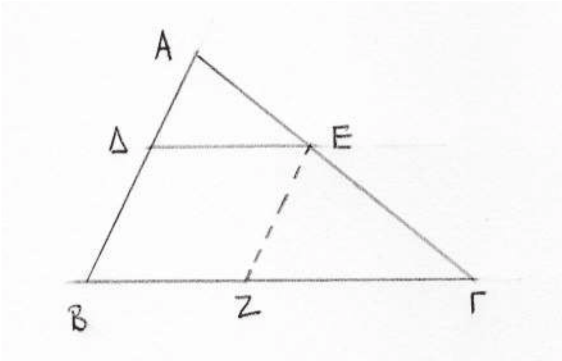
Όμοια σχήματα

Ορισμός. Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια** όταν έχουν ίσες τις γωνίες τους μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες. Ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών ονομάζεται **λόγος ομοιότητας** των δύο σχημάτων.

Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους. Κάθε δύο τετράγωνα είναι όμοια μεταξύ τους. Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο με άνισες πλευρές δεν είναι όμοια, παρ' όλο που έχουν όλες τις γωνίες ίσες, αφού οι πλευρές τους δεν είναι ανάλογες.

Πρόταση 13.26 *Εάν μία ευθεία παράλληλη σε μία πλευρά ενός τριγώνου τέμνει τις άλλες δύο πλευρές, σχηματίζεται τρίγωνο όμοιο προς το αρχικό.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία ε, παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Θα δείξουμε οτι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.



Σχήμα 13.18: Όμοια τρίγωνα.

Η γωνία ∠ΑΔΕ είναι ίση με την ∠Β και η γωνία ∠ΑΕΔ είναι ίση με την ∠Γ, ενώ η γωνία ∠Α είναι κοινή. Συνεπώς τα δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες ίσες μία προς μία.

Από το Θεώρημα του Θαλή, 13.23, αφού ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΒΓ, ισχύει η αναλογία $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}$. Από την Πρόταση 13.24, $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{B\Gamma}}$.

Συνεπώς οι γωνίες των δύο τριγώνων είναι ίσες, οι πλευρές είναι ανάλογες, και τα τρίγωνα είναι όμοια.

□

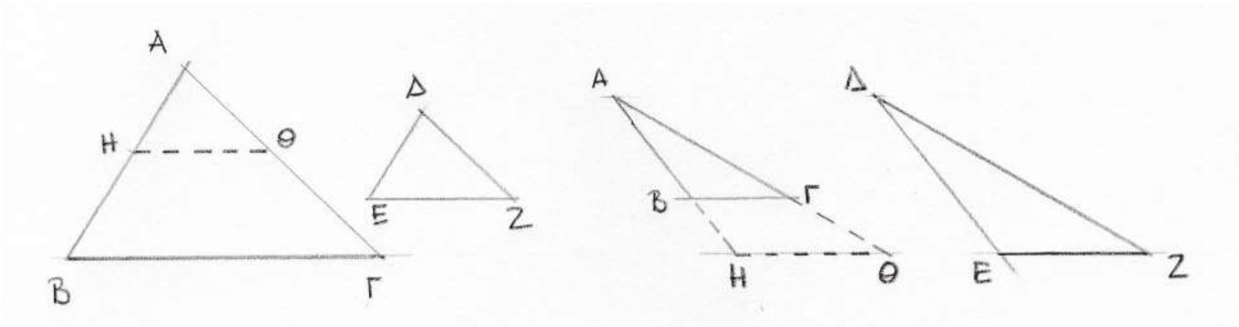
Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Θεώρημα 13.27 *Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, τέτοια ώστε ∠Α = ∠Δ και ∠Β = ∠Ε. Πάνω στην ημιευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΑΗ = ΔΕ. Από το Η φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ημιευθεία ΑΓ στο Θ. Θα συγκρίνουμε το τρίγωνο ΑΗΘ με το ΑΒΓ και το ΔΕΖ.

Από την Πρόταση 13.26, τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΑΒΓ είναι όμοια. Για τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΔΕΖ έχουμε ΑΗ = ΔΕ και ∠Α = ∠Δ. Επίσης ∠ΑΗΘ = ∠Β ως εντός εκτός επί τα αυτά, και ∠Β = ∠Ε, άρα ∠ΑΗΘ = ∠Ε. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΔΕΖ είναι ίσα. Άρα ΔΕΖ ~ ΑΒΓ.

□



Σχῆμα 13.19: Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Θεώρημα 13.28 *Δύο τρίγωνα είναι όμοια εάν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, τέτοια ώστε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\angle A = \angle\Delta$. Πάνω στην ημιευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΑΗ = ΔΕ. Από το Η φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ημιευθεία ΑΓ στο Θ. Θα συγκρίνουμε το τρίγωνο ΑΗΘ με το ΑΒΓ και το ΔΕΖ.

Από την Πρόταση 13.26, τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΑΒΓ είναι όμοια. Για τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΔΕΖ έχουμε ΑΗ = ΔΕ και $\angle A = \angle\Delta$. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΗΘ και ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{AB}{AH} = \frac{A\Gamma}{A\Theta},$$

και αφού ΑΗ = ΔΕ,

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}.$$

Αλλά έχουμε υποθέσει οτι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, άρα $\frac{A\Gamma}{A\Theta} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, και συνεπώς ΑΘ = ΔΖ. Συμπεραίνουμε οτι τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΔΕΖ έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα. Δηλαδή έχουμε ΑΒΓ ~ ΑΗΘ = ΔΕΖ, και συνεπώς ΑΒΓ ~ ΔΕΖ.

□

Θεώρημα 13.29 *Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, τέτοια ώστε

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Πάνω στην ημιευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΑΗ = ΔΕ. Από το Η φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ημιευθεία ΑΓ στο Θ. Θα συγκρίνουμε το τρίγωνο ΑΗΘ με το ΑΒΓ και το ΔΕΖ.

Από την Πρόταση 13.26, τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΑΒΓ είναι όμοια, άρα ισχύει

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Theta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{H\Theta}}\,.$$

Αλλά ΑΗ = ΔΕ, άρα $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Theta}}$ και συνεπώς ΑΘ = ΔΖ. Παρόμοια, ΗΘ = ΕΖ. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΔΕΖ είναι ίσα, και ΔΕΖ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

□

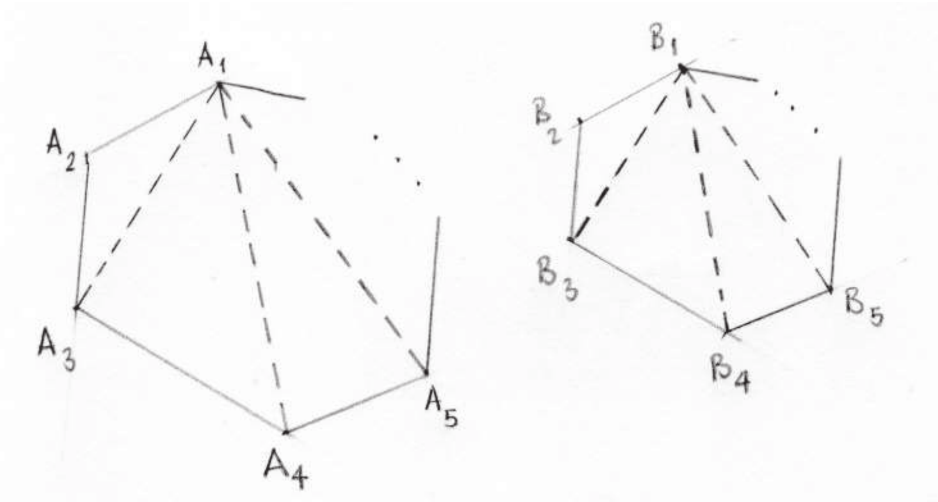
Όμοια πολύγωνα

Θεώρημα 13.30 *Δύο όμοια πολύγωνα χωρίζονται από τις διαγώνιες που φέρονται από ομόλογες κορυφές σε όμοια τρίγωνα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο όμοια πολύγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_\nu$ και $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\ldots\mathrm{B}_\nu$. Τότε οι γωνίες είναι ίσες, $\angle\mathrm{A}_1 = \angle\mathrm{B}_1$, $\angle\mathrm{A}_2 = \angle\mathrm{B}_2$, …, $\angle\mathrm{A}_\nu = \angle\mathrm{B}_\nu$ και οι ομόλογες πλευρές ανάλογες,

$$\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} = \frac{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3} = \cdots = \frac{\mathrm{A}_{\nu-1}\mathrm{A}_\nu}{\mathrm{B}_{\nu-1}\mathrm{B}_\nu} = \alpha\,.$$

Τα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ είναι όμοια, αφού έχουν τις γωνίες A_2 και B_2 ίσες και τις πλευρές που τις περιέχουν ανάλογες.



Σχήμα 13.20: Όμοια πολύγωνα.

Θα δείξουμε οτι τα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ και $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ είναι επίσης όμοια. Από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ έχουμε οτι $\angle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2 = \angle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3\mathrm{B}_2$ και $\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3} = \alpha = \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4}$. Επίσης

$$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 = \angle\mathrm{A}_3 - \angle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2 = \angle\mathrm{B}_3 - \angle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3\mathrm{B}_2 = \angle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4\,.$$

Καταλήγουμε οτι τα τρίγωνα $\mathrm{A_1A_3A_4}$ και $\mathrm{B_1B_3B_4}$ έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές που την περιέχουν ανάλογες, και συνεπώς είναι όμοια.

Παρόμοια δείχνουμε οτι για κάθε $k = 3, 4, \ldots, \nu - 1$, τα τρίγωνα $\mathrm{A_1A_kA_{k+1}}$ και $\mathrm{B_1B_kB_{k+1}}$ είναι όμοια.

□

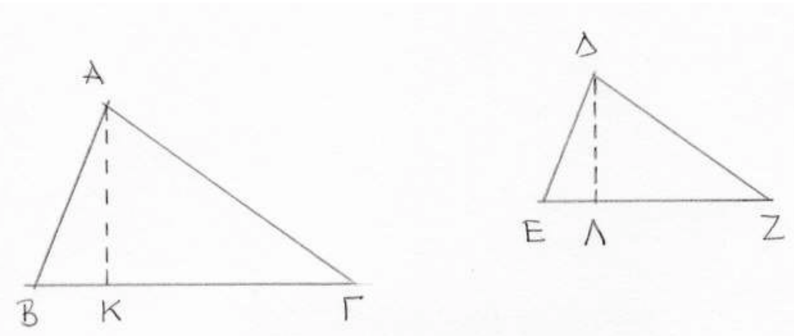
Πρόταση 13.31 *Δύο κανονικά ν-γωνα είναι όμοια.*

Απόδειξη. Κάθε γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ορθές. Άρα όλες οι γωνίες είναι ίσες. Επίσης όλες οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Συνεπώς και οι λόγοι των πλευρών κανονικών πολυγώνων είναι ίσοι.

□

Εμβαδόν ομοίων σχημάτων

Πρόταση 13.32 *Εάν δύο τρίγωνα είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας λ, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με λ^2.*



Σχήμα 13.21: Το εμβαδόν ομοίων τριγώνων.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, με $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}} = \lambda$. Φέρουμε τα ύψη ΑΚ και ΔΛ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΔΕΛ είναι επίσης όμοια, και $\frac{\mathrm{AK}}{\Delta\Lambda} = \frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \lambda$.

Άρα

$$\frac{\text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma}}{\text{εμβ}\,\Delta\mathrm{EZ}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AK}}{\frac{1}{2}\mathrm{EZ}\cdot\Delta\Lambda} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}}\frac{\mathrm{AK}}{\Delta\Lambda} = \lambda^2.$$

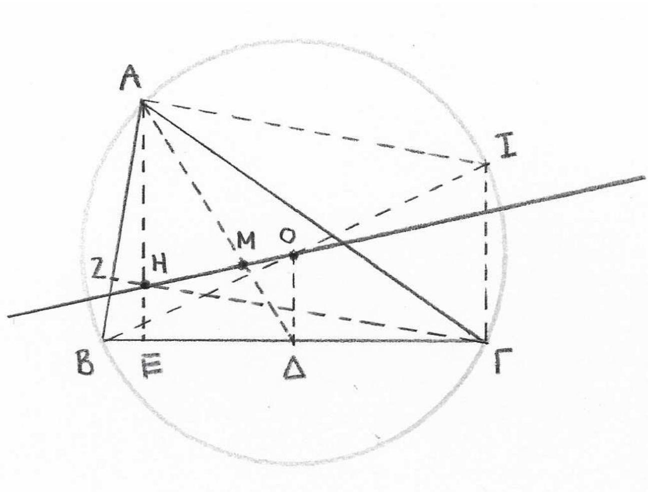
□

Χρησιμοποιούμε υποδιαιρέσεις σε τρίγωνα για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα σε γενικότερα πολύγωνα.

Θεώρημα 13.33 *Εάν δύο πολύγωνα είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας λ, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με λ^2.*

Η ευθεία του Euler

Θεώρημα 13.34 *Το κέντρο βάρους M, το περίκεντρο O και το ορθόκεντρο H ενός τριγώνου βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και $MH : MO = 2 : 1$.*



Σχῆμα 13.22: Η ευθεία του Euler.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τον περιγεγραμμένο κύκλο, με κέντρο Ο, τη διάμεσο ΑΔ και τη μεσοκάθετο ΟΔ, τα ύψη ΑΕ και ΓΖ, που τέμνονται στο Η. Φέρουμε την ευθεία ΟΗ, η οποία τέμνει τη διάμεσο ΑΔ στο Μ. Θα δείξουμε οτι Μ τέμνει την ΑΔ σε λόγο ΑΜ : ΜΔ = 2 : 1, και συνεπώς είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

Έστω Ι το αντιδιαμετρικό σημείο του Β, έτσι ώστε ΒΙ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου. Συμπεραίνουμε οτι οι γωνίες ∠ΒΑΙ και ∠ΒΓΙ είναι ορθές, αφού βλέπουν τόξο 180 μοιρών, Θεώρημα 11.9. Οι ΙΓ και ΑΕ είναι κάθετες στην ΒΓ, συνεπώς είναι παράλληλες. Οι ΑΙ και ΖΓ είναι κάθετες στην ΑΒ, συνεπώς είναι παράλληλες. Άρα ΑΒΓΙ είναι παραλληλόγραμμο, και AlΗ = ΙΓ. Το ΟΔ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΒΓΙ, συνεπώς |ΙΓ| = 2|ΟΔ|, και επίσης |ΑΗ| = 2|ΟΔ|.

Στα τρίγωνα ΑΗΜ και ΔΟΜ, οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες, ως κατά κορυφήν ή εντός εναλλάξ, άρα τα τρίγωνα είναι όμοια, και αφού |ΑΗ| = 2|ΟΔ|, ισχύει επίσης

$$|\mathrm{AM}| = 2|Mu\Delta| \quad \text{και} \quad |\mathrm{MH}| = 2|\mathrm{MO}|\,.$$

Άρα M είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου, βρίσκεται στην ευθεία HO, η οποία ονομάζεται ευθεία του Euler, και διαιρεί το τμήμα HO σε λόγο 2 : 1.

□

Ασκήσεις

Ασκηση 13.3 Χρησιμοποιώντας μόνον τις ιδιότητες του εμβαδού, 13.3 – 13.6, δείξτε οτι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου το χωρίζουν σε 4 τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν.

Δείξτε επίσης οτι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου, το χωρίζει σε δύο σχήματα με το ίδιο εμβαδόν.

Ασκηση 13.4 Δείξτε οτι για οποιοδήποτε σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, το τρίγωνο ΜΓΔ έχει σταθερό εμβαδόν.

Ασκηση 13.5 Εάν η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\angle$ΒΑΨ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Χ, δείξτε οτι $\frac{\mathrm{XB}}{\mathrm{X\Gamma}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$.

Ασκηση 13.6 Από δύο σημεία Δ και Ε της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ, οι οποίες τέμνουν την ΑΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Από τα Δ και Ε φέρουμε επίσης τις παράλληλες προς την ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε οτι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{K\Theta}}{\mathrm{ZH}}.$$

Ασκηση 13.7 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, διάμεσο ΑΜ, και ευθεία ε παράλληλη προς την ΑΜ. Εάν η ε τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ή τις προεκτάσεις τους, στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, να δείξετε οτι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AZ}}.$$

Ασκηση 13.8 Μία ευθεία διέρχεται από την κορυφή Α ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΒΔ, ΓΔ και ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ είναι μέση ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ και ΕΗ.

Ασκηση 13.9 Από την κορυφή Α τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει τη διαγώνιοΒΔ στο Ε. Από την κορυφή Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε οτι ΕΖ είναι παράλληλη προς τη ΓΔ.

Κεφάλαιο 14

Θεώρημα του Πυθαγόρα, Θεωρήματα Διαμέσων

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα

Θεώρημα 14.1 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) *Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.*

Υπάρχουν εκατοντάδες διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Εδώ θα δούμε την απόδειξη των Στοιχείων, Βιβλίο Ι, Πρόταση μζ΄, η οποία χρησιμοποιεί μόνο τις βασικές ιδιότητες του εμβαδού.

Απόδειξη. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\angle$Α ορθή, και ΑΔ το ύψος. Στις πλευρές του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΛΚ, ΑΓΘΙ και ΒΓΗΖ. Προεκτείνουμε την ΑΔ η οποία τέμνει την ΗΖ στο Ε.

Θα δείξουμε οτι το τετράγωνο ΑΒΛΚ έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο ΒΔΕΖ. Το ορθογώνιο ΒΔΕΖ και το τρίγωνο ΑΖΒ έχουν κοινή βάση ΖΒ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ. Άρα

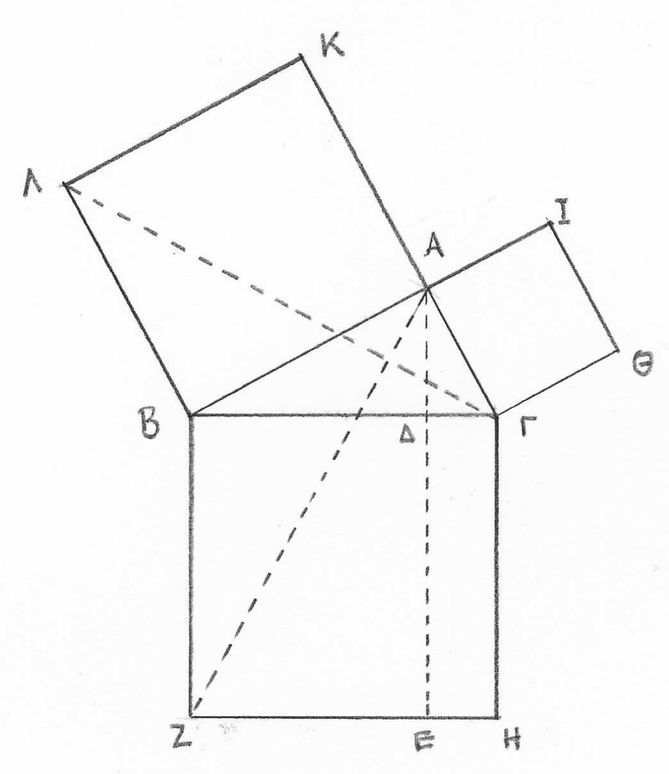
$$\text{εμβ}(\mathrm{B\Delta EZ}) = 2\text{εμβ}(\mathrm{ABZ})\,.$$

Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΓΛ έχουν δύο ίσες πλευρές, ΑΒ = ΛΒ, ΒΖ = ΒΓ, και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, αφού οι $\angle$ΑΒΖ και $\angle$ΘΒΓ έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Συνεπώς

$$\text{εμβ}(\mathrm{ABZ}) = \text{εμβ}(\mathrm{B\Gamma\Theta})\,.$$

Αλλά ΒΓΛ έχει κοινή βάση και βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων με το τετράγωνο ΑΒΛΚ. Άρα

$$\begin{aligned}\text{εμβ}(\mathrm{AB\Lambda K}) &= 2\text{εμβ}(\mathrm{B\Gamma\Lambda})\\ &= 2\text{εμβ}(\mathrm{ABZ}) = \text{εμβ}(\mathrm{B\Delta EZ})\,.\end{aligned}$$



Σχῆμα 14.1: Το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Παρόμοια δείχνουμε οτι εμβ (ΓΔΕΗ) = εμβ (ΑΓΘΙ). Προσθέτοντας τις δύο ισότητες έχουμε

$$\text{εμβ}\,(\mathrm{B\Gamma HZ}) = \text{εμβ}\,(\mathrm{B\Delta EZ}) + \text{εμβ}\,(\mathrm{\Gamma\Delta EH}) = \text{εμβ}\,(\mathrm{AB\Lambda K}) + \text{εμβ}\,(\mathrm{A\Gamma\Theta I})\,.$$

□

Με απαγωγή σε άτοπο μπορούμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Θεώρημα 14.2 *Εάν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, τότε η γωνία $\angle A$ είναι ορθή.*

'μεση συνέπεια αυτής της απόδειξης του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Θεώρημα 14.3 *Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μίας κάθετης πλευράς ισούται με το γινόμενο της προβολής της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα.*

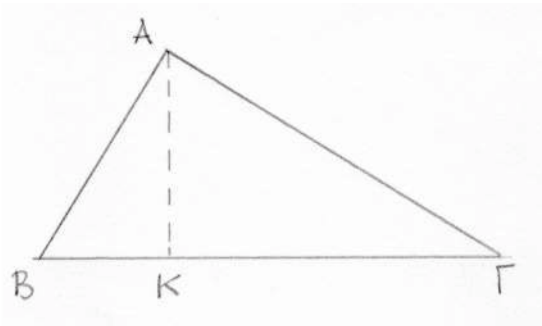
Θεώρημα 14.4 *Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.*

Δηλαδή, εάν ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ∠Α ορθή και ΑΚ το ύψος, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες, Σχήμα 14.2,

$$\begin{aligned} |\mathrm{AB}|^2 &= |\mathrm{BK}|\,|\mathrm{B\Gamma}|\,, \\ |\mathrm{A\Gamma}|^2 &= |\mathrm{\Gamma K}|\,|\mathrm{B\Gamma}|\,, \\ |\mathrm{AK}|^2 &= |\mathrm{BK}|\,|\mathrm{\Gamma K}|\,. \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες ισότητες προκύπτουν κατά την απόδειξη, ενώ για την τρίτη παρατηρούμε οτι

$$|\mathrm{AK}|^2 = |\mathrm{A\Gamma}|^2 - |\mathrm{\Gamma K}|^2 = |\mathrm{\Gamma K}|\,|\mathrm{B\Gamma}| - |\mathrm{\Gamma K}|^2 = |\mathrm{\Gamma K}|\,|\mathrm{BK}|\,.$$

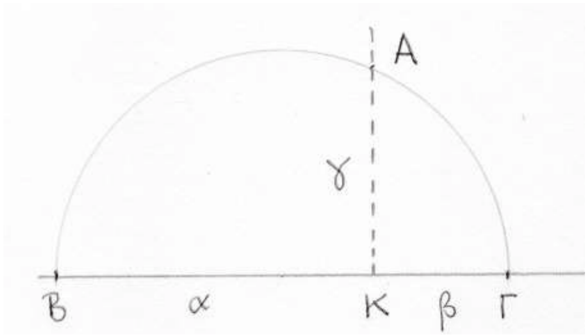


Σχήμα 14.2: Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα.

Κατασκευή 14.5 *Να βρεθεί η μέση ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων α και β. Δηλαδή, να βρεθεί ευθύγραμμο τμήμα γ τέτοιο ώστε*

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}\,.$$

Αν. Εάν ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο και ΑΚ το ύψος στην υποτείνουσα, τότε το ύψος ΑΚ είναι η μέση ανάλογος των προβολών των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου στην υποτείνουσα: $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{\Gamma K}}$. Άρα, αρκεί να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε η υποτείνουσα να έχει μήκος $\alpha + \beta$ και το ύψος στην υποτείνουσα να την διαιρεί σε δύο μέρη ίσα με α και β. Αλλά η κορυφή της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου βρίσκεται στον κύκλο μα διάμετρο την υποτείνουσα.



Σχῆμα 14.3: Κατασκευή της μέσης αναλόγου.

Σύν. Σε ευθεία ε λαμβάνουμε σημεία Β, Κ και Γ, τέτοια ώστε ΒΚ = α και ΚΓ = β. Με διάμετρο ΒΓ φέρομε κύκλο. Από το σημείο Κ υψώνομε κάθετο στην ΒΓ, που τέμνει το κύκλο σε σημείο Α. Το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα είναι το ΑΚ.

Δραστηριότητα 14.1 Συμπληρώστε την απόδειξη και τη διερεύνηση στην προηγούμενη κατασκευή.

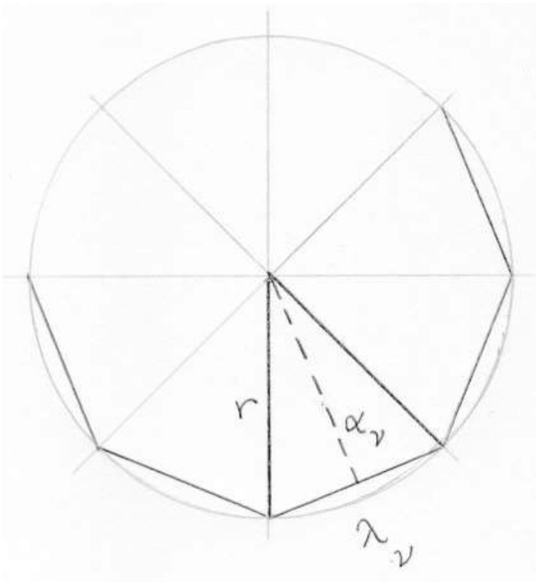
Μέτρηση κανονικών πολυγώνων

Μπορούμε να διαιρέσουμε ένα κανονικό ν-γωνο σε ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα, με κορυφή στο κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Κ άθε ένα από αυτά τα ισοσκελή τρίγωνα έχει γωνία στην κορυφή ίση με $4/\nu$ της ορθής, και γωνίες παρά τη βάση ίσες με το μισό της γωνίας του κανονικού ν-γώνου, δηλαδή $\frac{\nu-2}{\nu}$ της ορθής. Η βάση του τριγώνου είναι ίση με την πλευρά του κανονικού ν-γώνου, και τη συμβολίζουμε λ_ν. Οι άλλες δύο πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου. Το ύψος του τριγώνου είναι ίσο με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου, ονομάζεται **απόστημα** του πολυγώνου, και τη συμβολίζουμε α_ν. Το εμβαδόν κάθε τριγώνου είναι λοιπόν ίσο με $\frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu$, και το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου με πλευρά λ_ν είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ν τριγώνων, δηλαδή

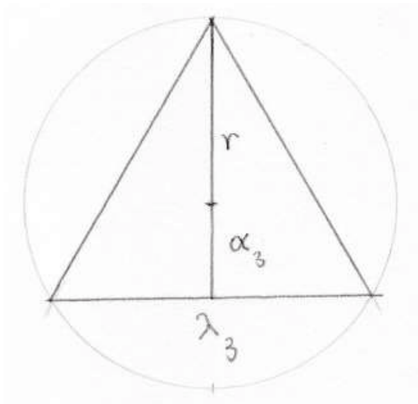
$$\text{εμβ Κανονικού } \nu\text{-γώνου} = \frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu\,.$$

Θα δούμε οτι για κάποια ν είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς και το απόστημα ως συνάρτηση της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου. Θεωρούμε λοιπόν κανονικά ν-γωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας r.

Για $\nu = 3$, έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο. Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου Ο συμπίπτει με το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου, και συνεπώς τέμνει τη



Σχῆμα 14.4: Διαστάσεις κανονικού πολυγώνου.

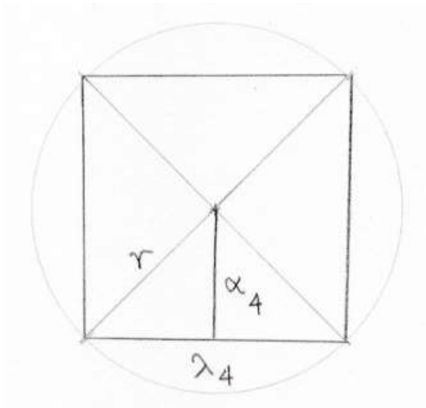


Σχῆμα 14.5: Διαστάσεις ισοπλεύρου (κανονικού) τριγώνου.

διάμεσο AM σε λόγο 2 : 1. Συμπεραίνουμε οτι το απόστημα είναι $\alpha_3 = \frac{1}{2}r$. Το τρίγωνο με πλευρές λ_3, $\frac{1}{2}\lambda_3$ και $\frac{3}{2}r$ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\lambda_3^2 = \frac{1}{4}\lambda_3^2 + \frac{9}{4}r^2$, δηλαδή $3\lambda_3^2 = 9r^2$. Άρα

$$\lambda_3 = \sqrt{3}\,r \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}r\,.$$

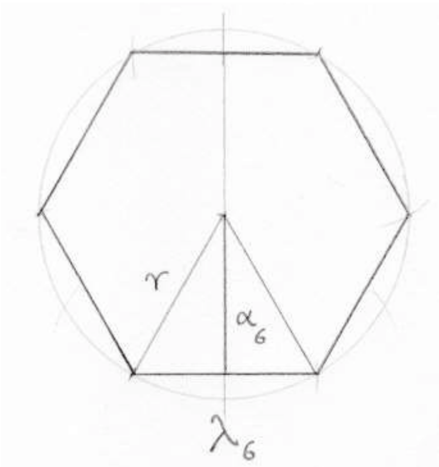
Για $\nu = 4$, έχουμε το τετράγωνο. Οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι διάμετροι του περιγεγραμμένου κύκλου, και διαιρούν το τετράγωνο σε τέσσερα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, με δύο πλευρές ίσες με r. Η τρίτη πλευρά λ_4 ικανοποιεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα, $\lambda_4^2 = r^2 + r^2$, δηλαδή είναι ίση με $\sqrt{2}\,r$. Το απόστημα είναι ίσο με το μισό



Σχῆμα 14.6: Διαστάσεις τετραγώνου.

της πλευράς,

$$\lambda_4 = \sqrt{2}\,r \qquad \alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,r\,.$$



Σχῆμα 14.7: Διαστάσεις κανονικού εξαγώνου.

Για $\nu = 6$, το κανονικό εξάγωνο υποδιαιρείται σε 6 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου r. Άρα $\lambda_6 = r$. Για να υπολογίσουμε το απόστημα παρατηρούμε οτι το τρίγωνο με πλευρές r, $\frac{r}{2}$ και α_6 είναι ορθογώνιο, συνεπώς $\frac{3}{4}r^2 = \alpha_6^2$, και έχουμε

$$\lambda_6 = r \qquad \alpha_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,r\,.$$

Γενικά, για οποιοδήποτε ν, ισχύει

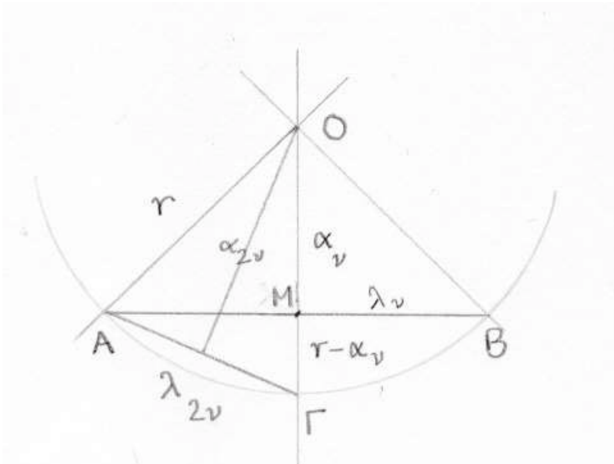
$$\frac{1}{4}\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = r^2\,.$$

Εάν γνωρίζουμε το μήκος της πλευράς και το απόστημα για το κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με ακτίνα r, μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς και το απόστημα για το κανονικό πολύγωνο με 2ν πλευρές εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Εάν η πλευρά του κανονικού ν-γώνου είναι ΑΒ, και το σημείο Γ διχοτομεί το τόξο ΑΒ, τότε $\lambda_{2\nu} = \mathrm{A\Gamma}$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΟΑ και ΜΑΓ έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$r^2 = \alpha_\nu^2 + \frac{1}{4}\lambda_\nu^2 \qquad \lambda_{2\nu}^2 = \frac{1}{4}\lambda_\nu^2 + (r - \alpha_\nu)^2 \ .$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού 2ν-γώνου. Για παράδειγμα

$$\alpha_{2\nu}^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 + r\alpha_\nu\right) \qquad \lambda_{2\nu}^2 = 2\left(r^2 - r\alpha_\nu\right) \ .$$



Σχήμα 14.8: Διαστάσεις κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.

Όμοια ορθογώνια τρίγωνα

Πρόταση 14.6 *Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια εάν και μόνον εάν έχουν τον ίδιο λόγο κάθετων πλευρών ή έχουν τον ίδιο λόγο μίας κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.*

Απόδειξη. Εάν ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια, με $\angle \mathrm{A} = \angle \Delta = 90$ και $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$, τότε έχουν $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta \mathrm{Z}}$ και $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\Delta \mathrm{E}}{\mathrm{EZ}}$, $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\Delta \mathrm{Z}}{\mathrm{EZ}}$.

Αντίστροφα, εάν $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta \mathrm{Z}} = k$, τότε $|\mathrm{AB}| = k\,|\mathrm{A\Gamma}|$ και $|\Delta\mathrm{E}| = k\,|\Delta\mathrm{Z}|$. Αντικαθιστώντας έχουμε $|\mathrm{B\Gamma}|^2 = (1+k^2)|\mathrm{A\Gamma}|^2$ και $|\mathrm{EZ}|^2 = (1+k^2)|\Delta\mathrm{Z}|^2$, άρα $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\Delta \mathrm{Z}}{\mathrm{EZ}}$.

Επίσης $|ΒΓ|^2 = (1 + \frac{1}{k^2})|ΑΒ|^2$ και $|ΕΖ|^2 = (1 + \frac{1}{k^2})|ΔΕ|^2$, άρα $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΕ}{ΕΖ}$. Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια.

□

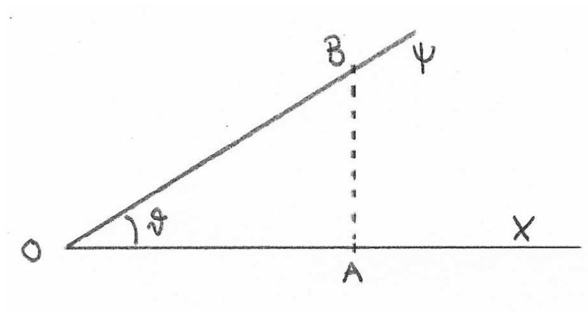
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έστω ΧΟΨ οξεία γωνία μέτρου ϑ, και Β σημείο της ΟΨ, το οποίο προβάλλεται στο Α επί της ΟΧ, ώστε να σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ. Από την Πρόταση 14.6, οι λόγοι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ και $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ δεν εξαρτώνται από τη θέση του σημείου Β στην ΟΨ, αφού τα τρίγωνα που προκύπτουν για διαφορετικά Β είναι όλα όμοια.

Ορίζουμε συναρτήσεις s και c από το διάστημα $[0, 90]$ στο $\mathbb{R}$,

$$s(\vartheta) = \frac{ΑΒ}{ΟΒ} \quad \text{και} \quad c(\vartheta) = \frac{ΟΑ}{ΟΒ},$$

και $t : [0, 90) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t(\vartheta) = \frac{ΑΒ}{ΟΑ}$.



Σχῆμα 14.9: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **ημίτονο**, **συνημίτονο** και **εφαπτομένη** της γωνίας ϑ, και συμβολίζονται $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ και $\tan\vartheta$ αντίστοιχα.

Από το Θεώρημα του Πυθαγόρα έχουμε τη θεμελιώδη σχέση

$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1\,.$$

Πρόταση 14.7 *Εάν $\alpha \in [0, 90]$ και $\beta = 90 - \alpha$, τότε*

$$\sin\beta = \cos\alpha\,, \quad \cos\beta = \sin\alpha\,, \quad \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}\,.$$

Πρόταση 14.8 *Εάν $\alpha \in [0, 90]$, τότε*

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ = d, $\angle$Α = α, και ύψη ΑΔ, ΓΕ.

$$\text{εμβ ΑΒΓ} = \frac{1}{2}|\text{ΒΓ}|\,|\text{ΑΔ}| = |\text{ΒΔ}|\,|\text{ΑΔ}| = (d\sin(\alpha/2))(d\cos(\alpha/2))\,,$$

αλλά επίσης

$$\text{εμβ ΑΒΓ} = \frac{1}{2}|\text{ΓΕ}|\,|\text{ΑΒ}| = \frac{1}{2}d(d\sin\alpha)\,.$$

□

Δραστηριότητα 14.2 Δείξτε οτι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\,,\\ \tan\alpha &= \frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)}\,.\end{aligned}$$

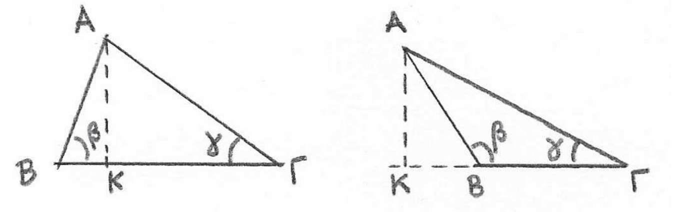
Ορίζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και για αμβλείες γωνίες, μέσω των σχέσεων

$$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)\,,\quad \cos\alpha = -\cos(180-\alpha)\,,\quad \tan\alpha = -\tan(180-\alpha)\,.$$

Θεώρημα ημιτόνου

Πρόταση 14.9 *Το ύψος ΑΚ τριγώνου ΑΒΓ με $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle \Gamma$ ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$|AK| = |A\Gamma|\sin\gamma = |AB|\sin\beta\,.$$



Σχήμα 14.10: Το ύψος τριγώνου.

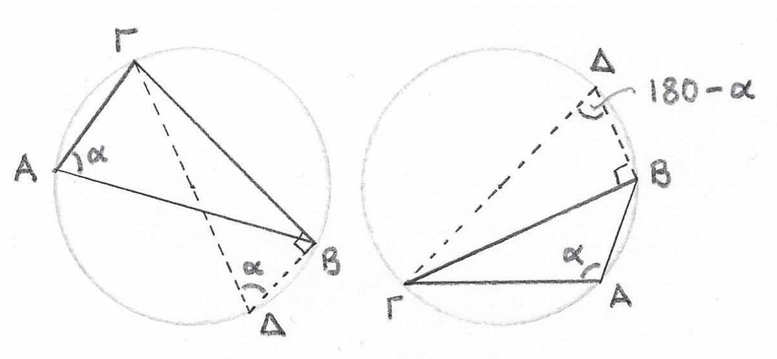
Απόδειξη. Προφανές από το Σχήμα 14.10.

□

Θεώρημα 14.10 *Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και απέναντι γωνίες α, β, γ, ισχύει*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Εάν η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι ρ, τότε αυτοί οι λόγοι είναι ίσοι με 2ρ.



Σχήμα 14.11: Θεώρημα ημιτόνου.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 14.9

$$\frac{|\mathrm{A\Gamma}|}{\sin\beta} = \frac{|\mathrm{AK}|}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{|\mathrm{AB}|}{\sin\gamma}\,.$$

Παρόμοια, θεωρώντας το ύψος ΓΛ, έχουμε $\frac{|\mathrm{A\Gamma}|}{\sin\beta} = \frac{|\mathrm{B\Gamma}|}{\sin\alpha}$.

Τέλος, θεωρώντας το σημείο Δ, αντιδιαμετρικό του Γ, όπως στο Σχήμα 14.11, έχουμε $\sin\alpha = \frac{a}{2\rho}$.

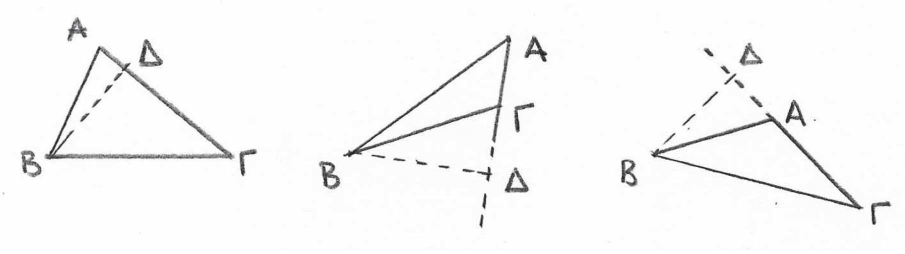
□

Θεώρημα συνημιτόνου

Θεώρημα 14.11 *Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και απέναντι γωνίες α, β, γ, ισχύει*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Απόδειξη. Εάν η γωνία α είναι οξεία, Γ και Δ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ΑΒ,



Σχῆμα 14.12: Θεώρημα συνημιτόνου.

και έχουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned} |\Gamma\Delta| &= \big|\,|\Gamma\mathrm{A}| - |\Delta\mathrm{A}|\,\big| \\ |\Gamma\Delta|^2 &= |\Gamma\mathrm{A}|^2 + |\Delta\mathrm{A}|^2 - 2|\Gamma\mathrm{A}|\,|\Delta\mathrm{A}| \\ a^2 - |\mathrm{B}\Delta|^2 &= b^2 + |\Delta\mathrm{A}|^2 - 2b|\Delta\mathrm{A}| \\ a^2 &= b^2 + |\mathrm{B}\Delta|^2 + |\Delta\mathrm{A}|^2 - 2b|\Delta\mathrm{A}| \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2b|\Delta\mathrm{A}|\,. \end{aligned}$$

Αλλά $|\Delta\mathrm{A}| = c\cos\alpha$, άρα

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Εάν η γωνία α είναι αμβλεία, τότε Γ και Δ βρίσκονται σε αντίθετες μεριές της ΑΒ, και $|\Gamma\Delta| = |\Gamma\mathrm{A}| + |\mathrm{A}\Delta|$. Σε αυτή την περίπτωση

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b|\Delta\mathrm{A}|\,,$$

αλλά $|\Delta\mathrm{A}| = c\cos(180 - \alpha) = -c\cos\alpha$. Άρα καταλήγουμε στον ίδιο τύπο.

□

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $\sin\alpha = \frac{a}{2\rho}$, $\sin\beta = \frac{b}{2\rho}$ και $\sin(\alpha+\beta) = \sin(180 - (\alpha + \beta)) = \sin\gamma = \frac{c}{2\rho}$, και τις σχέσεις $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, για να αποδείξουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες του αθροίσματος γωνιών,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

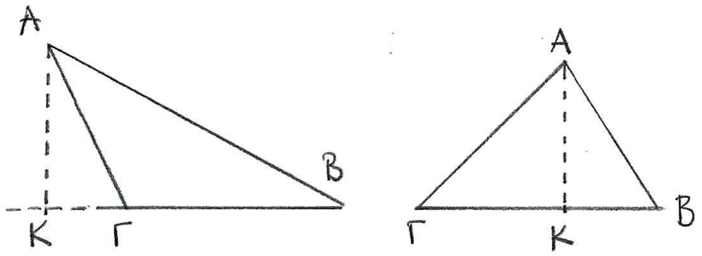
Το Θεώρημα συνημιτόνου μπορεί να διατυπωθεί στις ακόλουθες δύο μορφές, οι οποίες αναφέρονται ως το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Θεώρημα 14.12 (Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα) *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με ύψος ΑΚ,* *α΄. Εάν η γωνία $\angle\Gamma$ είναι οξεία,*

$$|AB|^2 = |A\Gamma|^2 + |B\Gamma|^2 - 2|B\Gamma|\,|K\Gamma|\,.$$

β΄. Εάν η γωνία $\angle\Gamma$ είναι αμβλεία,

$$|AB|^2 = |A\Gamma|^2 + |B\Gamma|^2 + 2|B\Gamma|\,|K\Gamma|\,.$$



Σχῆμα 14.13: Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Θεωρήματα Διαμέσων

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ μίας διαμέσου και των πλευρών του τριγώνου.

Θεώρημα 14.13 (Πρώτο Θεώρημα Διαμέσων) *Σε ένα τρήγωνο $AB\Gamma$, με διάμεσο AM ισχύει*

$$|AB|^2 + |A\Gamma|^2 = 2|AM|^2 + \frac{1}{2}|B\Gamma|^2\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ΑΚ το ύψος του τριγώνου. Εάν $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A\Gamma}|$ τότε Κ συμπίπτει με το Μ, και το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

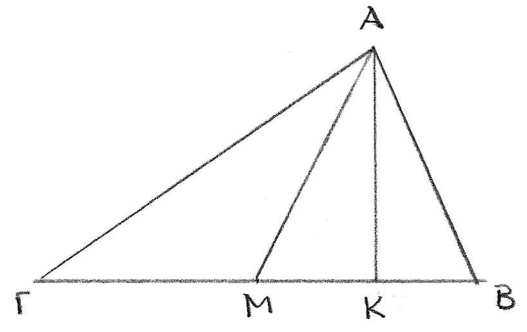
Υποθέτουμε οτι $|\mathrm{AB}| < |\mathrm{A\Gamma}|$. Τότε η γωνία $\angle\mathrm{AMB}$ είναι οξεία, $\angle\mathrm{AM\Gamma}$ είναι αμβλεία, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 14.12 στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουμε

$$|\mathrm{AB}|^2 = |\mathrm{AM}|^2 + |\mathrm{MB}|^2 - 2|\mathrm{MB}|\,|\mathrm{MK}|\,, \tag{14.1}$$
$$|\mathrm{A\Gamma}|^2 = |\mathrm{AM}|^2 + |\mathrm{M\Gamma}|^2 + 2|\mathrm{M\Gamma}|\,|\mathrm{MK}|\,. \tag{14.2}$$

Προσθέτουμε τις δύο ισότητες. και αφού $|\mathrm{MB}| = |\mathrm{M\Gamma}| = \frac{1}{2}|\mathrm{B\Gamma}|$, έχουμε

$$|\mathrm{AB}|^2 + |\mathrm{A\Gamma}|^2 = 2|\mathrm{AM}|^2 + \frac{1}{2}|\mathrm{B\Gamma}|^2\,.$$

□



Σχήμα 14.14: Θεωρήματα Διαμέσων

Θεώρημα 14.14 (Δεύτερο Θεώρημα Διαμέσων) *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με* $|AB| < |A\Gamma|$, *διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΚ, ισχύει*

$$|A\Gamma|^2 - |AB|^2 = 2|B\Gamma|\,|MK|\,.$$

Απόδειξη. Αφαιρούμε την ισότητα 14.1 από την 14.2, και έχουμε

$$|\mathrm{A\Gamma}|^2 - |\mathrm{AB}|^2 = 4|\mathrm{MB}|\,|\mathrm{MK}| = 2|\mathrm{B\Gamma}|\,|\mathrm{MK}|\,.$$

$\square$

Ασκήσεις

Ασκηση 14.3 Απόδειξε οτι εάν δοθεί τμήμα ΟΙ μήκους 1, μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη ευθύγραμμα τμήματα μήκους $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ….

Ασκηση 14.4 Δίδεται τμήμα ΑΒ. Δείξε οτι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Χ για τα οποία ισχύει $\left| |\mathrm{XA}|^2 - |\mathrm{XB}|^2 \right| = \lambda$ σταθερά, είναι ευθεία κάθετη στην ΑΒ.

Ασκηση 14.5 Κανονικό εξάγωνο με μήκος πλευράς δ πλακοστρώνεται με πλακίδια σε σχήμα κανονικού εξαγώνου με πλευρά $\delta/5$.

Σχεδίασε το εξάγωνο και την πλακόστρωση με εξάγωνα και τρίγωνα.

Υπολόγισε το εμβαδόν του μέρους του εξαγώνου που δεν καλύπτεται από τα εξάγωνα.

Ασκηση 14.6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και τις διχοτόμους των γωνιών $\angle$ΑΜΒ και $\angle$ΑΜΓ, οι οποίες τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Δείξτε οτι η ΔΕ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.

Ασκηση 14.7 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Δείξτε οτι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AE}}$.

Ασκηση 14.8 Η ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Δείξτε οτι $|\mathrm{BE}|\,|\Delta\mathrm{Z}|$ είναι σταθερό.

Ασκηση 14.9 Δείξτε οτι η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου είναι ίση με τη διαφορά των προβολών τους στην τρίτη πλευρά.

Ασκηση 14.10 Δίδεται κύκλος (Ο, r) και μία διάμετρος ΑΒ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους ΑΟ και ΟΒ. Κατασκευάστε κύκλο που εφάπτεται στους τρεις κύκλους

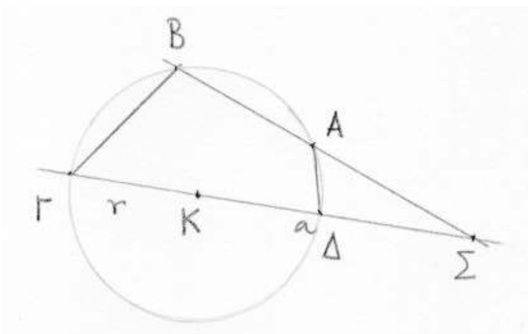
Ασκηση 14.11 Ένας παρεγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ο κύκλος που εφάπτεται σε μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των άλλων δύο πλευρών. Εάν (Κ, r) είναι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος που εφάπτεται στην πλευρά ΑΒ, υπολογίστε την ακτίνα r συναρτήσει των μηκών των πλευρών του τριγώνου.

Κεφάλαιο 15

Η δύναμη του κύκλου

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Θεώρημα 15.1 *Θεωρούμε κύκλο (K, r) και σημείο Σ με $\Sigma K = a$. Για οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το Σ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B, το γινόμενο $|\Sigma A|\,|\Sigma B|$ είναι σταθερό και ίσο με $|a^2 - r^2|$.*

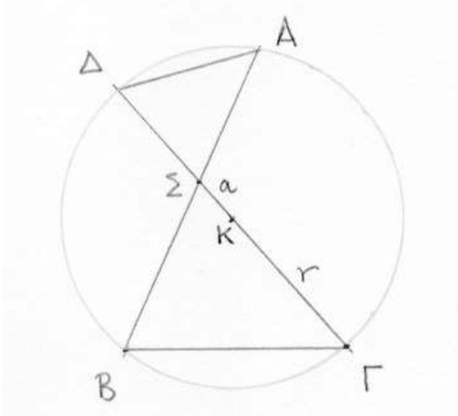


Σχήμα 15.1: Δύναμη εξωτερικού σημείου του κύκλου.

Απόδειξη. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που το Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο. Φέρομε την ευθεία ΣΚ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε οτι η γωνία ∠Β είναι παραπληρωματική της ∠ΑΔΓ, και συνεπώς ίση με την ∠ΑΔΣ. Επίσης η γωνία ∠Γ είναι παραπληρωματική της ∠ΔΑΒ, και συνεπώς ίση με την ∠ΔΑΣ. Συμπεραίνουμε οτι τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΑ είναι όμοια, και συνεπώς

$$\frac{\Sigma\mathrm{A}}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma\mathrm{B}}, \quad \text{άρα} \quad |\Sigma\mathrm{A}|\,|\Sigma\mathrm{B}| = |\Sigma\Delta|\,|\Sigma\Gamma|\,.$$

Αλλά $|\Sigma\Delta|\,|\Sigma\Gamma| = (a - r)(a + r) = a^2 - r^2$.



Σχήμα 15.2: Δύναμη εσωτερικού σημείου του κύκλου.

Εάν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Κ, r) και είναι διαφορετικό από το Κ, φέρομε την ευθεία ΣΚ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Σχηματίζονται τα όμοια τρίγωνα ΣΑΔ και ΣΓΒ, από τα οποία έχουμε

$$\frac{\Sigma\mathrm{A}}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma\mathrm{B}}, \quad \text{άρα} \quad |\Sigma\mathrm{A}|\,|\Sigma\mathrm{B} = \Sigma\Delta|\,|\Sigma\Gamma|\,.$$

Αλλά $\Sigma\Delta \cdot \Sigma\Gamma = (r-a)(r+a) = r^2 - a^2$.

Τέλος, εάν το σημείο Σ συμπίπτει με το Κ τότε $a = 0$, και για οποιαδήποτε διάμετρο του κύκλου ΑΒ ισχύει $|\Sigma\mathrm{A}|\,|\Sigma\mathrm{B}| = r^2 = r^2 - a^2$.

□

Για κάθε σημείο Σ στο επίπεδο του κύκλου (Κ, r) η **δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (Κ,** r**)** είναι ο αριθμός $|\Sigma\mathrm{K}|^2 - r^2$. Εάν το σημείο βρίσκεται έξω από τον κύκλο η δύναμη είναι θετική, εάν βρίσκεται πάνω στον κύκλο είναι 0 και εάν βρίσκεται μέσα στον κύκλο είναι αρνητική.

Πόρισμα 15.2 *Εάν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο (Κ, r), το τετράγωνο της εφαπτομένης από το Σ στον κύκλο (Κ, r) ισούται με τη δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (Κ, r).*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη ΣΕ είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΕ, και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΣΚ έχουμε $a^2 = |\Sigma\mathrm{K}|^2 = |\Sigma\mathrm{E}|^2 + |\mathrm{KE}|^2 = |\Sigma\mathrm{E}|^2 + r^2$. Άρα $|\Sigma\mathrm{E}|^2 = a^2 - r^2$.

□

Πρόταση 15.3 *Θεωρούμε σημεία Α, Β στην ημιευθεία ΟΧ και Γ, Δ στην ημιευθεία ΟΨ. Τα Α, Β, Γ και Δ είναι ομοκυκλικά εάν και μόνον εάν $|O A|\,|O B| = |O\Gamma|\,|O\Delta|$.*

Απόδειξη. Εάν τα σημεία βρίσκονται στον ίδιο κύκλο, τότε από το Θεώρημα 15.1, $|\mathrm{OA}|\,|\mathrm{OB}| = |\mathrm{O\Gamma}|\,|\mathrm{O\Delta}|$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι $|\mathrm{OA}|\,|\mathrm{OB}| = |\mathrm{O\Gamma}|\,|\mathrm{O\Delta}|$ και (K, r) είναι ο κύκλος από τα σημεία Α, Β και Γ, ο οποίος τέμνει την ημιευθεία ΟΨ σε ένα δεύτερο σημείο Ε. Τότε από το Θεώρημα 15.1, $|\mathrm{OA}|\,|\mathrm{OB}| = |\mathrm{O\Gamma}|\,|\mathrm{OE}|$, άρα $\mathrm{OE} = \mathrm{O\Delta}$, και το Δ βρίσκεται πάνω στον κύκλο.

□

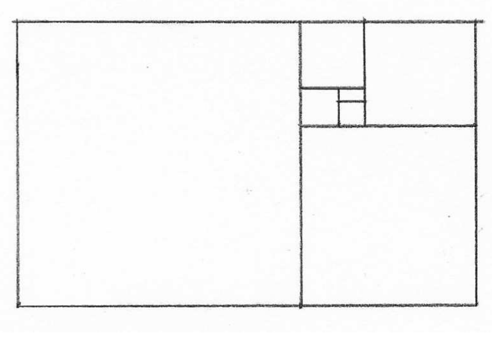
Η χρυσή τομή

Η διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε *'μέσο και άκρο λόγο'* είναι το πρόβλημα της διαίρεσης ενός τμήματος σε δύο μέρη έτσι ώστε το αρχικό τμήμα προς το μεγαλύτερο μέρος να έχει τον ίδιο λόγο με το μεγαλύτερο προς το μικρότερο μέρος. Αν υποθέσουμε οτι το αρχικό τμήμα έχει μήκος α, θέλουμε να το διαιρέσουμε σε δύο τμήματα με μήκος x το μεγαλύτερο (ο μέσος λόγος) και $\alpha - x$ το μικρότερο (ο άκρος λόγος), έτσι ώστε

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}\,.$$

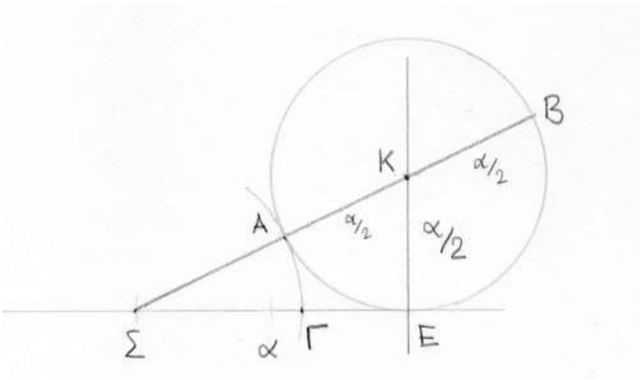
Οι αρχαίοι Έλληνες θεώρησαν οτι αυτός ο λόγος αντιπροσωπεύει μία ιδιαίτερη αισθητική αξία. Είναι αλήθεια οτι εμφανίζεται σε πολλά φαινόμενα στη φύση.

Εάν θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος α και x, και αφαιρέσουμε ένα τετράγωνο πλευράς x από το ορθογώνιο, το σχήμα που απομένει είναι πάλι ένα ορθογώνιο όμοιο με το αρχικό. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε μία έλικα από όμοια ορθογώνια, Σχήμα 15.3.



Σχήμα 15.3: Όμοια ορθογώνια με πλευρές σε χρυσή αναλογία.

Κατασκευή 15.4 *Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο.*



Σχῆμα 15.4: Κατασκευή της χρυσής τομής: Διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο.

Αν. Πολλαπλασιάζοντας χιαστί (Πρόταση 13.2) την αναλογία $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$ έχουμε $x^2 = \alpha(\alpha - x)$, το οποίο μπορούμε να μετατρέψουμε σε $x(x + \alpha) = \alpha^2$. Σε αυτή τη μορφή μπορούμε να το συσχετίσουμε με τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο. Συγκεκριμένα, εάν η εφαπτόμενη από το Σ προς κύκλο (Κ, r) έχει μήκος α, και ΣΧ είναι ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο σε μία χορδή ΑΒ μήκους α, τότε α και $x = |\Sigma \mathrm{A}|$ ικανοποιούν τη σχέση $x(x + \alpha) = \alpha^2$. Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε οτι ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε η ακτίνα είναι $r = \frac{\alpha}{2}$.

Σύν. Στην ευθεία ε λαμβάνουμε τμήμα ΣΕ μήκους α. Από το Ε υψώνουμε κάθετο στην ε, και σε αυτήν λαμβάνουμε σημείο Κ τέτοιο ώστε $|\mathrm{KE}| = \frac{\alpha}{2}$. Φέρομε τον κύκλο (Κ, $\frac{\alpha}{2}$) και την ευθεία ΣΚ, η οποία τέμνει τον κύκλο σε σημεία Α και Β, έτσι ώστε το Α είναι μεταξύ του Σ και του Κ.

Θα δείξουμε οτι ο ζητούμενος λόγος είναι ΣΕ : ΣΑ. Στο διάστημα ΣΕ παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε ΣΓ = ΣΑ. Το σημείο Γ διαιρεί το ΣΕ σε μέσο και άκρο λόγο.

Απ. Από την κατασκευή,

$$\alpha^2 = |\Sigma \mathrm{E}|^2 = |\Sigma \mathrm{A}|\,|\Sigma \mathrm{B}| = x(x + \alpha)\,.$$

Άρα $\alpha(\alpha - x) = x^2$, δηλαδή

$$|\Sigma \mathrm{E}|\,|\Gamma \mathrm{E}| = |\Sigma \Gamma|^2\,.$$

Συνεπώς

$$\frac{\Sigma \mathrm{E}}{\Sigma \Gamma} = \frac{\Sigma \Gamma}{\Gamma \mathrm{E}}\,,$$

και το σημείο Γ διαιρεί το διάστημα ΣΕ σε μέσο και άκρο λόγο.

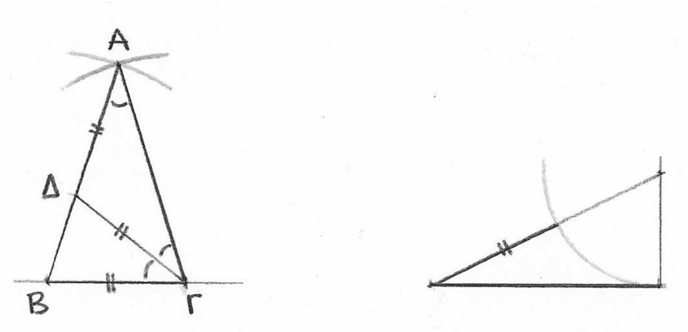
Κατασκευή κανονικού πενταγώνου

Θα κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή. Τότε οι γωνίες στη βάση είναι 72 μοίρες. Αυτό το τρίγωνο χρησιμοποιείται στην κατασκευή κανονικού πενταγώνου.

Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή Α χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι η διχοτόμος ΓΔ σχηματίζει ένα τρίγωνο ΓΔΒ όμοιο με το αρχικό, και ΑΔ = ΓΔ = ΓΒ. Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}$, και αφού ΑΓ = ΑΒ, ΒΓ = ΑΔ, έχουμε

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}},$$

δηλαδή το Δ διαιρεί το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο.

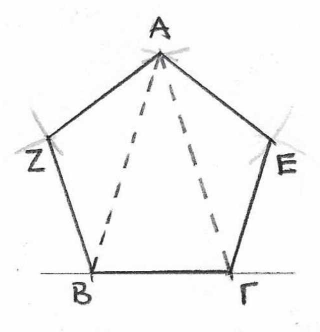


Σχήμα 15.5: Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 36 μοιρών.

Για να κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και το διαιρούμε σε μέσο και άκρο λόγο, σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή, έτσι ώστε $|\mathrm{A\Delta}|^2 = |\mathrm{AB}|\,|\mathrm{\Delta B}|$. Η τρίτη κορυφή Γ του τριγώνου είναι το σημείο που απέχει |ΑΒ| από το Α και |ΑΔ| από το Β.

Εάν στην ΑΒ κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΖ με ΑΖ = ΒΖ = ΑΔ, και στην ΑΓ κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με ΑΕ = ΓΕ = ΑΔ, το πολύγωνο ΑΖΒΓΕ είναι κανονικό πεντάγωνο, αφού όλες οι πλευρές είναι ίσες με ΑΔ και όλες οι γωνίες 108 μοίρες.

Δραστηριότητα 15.1 Κατασκεύασε πεντάγωνο με μήκος πλευράς $a = |\mathrm{AB}|$, για δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



Σχῆμα 15.6: Κατασκευή κανονικού πενταγώνου.

Κεφάλαιο 16

Γεωμετρικές Κατασκευές – 2

Κεφάλαιο 17

Γεωμετρία του Χώρου

Για τη μελέτη της Γεωμετρίας στο χώρο, χρειαζόμαστε ακόμη μία αρχική έννοια. Εκτός από το σύνολο P των σημείων του χώρου, και το σύνολο L των ευθειών του χώρου, θεωρούμε το σύνολο E των επιπέδων του χώρου. Τα στοιχεία του E συμβολίζουμε με λατινικά γράμματα F, G, H, ... Μεταξύ σημείων και επιπέδων ορίζουμε ακόμη μία σχέση ‘‘βρίσκεται’’, που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

Ιδιότητα 17.1 *Για κάθε τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα τρία σημεία. Σε κάθε επίπεδο βρίσκονται άπειρα σημεία, και υπάρχουν άπειρα σημεία που δεν βρίσκονται στο επίπεδο.*

Ιδιότητα 17.2 *Εάν μία ευθεία έχει δύο σημεία κοινά με ένα επίπεδο, τότε όλα τα σημεία της ευθείας βρίσκονται στο επίπεδο.*

Ιδιότητα 17.3 *Εάν δύο επίπεδα έχουν δύο κοινά σημεία, τότε όλα τα σημεία της ευθείας που προσδιορίζεται από τα δύο σημεία, βρίσκονται στο επίπεδο.*

Ιδιότητα 17.4 *Κάθε επίπεδο χωρίζει το σύνολο των σημείων που δεν βρίσκονται στο επίπεδο σε δύο υποσύνολα που δεν έχουν κοινά σημεία, τα οποία ονομάζονται* ***ημίχωροι****. Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του σε διαφορετικούς ημίχωρους τέμνει το επίπεδο σε ένα ακριβώς σημείο. Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει και τα δύο άκρα του στον ίδιο ημίχωρο δεν τέμνει το επίπεδο.*

Δίδουμε χωρίς απόδειξη κάποια αποτελέσματα που αποτελούν άμεση συνέπεια των Ιδιοτήτων.

Θεώρημα 17.5 *Εάν δύο επίπεδα τέμνονται, τότε η τομή τους συμπίπτει με μία ευθεία.*

Θεώρημα 17.6 *Δύο διαφορετικές ευθείες στο χώρο που έχουν ένα κοινό σημείο, ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει.*

Δύο επίπεδα είναι **παράλληλα** εάν δεν έχουν κοινό σημείο. Μία ευθεία και ένα επίπεδο είναι **παράλληλα** εάν δεν έχουν κοινό σημείο. Δύο ευθείες είναι **παράλληλες** στο χώρο εάν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο. Δύο ευθείες στο χώρο είναι **ασύμβατες** εάν δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Αφού δύο παράλληλες ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, το ακόλουθο Θεώρημα είναι συνέπεια του Αξιώματος των παραλλήλων της γεωμετρίας του επιπέδου.

Θεώρημα 17.7 *Από ένα σημείο που δεν βρίσκεται στην ευθεία ε διέρχεται ακριβώς μία ευθεία παράλληλη προς την ε.*

Θεώρημα 17.8 *Μία ευθεία ε είναι παράλληλη προς το επίπεδο F τότε και μόνον, όταν το F περιέχει ευθεία ζ παράλληλη προς την ε.*

Παράλληλα επίπεδα

Πρόταση 17.9 *Εάν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, τότε κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη προς το άλλο επίπεδο.*

Πρόταση 17.10 *Δύο τεμνόμενες ευθείες που είναι παράλληλες προς το επίπεδο F, ορίζουν επίπεδο παράλληλο προς το F.*

Απόδειξη. Εάν τα δύο επίπεδα δεν ήταν παράλληλα, η τομή τους θα ήταν μία ευθεία, η οποία θα έτεμνε μία τουλάχιστον από τις δοθείσες ευθείες. 'τοπο αφού αυτές δεν έχουν κοινά σημεία με το F.

□

Πρόταση 17.11 *Εάν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, και τέμνονται από επίπεδο F, τότε οι τομές των δύο επιπέδων με το F είναι παράλληλες ευθείες.*

Θεώρημα 17.12 *Για κάθε σημείο X που δεν βρίσκεται στο επίπεδο F, υπάρχει ένα και μόνο επίπεδο G παράλληλο προς το F που περιέχει το X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο ευθείες ζ και η του F που τέμνονται σε σημείο Ψ. Από το σημείο Χ φέρουμε ευθείες δ παράλληλη προς τη ζκαι ε παράλληλη προς την η. Το επίπεδο G που ορίζουν οι δ και ε είναι παράλληλο προς το F. Εάν H είναι διαφορετικό επίπεδο που περιέχει τη δ και την ε και είναι παράλληλο προς το F, η ευθεία ε, ως τομή δύο επιπέδων παράλληλων προς τη ζ θα ήταν επίσης παράλληλη προς τη ζ, άτοπο.

□

Πρόταση 17.13 *Εάν η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο F, τότε η ε τέμνει και κάθε επίπεδο παράλληλο προς το F.*

Πρόταση 17.14 *Εάν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, και τέμνονται από δύο παράλληλες ευθείες, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται στις δύο ευθείες από τα σημεία τομής, είναι ίσα.*

Γωνίες στο χώρο

Δύο διαφορετικές ευθείες στο χώρο που έχουν ένα κοινό σημείο ορίζουν ακριβώς ένα επίπεδο, και σε αυτό το επίπεδο σχηματίζονται γωνίες μεταξύ των ημιευθειών των δύο ευθειών. Γωνίες σε διαφορετικέ επίπεδα στο χώρο είναι ίσες όταν τα μέτρα τους είναι ίσα.

Θεώρημα 17.15 *Γωνίες με παράλληλες και ομόρροπες πλευρές είναι ίσες.*

Ασύμβατες ευθείες

Θεώρημα 17.16 *Εάν ε και ζ είναι ασύμβατες ευθείες, τότε υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο που περιέχει την ε και είναι παράλληλο προς τη ζ.*

Απόδειξη. Από σημείο Χ της ε, φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς τη ζ. Το επίπεδο F που ορίζουν οι δ και ε είναι παράλληλο προς τη ζ. Εάν G είναι διαφορετικό επίπεδο που περιέχει την ε και είναι παράλληλο προς τη ζ, η ευθεία ε, ως τομή δύο επιπέδων παράλληλων προς τη ζ θα ήταν επίσης παράλληλη προς τη ζ, άτοπο.

□

Πρόταση 17.17 *Εάν ε και ζ είναι ασύμβατες ευθείες, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο παράλληλα επίπεδα F_ε και F_ζ, τέτοια ώστε το F_ε περιέχει την ε και το F_ζ περιέχει τη ζ.*

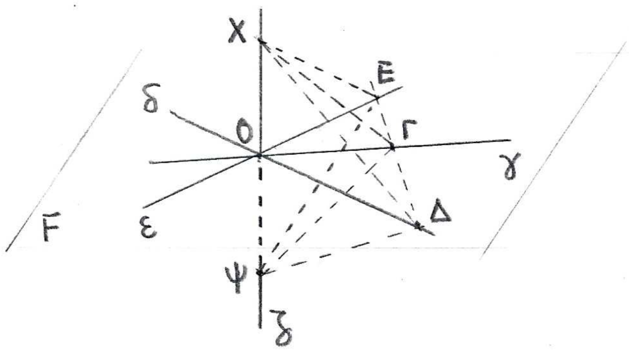
Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει μοναδικό επίπεδο F που περιέχει την ε και είναι παράλληλο προς τη ζ και μοναδικό επίπεδο G που περιέχει τη ζ και είναι παράλληλο προς την ε. Τα επίπεδα F και G είναι παράλληλα, αφού εάν είχαν κοινά σημεία η τομή τους θα ήταν ευθεία παράλληλη προς την ε και τη ζ, άτοπο.

□

Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο στο σημείο Ο εάν η ευθεία τέμνει το επίπεδο στο Ο και είναι κάθετη σε δύο διαφορετικές ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο και διέρχονται από το Ο.

Θεώρημα 17.18 *Εάν μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο στο σημείο Ο, τότε είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο και διέρχεται από το Ο.*



Σχῆμα 17.1: Ιδιότητα ευθείας κάθετης σε επίπεδο.

Απόδειξη. Θεωρούμε ευθεία ζ κάθετη στο επίπεδο F στο σημείο Ο, και σημεία Χ και Ψ πάνω στη ζ που ισαπέχουν από το Ο. Υποθέτουμε οτι η ζ είναι κάθετη στις ευθείες δ και ε του επιπέδου F.

Έστω ευθεία γ του επιπέδου F, που διέρχεται από το Ο, και σημείο Γ της γ διαφορετικό από το Ο. Φέρουμε ευθεία από το Γ η οποία τέμνει τις δ και ε στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, Σχήμα 17.1. Τα τρίγωνα ΧΟΔ και ΨΟΔ είναι ίσα, άρα ΔΧ και ΔΨ είναι ίσες. Παρόμοια, ΕΧ και ΕΨ είναι ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΧΔΕ και ΨΔΕ είναι ίσα, και $\angle$ΧΕΓ = $\angle$ΨΕΓ.

Τώρα θεωρούμε τα τρίγωνα ΧΕΓ και ΨΕΓ, τα οποία είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες. Συμπεραίνουμε οτι ΧΓ = ΨΓ, το τρίγωνο ΓΧΨ είναι ισοσκελές, και η διάμεσος ΓΟ είναι κάθετη στη βάση ΧΨ. Άρα ζ είναι κάθετη στη γ.

□

Πρόταση 17.19 *Εάν η ευθεία ζ είναι κάθετη στο επίπεδο F στο σημείο Ο, τότε κάθε ευθεία κάθετη στη ζ στο Ο βρίσκεται στο επίπεδο F.*

Απόδειξη. Εάν η ευθεία δ είναι κάθετη στη ζ στο Ο, αλλά δεν περιέχεται στο F, τότε το επίπεδο G των δ και $zeta$ τέμνει το F σε μία άλλη ευθεία α η οποία, από το Θεώρημα, είναι κάθετη στη ζ. 'τοπο, αφού στο G υπάρχει μόνο μία κάθετη προς τη ζ από το Ο.

□

Πρόταση 17.20 *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του χώρου που ισαπέχουν από δύο σημεία A και B είναι ένα επίπεδο κάθετο στο μέσο O του ευθύγραμμου τμήματος AB. Ονομάζεται* ***μεσοκάθετο επίπεδο*** *του AB.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο διαφορετικά επίπεδα F και G που περιέχουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και τις μεσοκαθέτους ΟΧ και ΟΨ του ΑΒ σε αυτά τα επίπεδα. Οι δύο ευθείες ΟΧ και ΟΨ προσδιορίζουν ένα επίπεδο H. Για κάθε σημείο Φ του επιπέδου H η ευθεία ΟΦ είναι κάθετη στο μέσο του ΑΒ, άρα το σημείο Φ ισαπέχει από τα Α και Β.

Αντίστροφα, εάν ένα σημείο ισαπέχει από τα Α και Β τότε η ευθεία ΟΦ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ στο μέσο Ο. Από την Πρόταση 17.19 το Φ βρίσκεται στο επίπεδο H.

□

Πρόταση 17.21 *Έστω ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο F. Μία ευθεία δ διαφορετική από την ε είναι κάθετη στο επίπεδο F εάν και μόνον εάν δ είναι παράλληλη στην ε.*

Απόδειξη. Η ε τέμνει το επίπεδο F στο σημείο Ο, και είναι κάθετη στις ΟΧ, ΟΨ. Εάν δ είναι παράλληλη στην ε και τέμνει το Fστο O', θεωρούμε τις παράλληλες $\mathrm{O}'\mathrm{X}'$ και $\mathrm{O}'\Psi'$. Αυτές σχηματίζουν ορθές γωνίες με τη δ (Θεώρημα 17.15), άρα δ είναι κάθετη στο F.

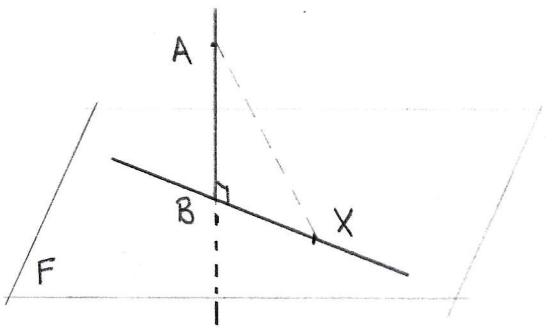
Αντίστροφα, εάν δ είναι κάθετη στο F από το O', και δεν είναι παράλληλη στην ε, τότε η ευθεία ε', παράλληλη στην ε από το O' θα ήταν επίσης κάθετη στο F. Το επίπεδο των δ και ε' θα τέμνει το επίπεδο F σε μία ευθεία που είναι κάθετη στο ίδιο σημείο O' σε δύο διαφορετικές ευθείες, άτοπο.

□

Για να κατασκευάσουμε μία ευθεία κάθετη στο F από σημείο Α εκτός του F, θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες δ και ε στο F, και τις καθέτους προς αυτές από το Α, ΑΔ και ΑΕ. Το ύψος από το Α του τριγώνου ΑΔΕ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Πρόταση 17.22 *Από σημείο A εκτός του επιπέδου F υπάρχει μόνο μία ευθεία κάθετη στο F.*

Το σημείο Β στο οποίο η κάθετος από το Α τέμνει το επίπεδο F, λέγεται **προβολή** του σημείου Α στο F. Το μήκος |ΑΒ| είναι μικρότερο από το |ΑΧ| για οποιοδήποτε σημείο Χ του F, και λέγεται η **απόσταση** του σημείου Α από το επίπεδο F, Σχήμα 17.2.



Σχῆμα 17.2: Απόσταση σημείου από επίπεδο.

Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε ευθεία κάθετη στο επίπεδο F από δεδομένο σημείο του F, και να δείξουμε οτι αυτή είναι μοναδική.

Πρόταση 17.23 *Από σημείο Β του επιπέδου F υπάρχει μόνο μία ευθεία κάθετη στο F.*

Τέλος θα δείξουμε οτι υπάρχει μία κοινή κάθετος προς δύο ασύμβατες ευθείες.

Πρόταση 17.24 *Σε δύο ασύμβατες ευθείες δ και ε υπάρχουν μοναδικά σημεία Χ και Ψ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΧΨ να είναι κάθετη στις δύο ευθείες.*

Δραστηριότητα 17.1 Καθώς διαβάζετε την ακόλουθη απόδειξη, σχεδιάστε το αντίστοιχο σχήμα.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα παράλληλα επίπεδα F και G που περιέχουν τις ευθείες δ και ε αντίστοιχα. Από σημείο Α της δ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει το G στο Β. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς τη δ που τέμνει την ε στο σημείο Ψ. Από το Ψ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει τη δ στο σημείο Χ.

Η ευθεία ΧΨ είναι παράλληλη στην ΑΒ, η οποία είναι κάθετη στο G, συνεπώς η ΧΨ είναι κάθετη στο G και στο F, άρα κάθετη στις ασύμβατες ευθείες ε και δ.

Εάν υπάρχουν και άλλα σημεία X', Ψ' τέτοια ώστε $\mathrm{X}'\Psi'$ είναι κάθετη στις δ και ε, η $\mathrm{X}'\Psi'$ είναι επίσης κάθετη στην παράλληλη της ε από το X'. Άρα $\mathrm{X}'\Psi'$ είναι κάθετη στο επίπεδο F. Τότε η $\mathrm{X}'\Psi'$ είναι παράλληλη στην ΧΨ και τα σημεία Χ, Ψ, X' και Ψ'

είναι στο ίδιο επίπεδο. 'τοπο αφού οι δ και ε δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

□

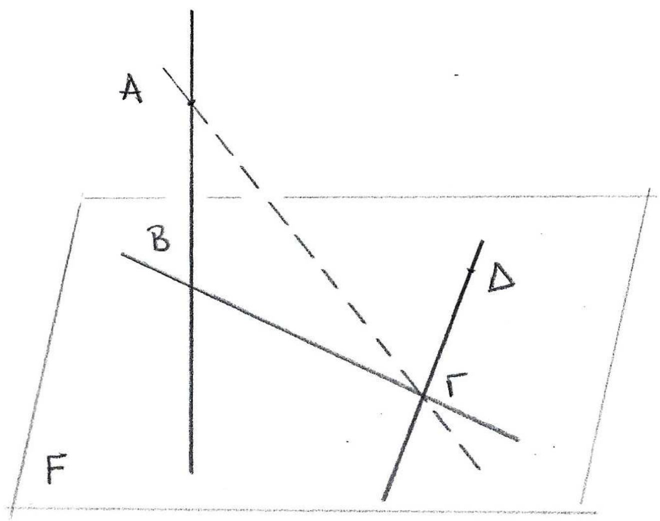
Θεώρημα τριών καθέτων

Θεώρημα 17.25 *Θεωρούμε τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ τέτοια ώστε οι ευθείες $\delta = AB$ και $\varepsilon = \Gamma\Delta$ να είναι ασύμβατες, και το επίπεδο F που ορίζεται από τα $B\Gamma\Delta$. Τότε,*

α'. Εάν $AB \perp F$ και $B\Gamma \perp \Gamma\Delta$, τότε $A\Gamma \perp \Gamma\Delta$.

β'. Εάν $AB \perp F$ και $A\Gamma \perp \Gamma\Delta$, τότε $B\Gamma \perp \Gamma\Delta$.

γ'. Εάν $AB \perp B\Gamma$, $B\Gamma \perp \Gamma\Delta$ και $A\Gamma \perp \Gamma\Delta$, τότε $AB \perp F$.



Σχήμα 17.3: Θεώρημα τριών καθέτων.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις σχέσεις

$$|AB|^2 = |A\Gamma|^2 - |B\Gamma|^2, \tag{17.1}$$
$$|A\Delta|^2 = |AB|^2 + |B\Delta|^2, \tag{17.2}$$
$$|B\Delta|^2 = |B\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2, \tag{17.3}$$
$$|A\Delta|^2 = |A\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2. \tag{17.4}$$

Παρατηρούμε οτι εαν ισχύει η 17.1 και δύο από τις 17.2, 17.3, 17.4 τότε ισχύει και η άλλη σχέση. Για παράδειγμα, εάν ισχύουν οι 17.1, 17.2, 17.3, τότε

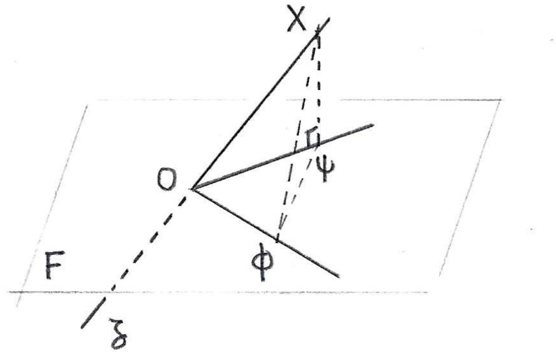
$$|A\Delta|^2 = |AB|^2 + |B\Delta|^2 = (|A\Gamma|^2 - |B\Gamma|^2) + (|B\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2) = |A\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2.$$

Στην περίπτωση (α΄) ισχύουν οι 17.1, 17.2, 17.3, άρα ∠ΑΓΔ είναι ορθή και ΑΓ ⊥ ΓΔ. Στην περίπτωση (β΄) ισχύουν οι 17.1, 17.2, 17.4, άρα ∠ΒΓΔ είναι ορθή και ΒΓ ⊥ ΓΔ. Τέλος στην περίπτωση (γ΄) ισχύουν οι 17.1, 17.3, 17.4, άρα ∠ΑΒΔ είναι ορθή και η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο F.

□

Γωνία ευθείας και επιπέδου

Μία ευθεία που δεν είναι παράλληλη ή κάθετη προς το επίπεδο F σχηματίζει διαφορετικές γωνίες με τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο τομής της με το F. **Γωνία της ευθείας με το επίπεδο** λέγεται η γωνία που σχηματίζεται με αυτό τον τρόπο και έχει ελάχιστο μέτρο, Σχήμα 17.4.



Σχήμα 17.4: Γωνία μεταξύ ευθείας και επιπέδου.

Θεώρημα 17.26 *Θεωρούμε επίπεδο F και ευθεία ζ που τέμνει το F σε σημείο O και δεν είναι κάθετη στο F. Έστω σημείο X της ζ διαφορετικό από το O, και Ψ η προβολή του X στο επίπεδο F. Τότε η γωνία $\angle X O \Psi$ είναι μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη γωνία μεταξύ της OX και μίας ημιευθείας $O\Phi$ στο F.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε το Φ έτσι ώστε ΟΦ = ΟΧ. Τότε τα τρίγωνα ΟΧΨ και ΟΧΦ έχουν δύο πλευρές ίσες, ενώ |ΧΦ| > |ΧΨ|. Άρα και η γωνία ∠ΧΟΦ θα είναι μεγαλύτερη από τη ∠ΧΟΨ.

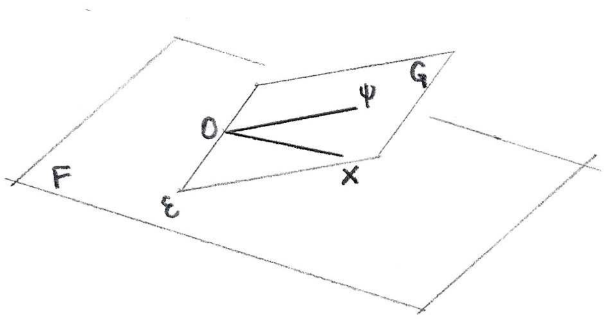
□

Κεφάλαιο 18

Πολύεδρα

Δίεδρες γωνίες

Θεωρούμε δύο επίπεδα F και G που τέμνονται σε μία ευθεία ε. Η ε ορίζει δύο ημιεπίπεδα σε κάθε επίπεδο. Δύο ημιεπίπεδα που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και τέμνονται στην κοινή ευθεία ε σχηματίζουν μία **δίεδρη γωνία**. Η ευθεία ε λέγεται **ακμή της διέδρου** και τα ημιεπίπεδα λέγονται **έδρες της διέδρου**. Το μέτρο της διέδρου ορίζεται φέροντας ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή. Αυτό τέμνει τις έδρες της διέδρου σε ημιευθείες ΟΧ και ΟΨ και σχηματιζει μία γωνία ∠ΧΟΨ. Ορίζουμε το μέτρο της διέδρου να είναι ίσο με το μέτρο αυτής της γωνίας.

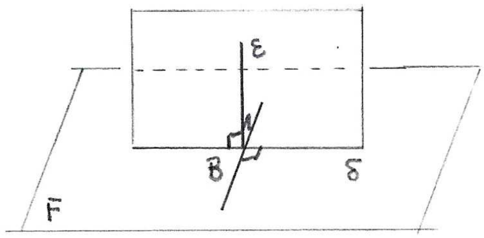


Σχήμα 18.1: Δίεδρη γωνία.

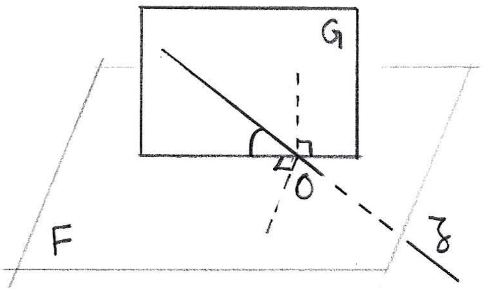
Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή δίεδρο γωνία λέγονται **κάθετα επίπεδα**.

Θεώρημα 18.1 *Εάν μία ευθεία ε είναι κάθετη σε ένα επίπεδο F, τότε κάθε άλλο επίπεδο που περιέχει την ε είναι κάθετο στο επίπεδο F.*

Μία ευθεία ζ που δεν περιέχεται και δεν είναι κάθετη στο επίπεδο F περιέχεται σε ένα ακριβώς επίπεδο που είναι κάθετο στο F.



Σχῆμα 18.2: Κάθετα επίπεδα.



Σχῆμα 18.3: Επίπεδο που περιέχει ευθεία και είναι κάθετο σε άλλο επίπεδο.

Απόδειξη. Θεωρούμε επίπεδο G που περιέχει την ε. Το G σχηματίζει δίεδρη γωνία με το F, με ακμή δ. Έστω B το σημείο τομής της ε με το F. Αφού η ε είναι κάθετη στο F, είναι κάθετη σε κάθε ευθεία που βρίσκεται στο F και διέρχεται από το B. Άρα η ε είναι κάθετη και προς την ευθεία του F που είναι κάθετη στην ακμή δ της δίεδρης γωνίας. Άρα το μέτρο της δίεδρης γωνίας είναι μία ορθή.

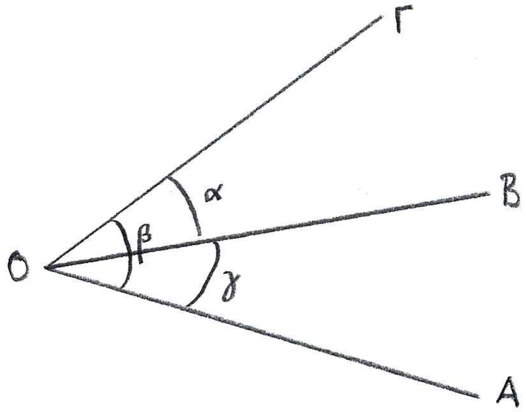
Θεωρούμε σημείο X της ζ και την προβολή του Ψ στο επίπεδο F. Το επίπεδο G που περιέχει την ζ και την XΨ είναι κάθετο στο F. Εάν H είναι άλλο επίπεδο που περιέχει την ζ και είναι κάθετο στο F, η κάθετη από το X στην τομή του F με το H θα είναι κάθετη στο F, άρα θα συμπίπτει με την XΨ, και H θα συμπίπτει με το G.

□

Τρίεδρες γωνίες

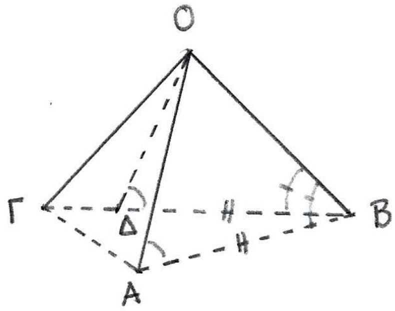
Τρεις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ που δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, ορίζουν ανά δύο τρεις γωνίες, $\alpha = \angle$ΒΟΓ, $\beta = \angle$ΓΟΑ και $\gamma = \angle$ΑΟΒ. Η ένωση των τριών ημιευθειών και των εσωτερικών των τριών γωνιών χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, εκ των οποίων το ένα είναι κυρτό. Οι τρεις ημιευθείες ορίζουν μία **κυρτή τρίεδρο γωνία** ΟΑΒΓ.

Το κυρτό μέρος του χώρου είναι το **εσωτερικό** της τρίεδρης γωνίας. Οι ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ λέγονται **ακμές** της τρίεδρης γωνίας, και τα εσωτερικά των γωνιών α, β, γ λέγονται **έδρες** της τρίεδρης γωνίας. Οι δίεδρες γωνίες μεταξύ των επιπέδων των γωνιών α, β, γ, που έχουν ακμές τις ευθείες ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ λέγονται **δίεδρες της τρίεδρης γωνίας**, και θα τις συμβολίζουμε $\angle A$, $\angle B$ και $\angle \Gamma$ αντίστοιχα. Λέμε οτι δύο τρίεδρες γωνίες είναι **ίσες** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες δίεδρες γωνίες ίσες.



Σχήμα 18.4: Τρίεδρη γωνία

Θεώρημα 18.2 *Σε κάθε τρίεδρη γωνία, το άθροισμα δύο εδρών της είναι μεγαλύτερο από την τρίτη. Εάν στην τρίεδρη γωνία ΟΑΒΓ,* $\angle B O \Gamma \geq \angle \Gamma O A$ *και* $\angle B O \Gamma \geq \angle A O B$, *τότε* $\angle B O \Gamma < \angle \Gamma O A + \angle A O B$.



Σχήμα 18.5: Ανισότητα εδρών τρίεδρης γωνίας.

Απόδειξη. Επιλέγουμε αυθαίρετα τα σημεία Α και Β, και στο επίπεδο ΟΒΓ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΟΒΔ ίσο με το ΟΑΒ. Επιλέγουμε το Γ ώστε να βρίσκεται στην προέκταση της ΒΔ, Σχήμα 18.5. Στα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΔΓ έχουμε την ΟΓ κοινή και ΟΔ = ΟΑ. Από την τριγωνική ανισότητα στο ΑΒΓ έχουμε

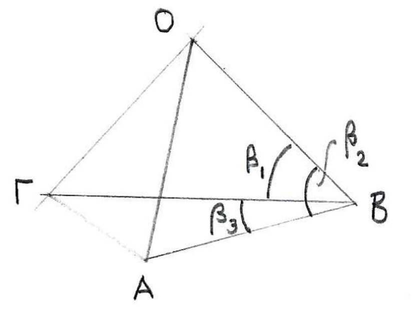
$$|\mathrm{B\Delta}| + |\Delta\Gamma| = |\mathrm{B}\Gamma| < |\mathrm{AB}| + |\mathrm{A}\Gamma|\,.$$

Αλλά ΒΔ = ΒΑ, άρα $|\Delta\Gamma| < |\mathrm{A}\Gamma|$. Από το Θεώρημα 4.16, απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά ΑΓ βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία, $\angle\mathrm{AO}\Gamma > \angle\Delta\mathrm{O}\Gamma$ και

$$\angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AO}\Gamma > \angle\mathrm{AOB} + \angle\Delta\mathrm{O}\Gamma = \angle\mathrm{BO}\Gamma\,.$$

□

Θεώρημα 18.3 *Σε κάθε τρίεδρη γωνία, το άθροισμα των εδρών της είναι μικρότερο από 360 μοίρες.*



Σχῆμα 18.6: 'ϑροισμα εδρών τρίεδρης γωνίας.

Απόδειξη. Από το τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε $\alpha = |\angle\mathrm{BO}\Gamma| = 180 - |\angle\mathrm{OB}\Gamma| - |\angle\mathrm{O}\Gamma\mathrm{B}|$, και παρόμοια για τις β και γ. Άρα

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &= (180 - |\angle\mathrm{OB}\Gamma| - |\angle\mathrm{O}\Gamma\mathrm{B}|) + (180 - |\angle\mathrm{OA}\Gamma| - |\angle\mathrm{O}\Gamma\mathrm{A}|)\\ &\quad +(180 - |\angle\mathrm{OBA}| - |\angle\mathrm{OAB}|)\\ &= 3(180) - (|\angle\mathrm{OB}\Gamma| + |\angle\mathrm{OBA}|) - (|\angle\mathrm{O}\Gamma\mathrm{B}| + |\angle\mathrm{O}\Gamma\mathrm{A}|)\\ &\quad -(|\angle\mathrm{OAB}| + |\angle\mathrm{OA}\Gamma|)\,.\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα στην τρίεδρη γωνία ΒΟΓΑ, Σχήμα 18.6, και έχουμε

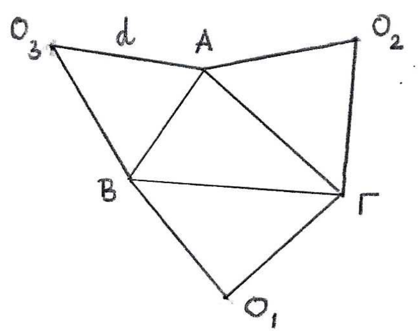
$$|\angle\mathrm{OB}\Gamma| + |\angle\mathrm{OBA}| > |\angle\mathrm{AB}\Gamma|\,,$$

και παρόμοια για τις άλλες γωνίες. Άρα

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 3(180) - (|\angle \mathrm{OB\Gamma}| + |\angle \mathrm{OBA}|) - (|\angle \mathrm{O\Gamma B}| + |\angle \mathrm{O\Gamma A}|) \\ &\quad -(|\angle \mathrm{OAB}| + |\angle \mathrm{OA\Gamma}|) \\ &< 3(180) - (|\angle \mathrm{AB\Gamma}| + |\angle \mathrm{B\Gamma A}| + |\angle \mathrm{\Gamma AB}|) \\ &= 3(180) - 180 = 360\,. \end{aligned}$$

□

Μπορούμε να δείξουμε οτι οι ανισότητες των δύο προηγούμενων θεωρημάτων είναι ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τρίεδρης γωνίας. Πράγματι, εάν κατασκευάσουμε τρία ισοσκελή τρίγωνα με γωνίες στην κορυφή α, β και γ και πλευρές ίσες με d, οι ανισότητες μεταξύ των γωνιών α, β, γ συνεπάγονται οτι οι βάσεις των ισοσκελών τριγώνων σχηματίζουν ένα τρίγωνο ΑΒΓ, και μπορούμε να κατασκευάσουμε το Σχήμα 18.7. Εάν επί πλέον ισχύει $\alpha + \beta + \gamma < 360$, σε κάθε ημίχωρο του επιπέδου αυτού του τριγώνου υπάρχει σημείο Ο τέτοιο ώστε η τρίεδρη γωνία ΟΑΒΓ έχει έδρες α, β, γ.

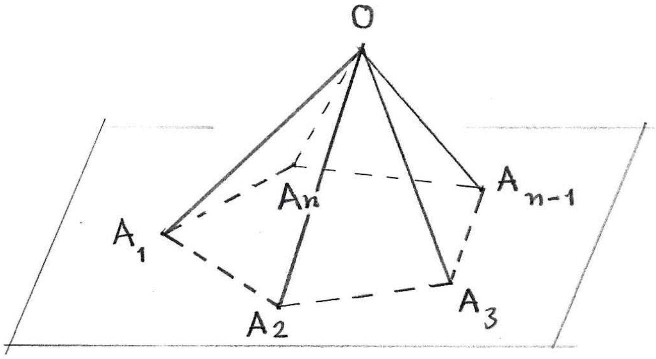


Σχήμα 18.7: Κατασκευή τρίεδρης γωνίας.

Πολυεδρικές γωνίες

Θεωρούμε κυρτό πολύγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n$ στο επίπεδο F, και σημείο Ο έξω από το F. Το στερεό σχήμα που δημιουργείται ενώνοντας το Ο με τις κορυφές A_i του πολυγώνου ονομάζεται **πυραμίδα**.

Οι ημιευθείες OA_1, $\mathrm{OA}_2, \ldots, \mathrm{OA}_n$ ορίζουν μία **(κυρτή) πολυεδρική γωνία** ή **στερεά γωνία**, την οποία συμβολίζουμε $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n$. Οι ημιευθείες OA_1, $\mathrm{OA}_2, \ldots, \mathrm{OA}_n$ είναι οι **ακμές** της πολυεδρικής γωνίας. Οι γωνίες $\mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{OA}_3, \ldots,$ $\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_1$ είναι οι **έδρες** της πολυεδρικής γωνίας. Οι δίεδρες γωνίες που σχηματίζονται στις ακμές μεταξύ των επιπέδων των εδρών, είναι οι **δίεδρες γωνίες** της πολυεδρικής γωνίας.



Σχῆμα 18.8: Πολυεδρική γωνία.

Θεώρημα 18.4 *Για κάθε κυρτή πολυεδρική γωνία, το άθροισμα των μέτρων των εδρών της είναι μικρότερο από 360 μοίρες.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γενικεύει την απόδειξη του Θεωρήματος 18.3. Θεωρούμε επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της πολυεδρικής γωνίας, και σχηματίζει πυραμίδα $\mathrm{OA_1A_2\ldots A}_n$. Από το τρίγωνο $\mathrm{OA_1A_2}$ έχουμε $\alpha_1 = |\angle\mathrm{A_1OA_2}| = 180 - |\angle\mathrm{OA_1A_2}| - |\angle\mathrm{OA_2A_1}|$, και παρόμοια για τις $\alpha_2 = \angle\mathrm{A_2OA_3}, \ldots, \alpha_n = \angle\mathrm{A}_n\mathrm{OA_1}$. Άρα

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= (180 - |\angle\mathrm{OA_1A_2}| - |\angle\mathrm{OA_2A_1}|) \\
&\quad +(180 - |\angle\mathrm{OA_2A_3}| - |\angle\mathrm{OA_3A_2}|) + \cdots \\
&\quad +(180 - |\angle\mathrm{OA}_n\mathrm{A_1}| - |\angle\mathrm{OA_1A}_n|) \\
&= n(180) - (|\angle\mathrm{OA_1A}_n| + |\angle\mathrm{OA_1A_2}|) \\
&\quad -(|\angle\mathrm{OA_2A_1}| + |\angle\mathrm{OA_2A_3}|) - \cdots \\
&\quad -(|\angle\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n-1}| + |\angle\mathrm{OA}_n\mathrm{A_1}|)\,.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 18.2 στην τρίεδρη γωνία $\mathrm{A_1OA}_n\mathrm{A_2}$ και έχουμε

$$|\angle\mathrm{OA_1A}_n| + |\angle\mathrm{OA_1A_2}| > |\angle\mathrm{A}_n\mathrm{A_1A_2}|\,,$$

και παρόμοια για τις άλλες γωνίες. Άρα

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= n(180) - (|\angle \mathrm{OA_1A_n}| + |\angle \mathrm{OA_1A_2}|) \\
&\quad -(|\angle \mathrm{OA_2A_1}| + |\angle \mathrm{OA_2A_3}|) - \cdots \\
&\quad -(|\angle \mathrm{OA_nA_{n-1}}| + |\angle \mathrm{OA_nA_1}|) \\
&< n(180) - (|\angle \mathrm{A_nA_1A_2}| + |\angle \mathrm{A_1A_2A_3}| + \cdots + |\angle \mathrm{A_{n-1}A_nA_1}|) \\
&= n(180) - (n-2)180 = 360\,,
\end{aligned}$$

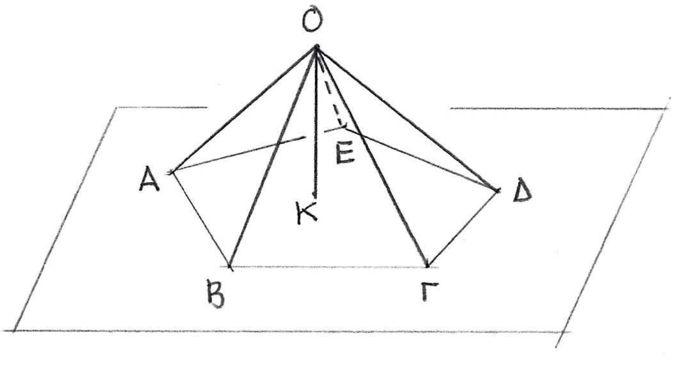
αφού το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου είναι $(n-2)180$.

□

Μία πυραμίδα με τριγωνική βάση ονομάζεται **τετράεδρο**. Κάθε τέσσερα σημεία στο χώρο που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ορίζουν ένα τετράεδρο με αυτά ως κορυφές.

Μία πυραμίδα $\mathrm{OA_1A_2\ldots A_n}$ λέγεται **κανονική** όταν $\mathrm{A_1A_2\ldots A_n}$ είναι κανονικό πολύγωνο και η ευθεία ΟΚ, όπου Κ είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, είναι κάθετη στο επίπεδο του κανονικού πολυγώνου, Σχήμα 18.9.

Η πολυεδρική γωνία στην κορυφή μίας κανονικής πυραμίδας λέγεται **κανονική πολυεδρική γωνία**.



Σχήμα 18.9: Κανονική πυραμίδα.

Πρόταση 18.5 *Μία κανονική πολυεδρική γωνία έχει τις έδρες ίσες και τις δίεδρες γωνίες ίσες.*

Από το Θεώρημα 18.4, κάθε έδρα μίας κανονικής πολυεδρικής γωνίας έχει μέτρο μικρότερο από $\frac{360}{n}$.

Πολύεδρα

Πολύεδρο ονομάζεται ένα στερεό που περιβάλλεται από πεπερασμένο πλήθος επιπέδων και δεν εκτείνεται στο άπειρο, δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ σημείων του είναι φραγμένες. Τα κοινά σημεία του πολυέδρου με τα επίπεδα που το περικλείουν ονομάζονται **έδρες** του πολυέδρου. Τα κοινά σημεία των εδρών ονομάζονται **ακμές** του πολυέδρου. Τα κοινά σημεία των ακμών ονομάζονται **κορυφές** του πολυέδρου.

Σε κάθε ακμή σχηματίζεται μία δίεδρη γωνία του πολυέδρου. Σε κάθε κορυφή σχηματίζεται μία πολυεδρική γωνία του πολυέδρου.

Ένα πολύεδρο λέγεται **κυρτό** όταν για κάθε έδρα του, όλο το πολύεδρο βρίσκεται σε έναν από τους ημιχώρους του επιπέδου της έδρας.

Δύο πολύεδρα είναι ίσα όταν οι αντίστοιχες έδρες τους είναι ίσα πολύγωνα, και οι δίεδρες γωνίες είναι ίσες.

Κανονικά πολύεδρα είναι τα πολύεδρα που έχουν όλες τις έδρες ίσες μεταξύ τους και ίσες με ένα κανονικό πολύγωνο, και όλες τις δίεδρες γωνίες ίσες. Θα δούμε οτι υπάρχουν μόνο 5 διαφορετικά κανονικά πολύεδρα με δεδομένο μήκος ακμής.

Θεώρημα 18.6 *Εάν μία κανονική πολυεδρική γωνία έχει n έδρες, και η γωνία κάθε έδρας είναι ίση με την εσωτερική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου με k πλευρές, τότε τα μόνα δυνατά ζεύγη (n, k) είναι*

$$(3, 3), \quad (3, 4), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 3)\,.$$

Η γωνία κάθε έδρας πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\vartheta = \frac{k-2}{k}180\,, \quad \text{και} \quad \vartheta < \frac{360}{n}\,.$$

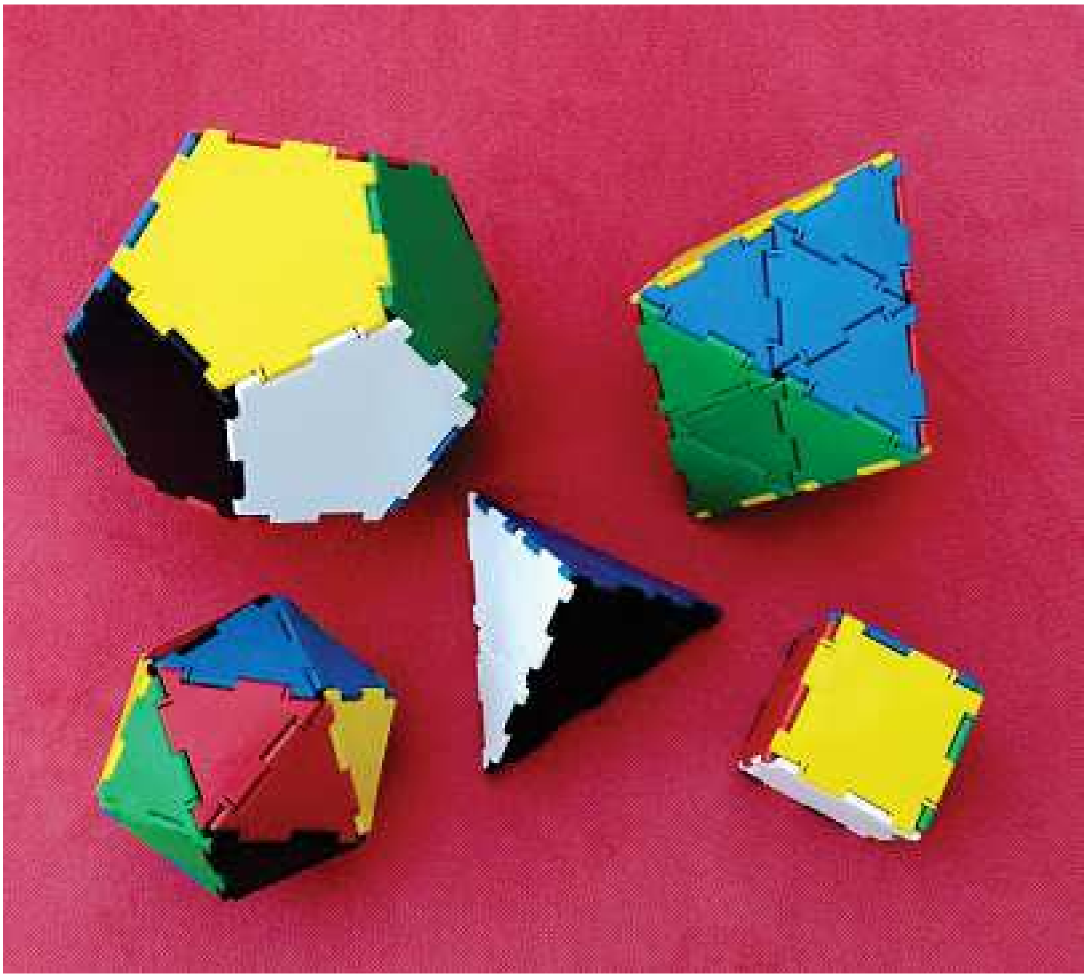
Δηλαδή n και k πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 3, που ικανοποιούν τη σχέση

$$n\left(\frac{k-2}{k}\right) < 2\,.$$

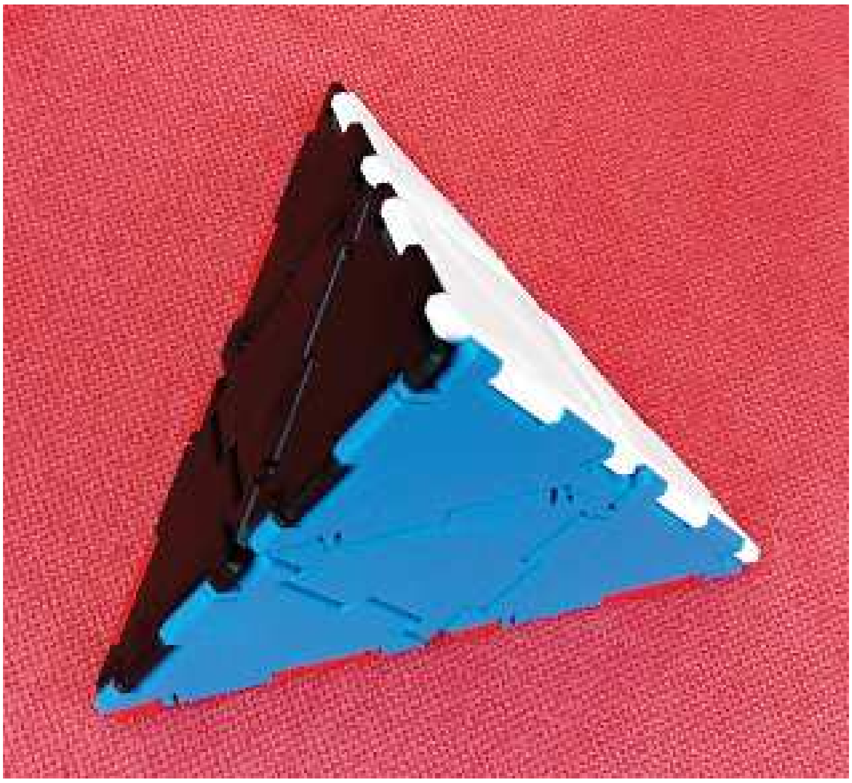
Αφού $\frac{k-2}{k} < \frac{1}{3}$ δεν έχει ακέραιες λύσεις, πρέπει να ισχύει $\frac{2}{n} > \frac{1}{3}$, δηλαδή $n < 6$. Για $n = 3, 4, 5$ οι ακέραιες λύσεις της $\frac{k-2}{k} < \frac{2}{n}$ είναι

$$(3, 3), \quad (3, 4), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 3)\,.$$

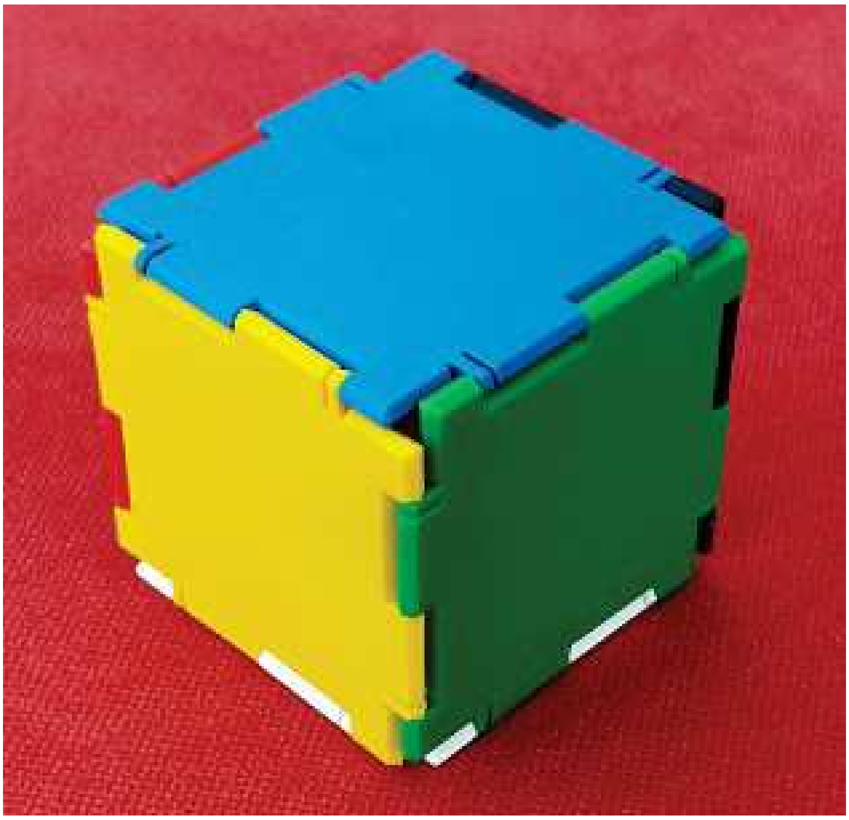
Μπορούμε να δούμε οτι υπάρχουν κανονικά πολύεδρα για κάθε μία από αυτές τις κανονικές πολυεδρικές γωνίες. Στο βιβλίο ιγ′ των Στοιχείων κατασκευάζονται τα πέντε πολύεδρα και αποδεικνύεται οτι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά πολύεδρα.



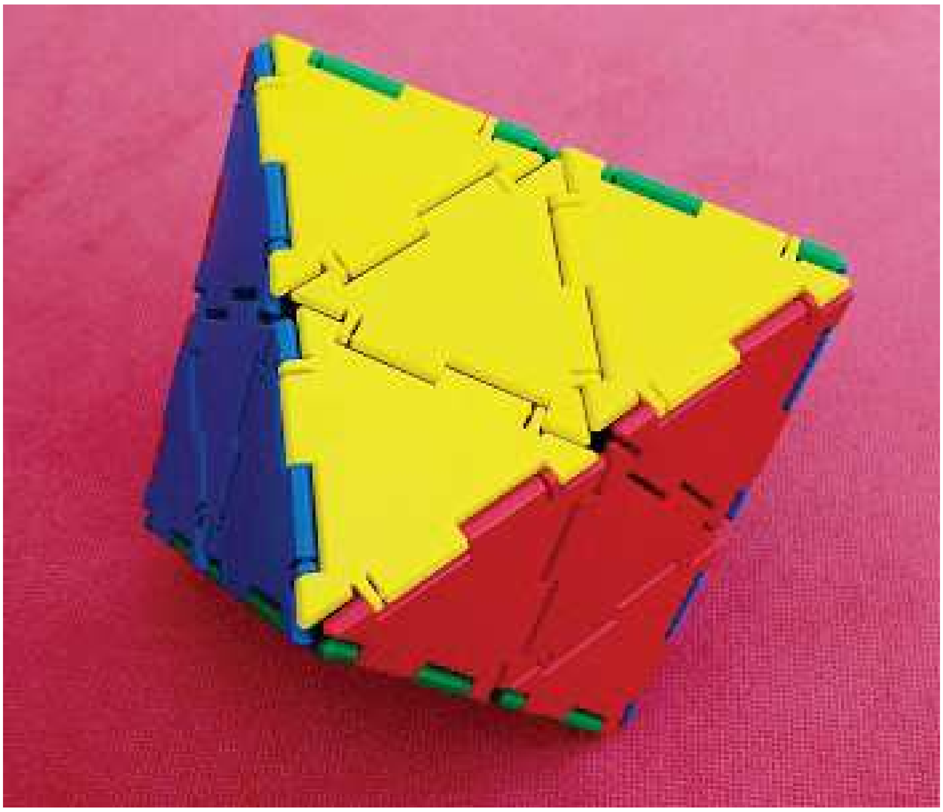
Σχῆμα 18.10: Κανονικά ή πλατωνικά πολύεδρα: δωδεκάεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, τετράεδρο, κύβος.



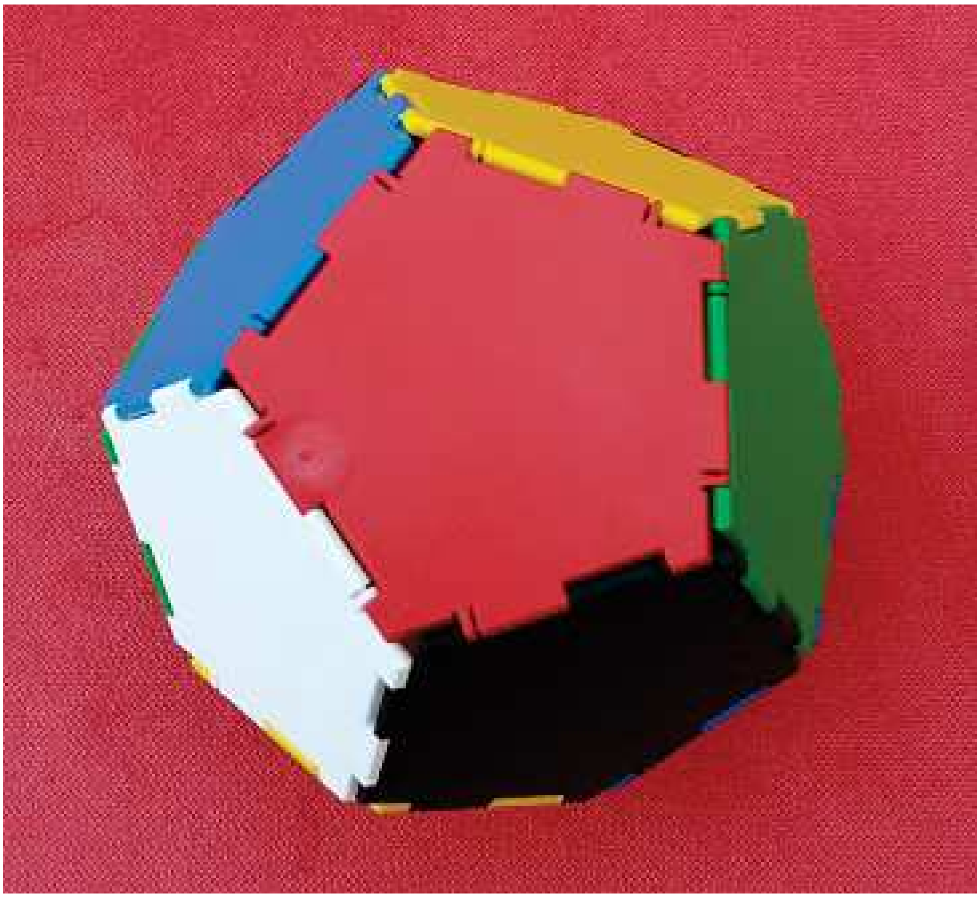
Σχῆμα 18.11: Τετράεδρο.



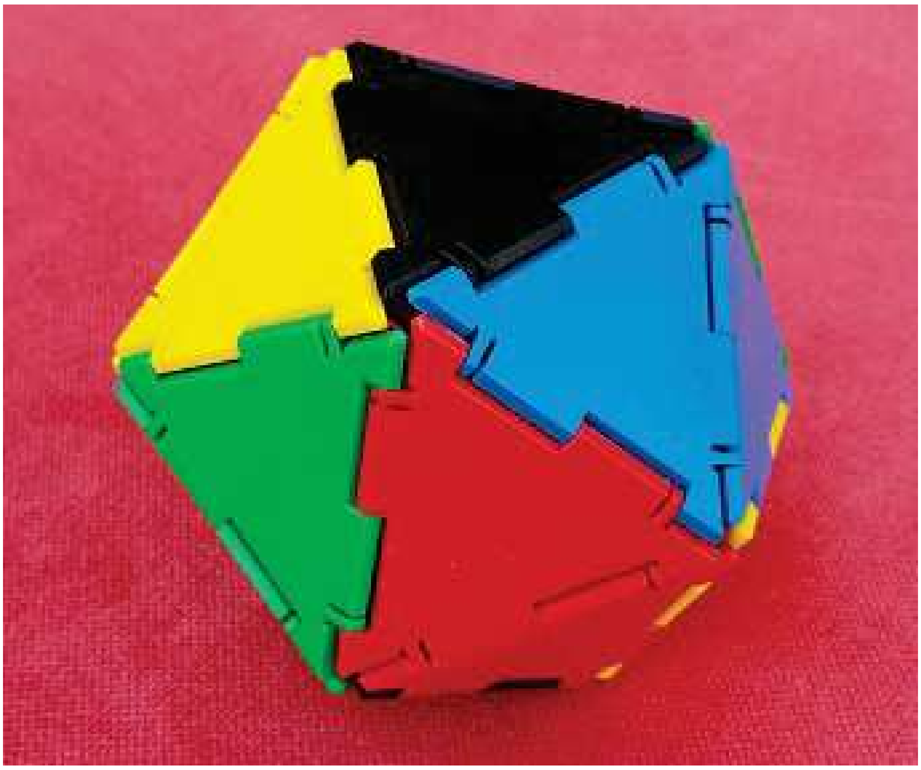
Σχῆμα 18.12: Κύβος.



Σχῆμα 18.13: Οκτάεδρο.



Σχῆμα 18.14: Δωδεκάεδρο.



Σχῆμα 18.15: Εικοσάεδρο.

Κεφάλαιο 19

Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο

Η Γεωμετρία διδάσκεται σε κάθε τάξη του Γυμνασίου, στο πλαίσιο του μαθήματος Μαθηματικών.

Στην Α΄ Γυμνασίου προβλέπονται 41 ώρες διδασκαλίας της Γεωμετρίας, (41% του χρόνου διδασκαλίας των Μαθηματικών). Στη Β΄ Γυμνασίου 44 ώρες διδασκαλίας, (44% του χρόνου) και στη Γ΄ Γυμνασίου 33 ώρες (34% του χρόνου).

Στην Α΄ Γυμνασίου η μελέτη της Γεωμετρίας αρχίζει με τις βασικές έννοιες, τη μέτρηση ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών, ιδιότητες ευθειών και κύκλων. Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς ευθεία, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται τα βασικά σχήματα, τρίγωνα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια.

Στη Γεωμετρία της Α΄ Γυμνασίου δεν εμφανίζονται τυπικές αποδείξεις. Τα προβλήματα αφορούν κυρίως παρατήρηση, σχεδίαση ταξινόμηση ή υπολογισμό. Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχουν άτυπες αποδείξεις, με τον τίτλο ‘‘Σκεφτόμαστε’’.

Στη Β΄ Γυμνασίου αρχικά εξετάζεται το εμβαδόν και η μέτρηση επιφανειών. Στη συνέχεια εισάγονται οι έννοιες της τριγωνομετρίας, η μέτρηση του κύκλου, και τέλος στοιχεία Γεωμετρίας του χώρου, πρίσματα, κύλινδροι, κώνοι και σφαίρα.

Στη Γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου τα περισσότερα συμπεράσματα εξάγονται από γενίκευση παραδειγμάτων. Όμως σε κάποιες εφαρμογές και σε κάποιες ασκήσεις ζητούνται αποδείξεις.

Στην Γ΄ Γυμνασίου σταδιακά εμφανίζονται περισσότερες αποδείξεις, κυρίως ως λύσεις παραδειγμάτων και εφαρμογών. Ο όρος Θεώρημα αποφεύγεται, και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται ως γενικές διαπιστώσεις. Σε αρκετές ασκήσεις ζητείται η απόδειξη ιδιοτήτων.

Δραστηριότητες για το Επίπεδο 2

Σύμφωνα με τη θεωρία van Hiele για τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, η πλειονότητα των μαθητριών και των μαθητών του Γυμνασίου βρίσκονται στο επίπεδο 2, της μη τυπικής παραγωγής. Τελειώνοντας το Δημοτικό έχουν μάθει να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων. Σταδιακά αποκτούν την ικανότητα να προβληματίζονται πάνω στις ιδιότητες, να εξετάζουν τις σχέσεις που διέπουν διάφορες ιδιότητες, και να τις χρησιμοποιούν σε συλλογισμούς της μορφής "εάν ισχύει το Α, τότε θα ισχύει το Β". Μπορούν να παρακολουθούν και να εκτιμούν ένα μη τυπικό παραγωγικό επιχείρημα βασισμένο στα σχήματα και τις ιδιότητές τους, αν και ακόμα δυσκολεύονται να κατασκευάσουν δικές τους αποδείξεις.

Στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο είναι παράλληλα με τη διεύρυνση της γνώσης του αντικειμένου, η προαγωγή του επιπέδου σκέψης των παιδιών, ώστε η πλειονότητά τους να περάσουν από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3 της τυπικής παραγωγής.

Κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία της γεωμετρίας στο επίπεδο 2 έχει η μελέτη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως η κατάταξη των ιδιοτήτων και η διάκριση ανάμεσα σε αναγκαίες και σε επαρκείς προϋποθέσεις για ένα σχήμα ή μία έννοια.

Σιγά σιγά συμπεριλαμβάνεται στις εξηγήσεις η γλώσσα μίας άτυπης παραγωγικής διαδικασίας, όπως ποσοδείκτες (όλα, μερικά, κανένα), συνεπαγωγή (εάν ... τότε..., ... μόνον όταν ...) ή η αντιστροφή κάποιων σχέσεων.

Τα μοντέλα και τα σχήματα χρησιμοποιούνται όχι απλώς για διερεύνηση που οδηγεί σε επαγωγικά συμπεράσματα, αλλά και για να βοηθηθούν να παρακολουθήσουν ένα παραγωγικό επιχείρημα, να διατυπώσουν υποθέσεις ή να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα.

Λίστες ιδιοτήτων

Μία δραστηριότητα που βοηθάει στην μετάβαση στο Επίπεδο 2 είναι να ζητηθεί από ομάδες παιδιών να φτιάξουν μία λίστα με όλες τις πιθανές ιδιότητες που μπορούν να σκεφτούν για ένα συγκεκριμένο σχήμα. Μετά όλη η τάξη μπορεί να συζητήσει για αυτές τις λίστες. Ενδεχομένως θα υπάρξουν προσθήκες ή αντιρρήσεις για κάποιες ιδιότητες.

Ιδιότητες ορθογωνίων

- Τέσσερις πλευρές
- Τέσσερις γωνίες ορθές
- Απέναντι πλευρές ίσες

- Απέναντι πλευρές παράλληλες
- Μία ορθή γωνία
- Απέναντι γωνίες ίσες
- Παρακείμενες πλευρές κάθετες
- Οι διαγώνιες είναι ίσες
- Οι διαγώνιες διχοτομούνται
- Υπάρχει ένας άξονας συμμετρίας
- Υπάρχουν δύο διαφορετικοί άξονες συμμετρίας
- Υπάρχει κέντρο συμμετρίας

Η επόμενη δραστηριότητα είναι να βρεθούν λίστες με τις ελάχιστες ιδιότητες που αρκούν για να εξασφαλίσουν οτι έχουμε το συγκεκριμένο σχήμα, έτσι ώστε αν αφαιρεθεί μία ιδιότητα να μην είναι βέβαιο οτι έχουμε το συγκεκριμένα σχήμα. Για τα περισσότερα σχήματα μπορούν να βρεθούν πολλές διαφορετικές λίστες από ελάχιστες επαρκείς ιδιότητες.

Για να κατασκευάσουν τα παιδιά μία ελάχιστη λίστα ιδιοτήτων πρέπει να κάνουν το συλλογισμό ''εάν ένα σχήμα έχει αυτές τις ιδιότητες, τότε έχει υποχρεωτικά και όλες τις υπόλοιπες''. Κάθε ελάχιστη λίστα δίδει έναν διαφορετικό ορισμό του σχήματος.

Στα τετράπλευρα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαγώνιες, αφού κάθε τύπος τετραπλεύρου μπορεί να οριστεί μοναδικά χρησιμοποιώντας ιδιότητες των διαγωνίων.

Με την κατασκευή των ελαχίστων λιστών τα παιδιά ανακαλύπτουν και τις σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών σχημάτων. Για παράδειγμα, ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν οι διαγώνιες διχοτομούνται, ενώ είναι ορθογώνιο όταν οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα κάθε ορθογώνιο έχει τις ιδιότητες ενός παραλληλογράμμου, αλλά ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να μην έχει τις ιδιότητες ενός ορθογωνίου.

Συνεπαγωγή

Δίδονται στα παιδιά προτάσεις της μορφής

- Εάν είναι ..., τότε είναι επίσης και ...
- Όλα τα ... είναι ...

και πρέπει να αποφασίσουν εάν είναι αληθείς ή να βρουν αντιπαραδείγματα. Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν σχήματα ή μοντέλα.

- Εάν είναι παραλληλόγραμμο, τότε είναι επίσης και ορθογώνιο
- Εάν είναι ορθογώνιο, τότε είναι επίσης και παραλληλόγραμμο
- Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι τετράπλευρα με ίσες διαγώνιες
- Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι τετράπλευρα με διαγώνιες που διχοτομούνται
- Όλα τα τετράπλευρα με διαγώνιες που διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμα

Μη τυπικές αποδείξεις

Σε μαθητές και μαθήτριες του Γυμνασίου μπορούμε να ζητήσουμε να συντάξουν επιχειρήματα βασισμένα στην καθημερινή λογική, εφόσον τους δοθεί η ευκαιρία να διερευνήσουν μία ιδέα και να αποκτήσουν αίσθηση για το περιεχόμενό της.

Δραστηριότητα 19.1 Έχω ένα ορθογώνιο και το χωρίζω σε δύο ίσα μέρη. Τί σχήμα μπορεί να έχουν αυτά τα ίσα μέρη;

Δραστηριότητα 19.2 Με ένα κατάλληλο σχήμα, μπορώ να δώσω μία άτυπη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Δραστηριότητα 19.3 Να εξηγήσω την κατασκευή της διχοτόμου μίας γωνίας με κανόνα και διαβήτη.

Δραστηριότητα 19.4 Να εξηγήσω γιατί το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες.

Κεφάλαιο 20

Η Γεωμετρία στο Λύκειο

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκεται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου, για πενήντα ώρες σε κάθε τάξη.

Στην Α΄ Λυκείου η διδασκαλία επικεντρώεται στις βασικές έννοιες, τα τρίγωνα, τιςιδιότητες παραλλήλων, τα τετράπλευρα και τα εεγγεγραμμένα σε κύκλο σχήματα.

Στη Β΄ Λυκείου διδάσκονται οι αναλογίες, το Θεώρημα του Θαλή, όμοια σχήματα, το Πυθαγόρειο Θεώρμα και οι γενίκευσή του, εμβαδόν πολυγώνων και η μέτρηση κύκλου, ενώ γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στη γεωμετρία του χώρου.

Σύμφωνα με τη θεωρία van Hiele για τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, η πλειονότητα των μαθητριών και των μαθητών των πρώτων τάξεων του Λυκείου περνάνε από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3, της τυπικής παραγωγής. Αυτό σημαίνει οτι αντιλαμβάνονται τις σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ των ιδιοτήτων γεωμετρικών σχημάτων και αρχίζουν να εκτιμούν την ανάγκη απόδειξης αυτών των σχέσεων και ένταξής τους σε ένα ευρύτερο σύστημα.

Στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Λύκειο είναι από τη μία η κατωχύρωση και η διεύρυνση των γεωμετρικών εννοιών που γνωρίζουν οι μαθήτριες και οι μαθητές, και από την άλλη η προαγωγή του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των παιδιών ώστε να αναγνωρίζουν τη σημασία της μαθηματικής αυστηρότητας, την ανάγκη ενός συστήματος συλλογισμού και επιχειρηματολογίας που βασίζεται σε κάποιες σχετικά λίγες υποθέσεις, και οικοδομείται στη βάση της παραγωγικής διαδικασίας. Σε αυτό το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης η απόδειξη καταλαμβάνει κεντρική θέση.

Αναφερόμαστε σε Ευκλείδεια Γεωμετρία, και όχι απλώς σε Γεωμετρία, γιατί το σύστημα που κατασκευάζεται δεν αναφέρεται απλώς στην περιγραφή μίας εξιδανικευμένης μορφής των αντικειμένων που παρατηρούμε στο χώρο. Πλέον βασίζεται σε συγκεκριμένες υποθέσεις, τα αξιώματα, συμπεριλαμβανομένου και του αξιώματος των παραλλήλων που χαρακτηρίζει την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μία πρόταση θεωρείται αληθής μόνο όταν μπορεί να αποδειχθεί από αυτά τα αξιώματα.

Η διδασκαλία της απόδειξης

Η απόδειξη θεωρείται η βάση της μαθηματικής κατανόησης, και είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη, τη θεμελίωση και την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης. Οποιοσδήποτε θέλει να μάθει μαθηματικά, πρέπει να μπορεί να γράφει, ή τουλάχιστον να κατανοεί μία απόδειξη.

Αυτή η ικανότητα είναι σημαντική και πέρα από τα Μαθηματικά, καθώς βοηθάει ένα άτομο να αναπτύξει τη δυνατότητα να κατασκευάζει βάσιμα επιχειρήματα και να αντιμετωπίζει με κριτικό τρόπο τα επιχειρήματα των άλλων.

Μεταξύ πολλών ειδικών στη Διδακτική των Μαθηματικών υπάρχει η άποψη οτι οι μαθηματικές εμπειρίες στο σχολείο πρέπει να προσομοιάζουν προς τις πρακτικές της επιστήμης των Μαθηματικών. Οι μαθήτριες και οι μαθητές θα πρέπει να εμπλακούν σε ''αυθεντικές'' μαθηματικές εμπειρίες, όπου θα υποβάλουν εικασίες και θα τις καταρρίψουν ή θα τις αποδείξουν. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, ένας από τους ρόλους του καθηγητή είναι να δημιουργήσει γνήσιες μαθηματικές κοινότητες στις τάξεις.

Στις περισσότερες χώρες, η Γεωμετρία θεωρείται ο προνομιακός χώρος για την ανάπτυξη αυτών των αντιλήψεων και την εξάσκηση στην κατανόηση και την κατασκευή αποδείξεων. Στα μαθήματα Γεωμετρίας κυρίως χρησιμοποιείται ο τυπικός συλλογισμός και η παραγωγική μέθοδος. Στα μαθήματα Γεωμετρίας είναι φυσιολογικό να αναπτύσσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες εικασίες για τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και αντικειμένων στο περιβάλλον, και να αναζητούν εξηγήσεις βασισμένες σε λογικά επιχειρήματα.

Όμως ο τρόπος διδασκαλίας των αποδείξεων συνήθως δεν ανταποκρίνεται στις προσδοκίες των ειδικών. Αρχικά απαιτείται η αποστήθιση των ορισμών και του συμβολισμού, και στη συνέχεια η καταγραφή των λογικών συνεπαγωγών από τα ''δεδομένα'' προς τα ''ζητούμενα''. Αυτή η διαδικασία δεν υποστηρίζει τις δημιουργικές λειτουργίες της σκέψης που απαιτούνται για την κατασκευή επιχειρημάτων.

Η ''αυθεντική'' μαθηματική εμπειρία αφορά όχι τόσο στην καταγραφή της απόδειξης, αλλά στη διατύπωση της εικασίας και στον προσδιορισμό των ''δεδομένων'', των απαιτούμενων υποθέσεων για να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα. Στη σχολική εμπειρία, συνήθως οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν έχουν την ευκαιρία να προτείνουν εικασίες και να δοκιμάσουν να τις διατυπώσουν σε κατάλληλη μορφή ώστε να τις αποδείξουν.

Δραστηριότητες για τη διδασκαλία της απόδειξης

Θα δούμε κάποια παραδείγματα[1], απλών δραστηριοτήτων που προσπαθούν να φέρουν τα παιδιά σε αυτή τη θέση.

Δραστηριότητα 20.1 Εικάζεται οτι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες. Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο, ονομάστε τις κορυφές του, και διατυπώστε τα ''δεδομένα '' και τα ''ζητούμενα'', ώστε να αποδείξετε την εικασία.

Δραστηριότητα 20.2 Σχεδιάστε το σχήμα που θα χρησιμοποιούσατε για να αποδείξετε την ακόλουθη πρόταση.

> **Πρόταση 20.1** *Εάν $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και M είναι το μέσο του AB, N είναι το μέσο του $\Delta\Gamma$, τότε $M\Delta = NB$.*

Δραστηριότητα 20.3 Από το Θεώρημα βρείτε τα ''δεδομένα '' και τα ''ζητούμενα'', και σχεδιάστε το κατάλληλο σχήμα.

> **Θεώρημα 20.2** *Εάν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.*

Δραστηριότητα 20.4 Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Γ. Ποιές υποθέσεις μπορούν να εξασφαλίσουν οτι ΑΔ είναι ίσο με το ΒΕ; Σχεδιάστε ένα σχήμα που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις.

Δραστηριότητα 20.5 Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από την υπόθεση οτι Ζ, Η είναι σημεία σε απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και ΑΓ, ΖΗ διχοτομούνται. Σχεδιάστε το αντίστοιχο σχήμα.

Δραστηριότητα 20.6 Ποιά βοηθητική γραμμή θα χρησιμοποιούσατε για να αποδείξετε την ακόλουθη Πρόταση;

> **Πρόταση 20.3** *Εάν $AB\Gamma\Delta$ τετράπλευρο με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$, τότε $\angle AB\Gamma = \angle A\Delta\Gamma$.*

'λλες ανάλογες δραστηριότητες ζητούν από τους μαθητές να βρουν κάποιο λάθος σε μία απόδειξη, ή να βρουν από την απόδειξη μία διατύπωση του Θεωρήματος που αποδεινύεται.

Μορφές παρουσίασης της απόδειξης

Στην Ελλάδα ο μόνος τρόπος παρουσίασης αποδείξεων στα σχολικά βιβλία είναι ο παραδοσιακός, σε μορφή παραγράφου. Σε άλλες χώρες χρησιμοποιούνται και άλλες

[1] Βασισμένα στο άρθρο των Cirillo και Herbst, Moving toward more authentic proof in Geometry

μορφές παρουσίασης αποδείξεων, όπως η απόδειξη σε δύο στήλες και η απόδειξη ως διάγραμμα ροής. Αυτές οι μορφές παρουσίασης έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, και ο συνδυασμός τους μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση ενός επιχειρήματος.

Η απόδειξη σε μορφή παραγράφου μοιάζει περισσότερο με μία εξήγηση παρά με μία δομημένη μαθηματική κατασκευή. Αυτό μπορεί να την κάνει πιο οικεία στα παιδιά, αλλά η απουσία δομής μπορεί να είναι και μειονέκτημα. Σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές παραλείπουν την αιτιολόγηση των ισχυρισμών τους και οδηγούνται σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η μορφή παραγράφου φαίνεται πιο αυθεντική, καθώς είναι πλησιέστερα στη μορφή που θα χρησιμοποιούσε μία μαθηματικός για να γράψει μία απόδειξη. Σε κάποιες περιπτώσεις, όπως στην απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, η μορφή της παραγράφου φαίνεται να είναι πιο κατάλληλη από άλλες.

Στην ''απόδειξη σε δύο στήλες'', στη μία στήλη καταγράφονται τα δεδομένα, οι ενδιάμεσοι ισχυρισμοί και το τελικό συμπέρασμα, ενώ στην άλλη στήλη καταγράφονται οι αιτιολογήσεις για κάθε ισχυρισμό. Με αυτό τον τρόπο ο μαθητής ή η μαθήτρια βλέπουν εάν έχουν παραλείψει την αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού. Μειονέκτημα της απόδειξης σε δύο στήλες είναι οτι δίδει την εντύπωση οτι η παραγωγική διαδικασία είναι πιο γραμμική απ' οτι παράγματι συμβαίνει.

Η απόδειξη σε μορφή διαγράμματος ροής χρησιμοποιεί τους ίδιους ισχυρισμούς και τις αιτιολογήσεις με την απόδειξη σε δύο στήλες, αλλά η λογική ροή του επιχειρήματος παριστάνεται με βέλη. Αυτή η μορφή μπορεί να βοηθήσει τις μαθήτριες και τους μαθητές να επικεντρωθούν σε συγκεκριμένα σημεία της απόδειξης για να ανταλλάξουν ιδέες, και να δούν πώς συνδέονται τα τμήματα της απόδειξης για να κατασκευάσουν το συνολικό επιχείρημα.

Η καθηγήτρια των μαθηματικών πρέπει να διαχειρίζεται ενεργά τη δραστηριότητα της τάξης στην προσπάθεια κατασκευής ή κατανόησης μίας απόδειξης. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι η χρήση διαφορετικών μορφών παρουσίασης της απόδειξης. Εάν οι καθηγητές είναι ευέλικτοι ως προς τη μορφή της απόδειξης και ταυτόχρονα δίδουν προσοχή στο περιεχόμενο των επιχειρημάτων, μπορούν να βοηθήσουν πιο αποτελεσματικά τους μαθητές να κατανοούν και να κατασκευάζουν αποδείξεις.

Μέρος Β′

Το Β′ Μέρος περιλαμβάνει Κεφάλαια από τα οποία η διδάσκουσα ή ο διδάσκων μπορεί να επιλέξει, εάν το επιτρέπει ο χρόνος.

Κεφάλαιο 21

Συμμετρίες ταινιών και πλακοστρώσεων

Συμμετρίες ταινιών

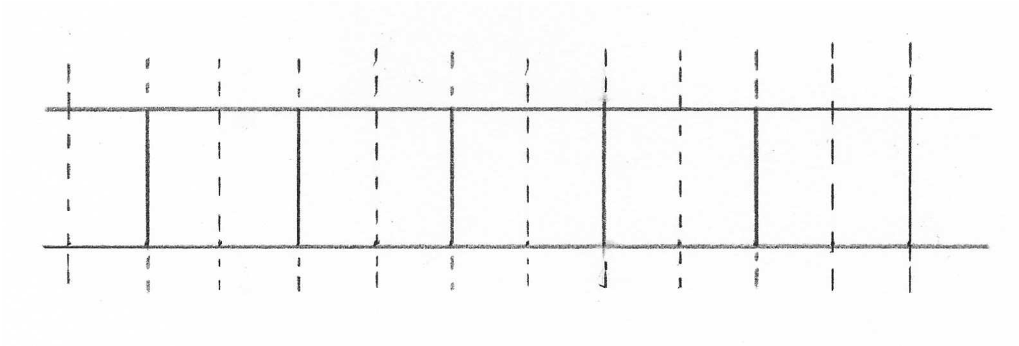
Μεταφορές και ολισθανακλάσεις δεν μπορούν να εμφανίζονται ως συμμετρίες σχημάτων πεπερασμένου μήκους. Είδαμε στα Σχήματα 12.9 και 12.17 παραδείγματα ταινιών που έχουν συμμετρία ως προς μία μεταφορά ή μία ολισθανάκλαση.

Η απλή ταινία αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (τη βασική μονάδα μεταφοράς) και τις εικόνες του από μεταφορές σε μία διεύθυνση, κατά πολλαπλάσιο του μήκους της βάσης του ορθογωνίου. Η ομάδα συμμετριών της απλής ταινίας αποτελείται από όλες τις συμμετρίες του ορθογωνίου, και όλες τις συνθέσεις τέτοιων ισομετριών με τις μεταφορές κατά μήκος του άξονα της ταινίας. Εκτός από τις μεταφορές, περιλαμβάνει την ανάκλαση στον άξονα ε της ταινίας, ανακλάσεις σε άξονες κάθετους στην ε, και περιστροφές κατά 180, με κέντρα τα σημεία τομής των κάθετων αξόνων με την ε. Περιέχει επίσης ολισθανακλάσεις που προκύπτουν από τη σύνθεση των μεταφορών με την ανάκλαση στην ε.

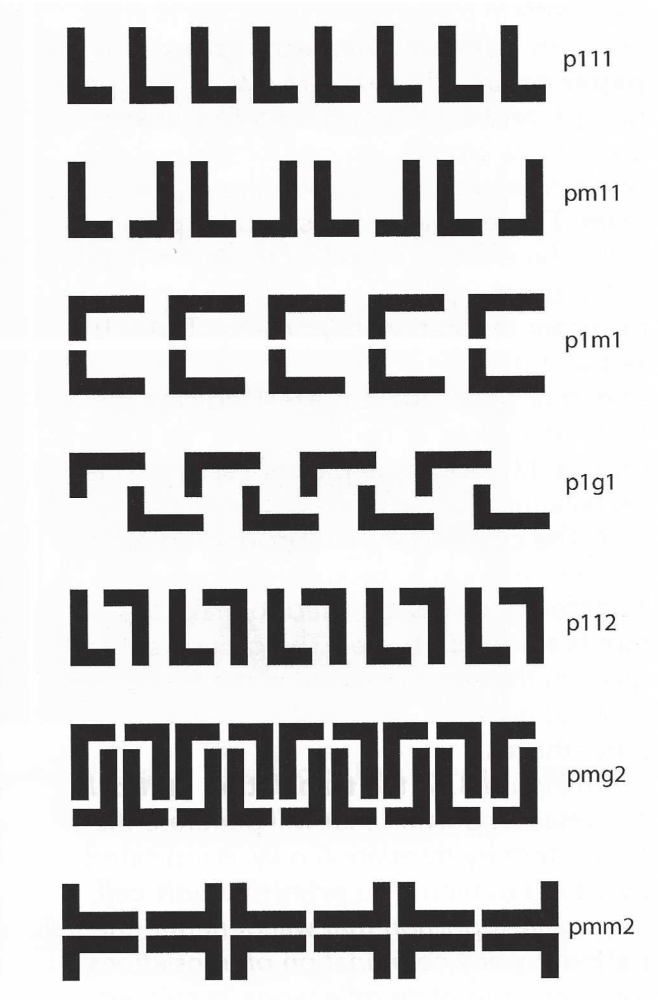
Προσθέτοντας ‘‘διακοσμήσεις’’ στις ταινίες, κατασκευάζουμε σχήματα με διάφορες ομάδες συμμετρίας. Αποδεικνύεται οτι υπάρχουν ακριβώς 7 διαφορετικές ομάδες συμμετριών ταινιών. Στο Σχήμα 21.2 έχουμε παραδείγματα ταινιών που παρουσιάζουν κάθε μία από τις επτά ομάδες συμμετρίας, με το συμβολικό τους όνομα σύμφωνα με το διεθνές σύστημα συμβολισμού.

Η ομάδα p111 περιλαμβάνει μόνο μεταφορές κατά μήκος του άξονα της ταινίας. Η βασική μονάδα μεταφοράς δεν έχει άλλες συμμετρίες.

Η ομάδα pm11 περιλαμβάνει επί πλέον ανακλάσεις σε ευθείες κάθετες στον άξονα της ταινίας. Η μόνη συμμετρία της βασικής μονάδας μεταφοράς είναι ανάκλαση σε άξονα κάθετο προς τη διεύθυνση μεταφοράς.



Σχῆμα 21.1: Οι συμμετρίες της απλής ταινίας.



Σχῆμα 21.2: Οι επτά ομάδες συμμετρίας ταινιών.

Η ομάδα p1m1 περιλαμβάνει μία ανάκλαση με άξονα κατά μήκος της ταινίας, και μεταφορά στον ίδιο άξονα. Η μόνη συμμετρία της βασικής μονάδας μεταφοράς είναι ανάκλαση στον άξονα της μεταφοράς.

Η ομάδα p1g1 περιλαμβάνει ολισθανακλάσεις με άξονα κατά μήκος της ταινίας, και μεταφορές που είναι συνθέσεις τέτοιων ολισθανακλάσεων, αλλά δεν περιλαμβάνει ανακλάσεις ή περιστροφές.

Η ομάδα p112 περιλαμβάνει περιστροφές κατά 180 μοίρες με κέντρα κατά μήκος της ταινίας, και μεταφορές που είναι συνθέσεις τέτοιων περιστροφών, αλλά δεν περιλαμβάνει ανακλάσεις ή ολισθανακλάσεις. Η μόνη συμμετρία της βασικής μονάδας μεταφοράς είναι συμμετρία ως προς κέντρο.

Η ομάδα pmg2 περιλαμβάνει ανακλάσεις σε άξονα κάθετο στον άξονα της ταινίας, περιστροφές κατά 180 μοίρες με κέντρα κατά μήκος της ταινίας και ολισθανακλάσεις με άξονα κατά μήκος της ταινίας, καθώς και μεταφορές που είναι συνθέσεις τέτοιων ισομετριών.

Η ομάδα pmm2 περιλαμβάνει μία ανάκλαση με άξονα κατά μήκος της ταινίας και ανακλάσεις σε άξονα κάθετο στον άξονα της ταινίας. Επίσης περιλαμβάνει περιστροφές κατά 180 μοίρες με κέντρα κατά μήκος της ταινίας, μεταφορές και ολισθανακλάσεις που είναι συνθέσεις τέτοιων περιστροφών. Η βασική μονάδα μεταφοράς έχει όλες τις συμμετρίες ενός ορθογωνίου.

Πλακοστρώσεις του επιπέδου

Μία **πλακόστρωση** του επιπέδου είναι ένα σχήμα που καλύπτει όλο το επίπεδο και έχει πολλές συμμετρίες. Μία **κανονική πλακόστρωση** του επιπέδου αποτελείται από ίσα κανονικά πολύγωνα που καλύπτουν όλο το επίπεδο. Το γεγονός οτι στο ευκλείδειο επίπεδο όλα τα τρίγωνα έχουν σταθερό άθροισμα γωνιών, περιορίζει πολύ τις κανονικές πλακοστρώσεις: υπάρχουν μόνο τρεις.

Ας υποθέσουμε οτι θέλουμε να καλύψουμε το επίπεδο με κανονικά ν-γωνα. Γνωρίζουμε οτι το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι $(\nu-2)180$. Αφού σε ένα κανονικό πολύγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες, κάθε μία είναι ίση με $\frac{(\nu-2)180}{\nu}$. Για να καλυφθεί όλο το επίπεδο από τα κανονικά ν-γωνα, πρέπει οι γωνίες των ν-γώνων να ταιριάζουν γύρω από μία κορυφή της πλακόστρωσης χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Δηλαδή το άθροισμα των γωνιών που ταιριάζουν γύρω από μία κορυφή της πλακόστρωσης πρέπει να είναι ίσο με 360. Συμπεραίνουμε οτι εάν ο αριθμός των ν-γώνων που συναντώνται σε μία κορυφή είναι k, τότε ο k και ο ν πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $k\,\frac{\nu-2}{\nu}=2$. Άρα $k=\frac{2\nu}{\nu-2}$, και τόσο ο ν όσο και ο k πρέπει να είναι ακέραιοι. Ας δούμε τι δυνατότητες υπάρχουν.

Για $\nu=3$, $\frac{2\nu}{\nu-2}=6$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 6 τρίγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

Για $\nu = 4$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = 4$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με τετράγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 4 τετράγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

Για $\nu = 5$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = \frac{10}{3}$ που δεν είναι ακέραιος. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά πεντάγωνα.

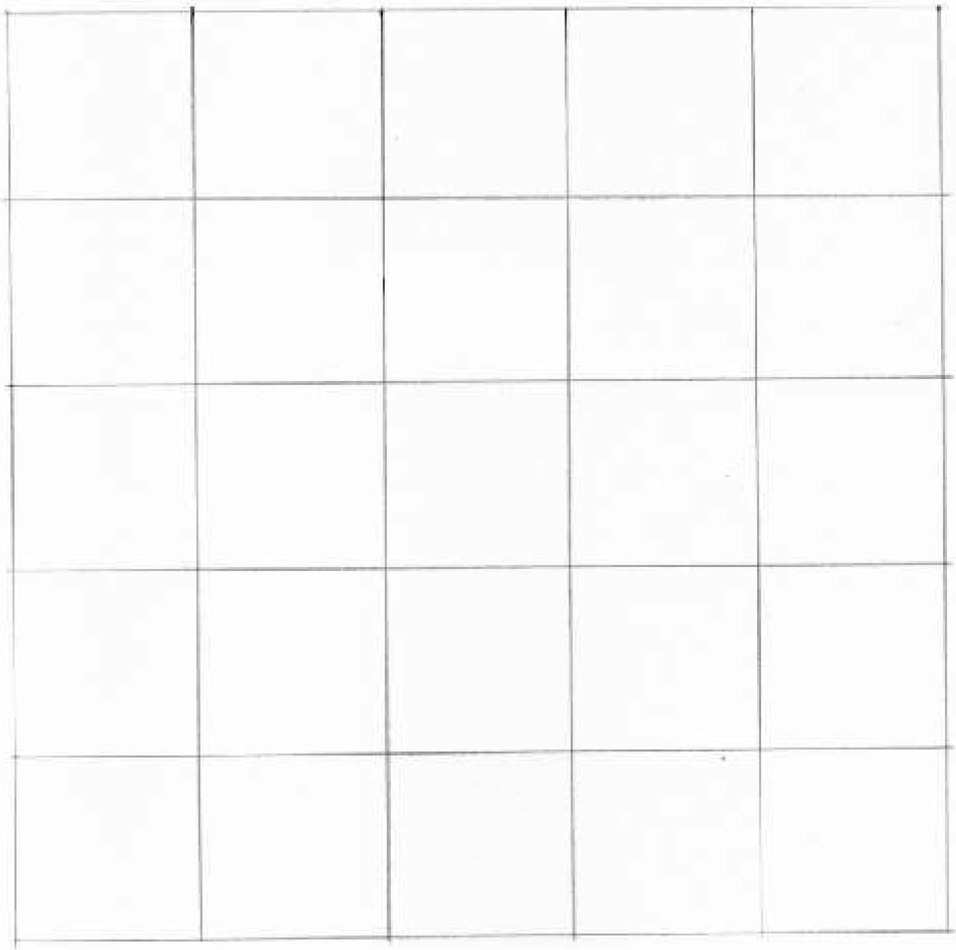
Για $\nu = 6$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = 3$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά εξάγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 3 εξάγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

Για $\nu = 7$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = \frac{14}{5}$. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά επτάγωνα. Βλέπουμε οτι για $\nu > 6$, έχουμε $\frac{2\nu}{\nu-2} < 3$, ενώ σε κάθε περίπτωση $\frac{2\nu}{\nu-2} > 2$. Συμπεραίνουμε οτι δεν υπάρχει ακέραιος ίσος με $\frac{2\nu}{\nu-2}$ για $\nu > 6$.

Καταλήγουμε οτι υπάρχουν μόνον τρεις κανονικές πλακοστρώσεις του επιπέδου, από τρίγωνα, τετράγωνα και εξάγωνα.

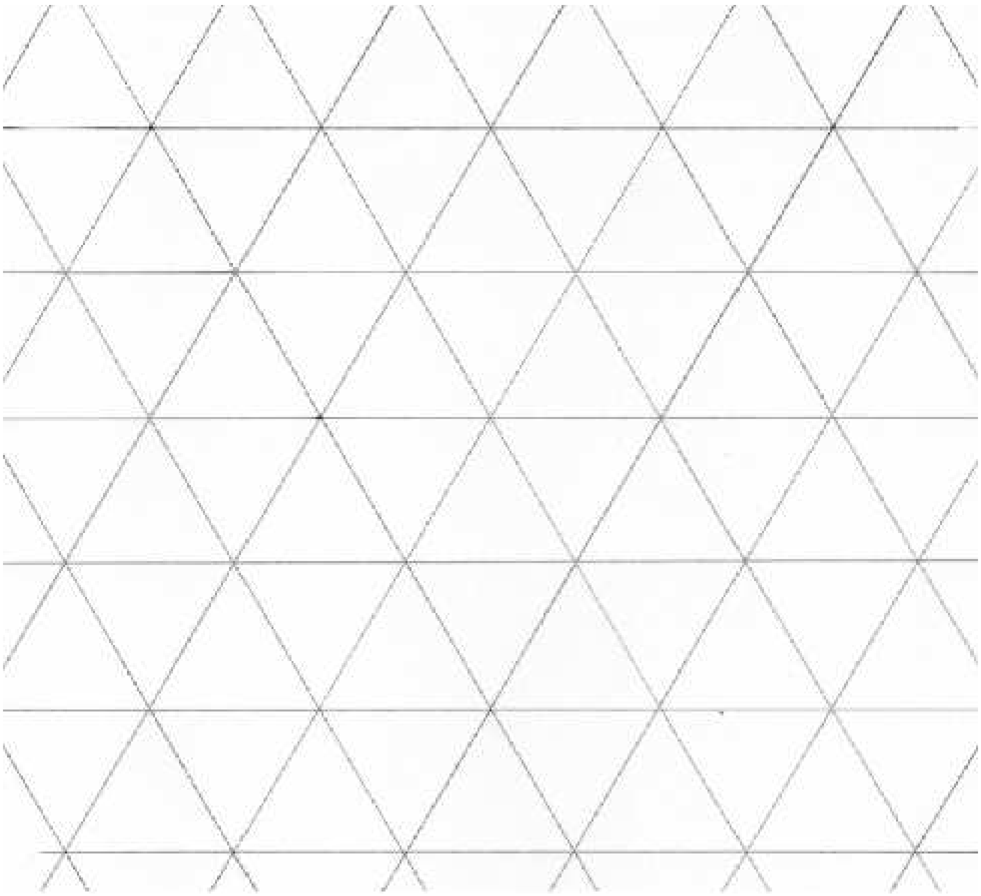
Οι συμμετρίες των κανονικών πλακοστρώσεων είναι αρκετές ώστε να μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πολύγωνο σε κάθε άλλο με μία συμμετρία.

Αυτό είναι πολύ εύκολο για την πλακόστρωση με τετράγωνα: οριζόντιες και κατακόρυφες μεταφορές (ή γενικότερα μεταφορές παράλληλες με τις πλευρές των τετραγώνων) είναι αρκετές για να μετακινήσουμε ένα τετράγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.



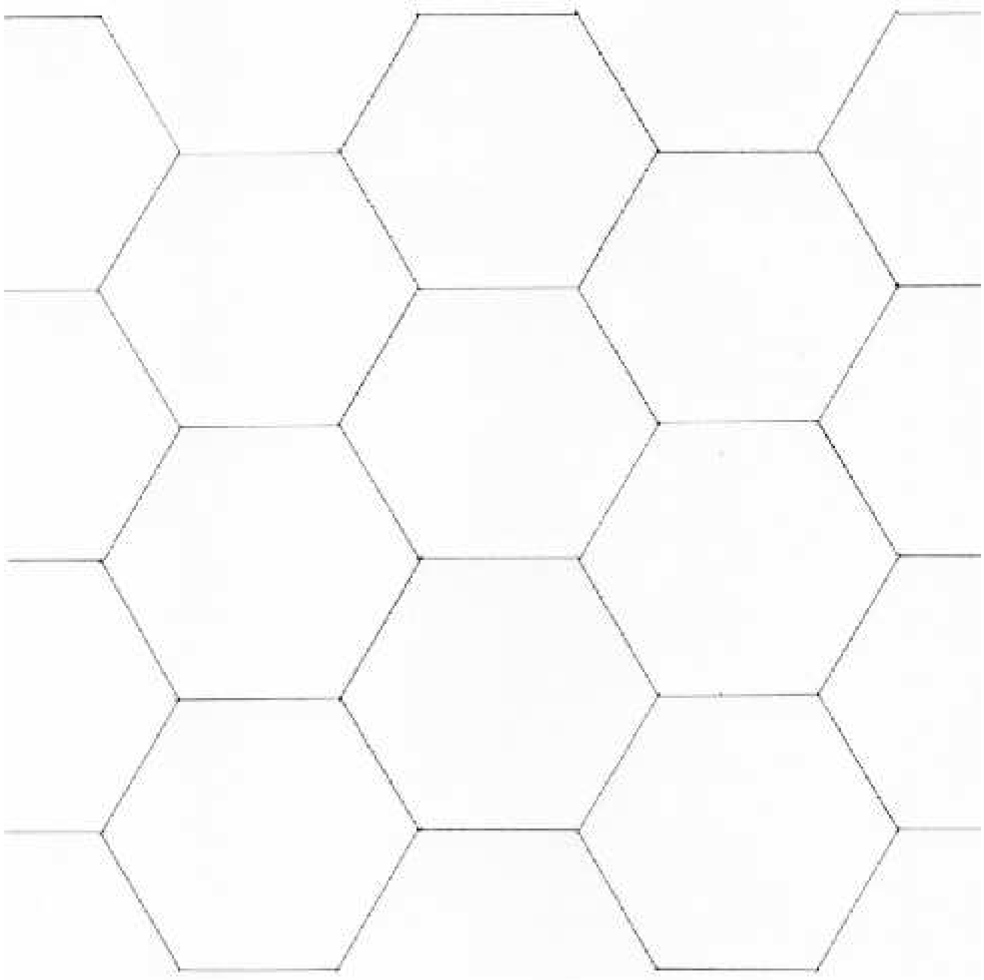
Σχῆμα 21.3: Πλακόστρωση με τετράγωνα.

Για την πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα δεν είναι τόσο απλό. Ας χρωματίσουμε τα τρίγωνα της πλακόστρωσης, όπως στο Σχήμα 21.4 ανάλογα με το αν ''δείχνουν πάνω ή κάτω''. Μεταφορές παράλληλες με τις πλευρές των τριγώνων μπορούν να πάνε κάθε τρίγωνο σε οποιοδήποτε τρίγωνο του ιδίου χρώματος, αλλά δεν μπορούν να το πάνε σε τρίγωνο του άλλου χρώματος. Το ίδιο ισχύει για τις περιστροφές κατά 120^o γύρω από το κέντρο ενός τριγώνου. Όμως περιστροφές κατά 60^o γύρω από μία κορυφή απεικονίζουν τα τρίγωνα του ενός χρώματος σε τρίγωνα του άλλου χρώματος. Συνθέτοντας μεταφορές παράλληλες με τις πλευρές του τριγώνου και περιστροφές γύρω από μία κορυφή μπορούμε να μετακινήσουμε ένα τρίγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.



Σχῆμα 21.4: Πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα.

Για την πλακόστρωση με κανονικά εξάγωνα μεταφορές κάθετες στις πλευρές των εξαγώνων είναι αρκετές για να μετακινήσουμε ένα εξάγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.

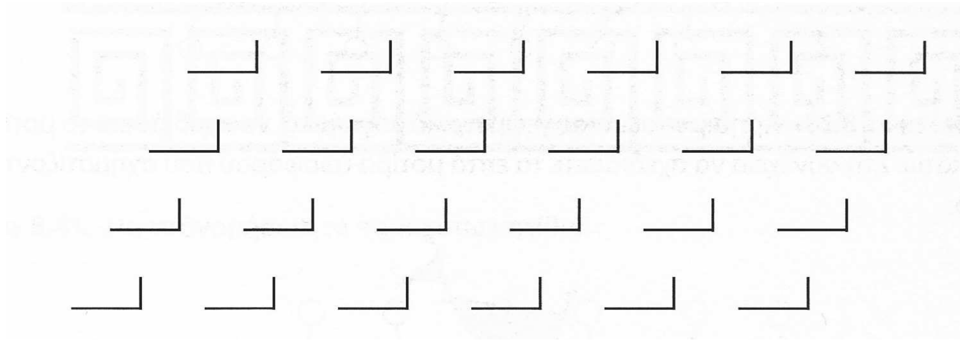


Σχῆμα 21.5: Πλακόστρωση με εξάγωνα.

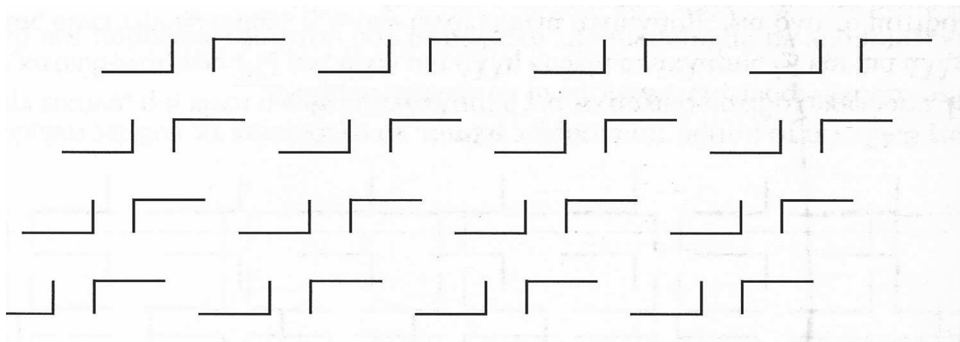
Θεώρημα 21.1 *Η ομάδα συμμετρίας μίας πλακόστρωσης του επιπέδου δεν μπορεί να περιλαμβάνει περιστροφές με γωνία άλλη από* 60, 90, 120 *ή* 180 *μοίρες.*

Προσθέτωντας ''διακόσμηση'' στα κανονικά πολύγωνα των τριών βασικών πλακοστρώσεων, παίρνουμε άλλες πλακοστρώσεις με λιγότερη συμμετρία. Οι ομάδες συμμετρίας των πλακοστρώσεων του επιπέδου έχουν ταξινομηθεί. Υπάρχουν 17 διαφορετικές ομάδες. Θα δούμε κάποιες από αυτές.

Σε κάθε περίπτωση, η βασική μονάδα ως προς τις μεταφορές είναι ένα τετράγωνο, τρίγωνο ή εξάγωνο. Εάν υπάρχουν περισσότερες συμμετρίες, το πολύγωνο μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μικρότερα σχήματα που αποτελούν τη βασική μονάδα της οποίας οι εικόνες από όλα τα στοιχεία της ομάδας συμμετρίας καλύπτουν το επίπεδο.



Σχήμα 21.6: Πλακόστρωση με συμμετρία p111.



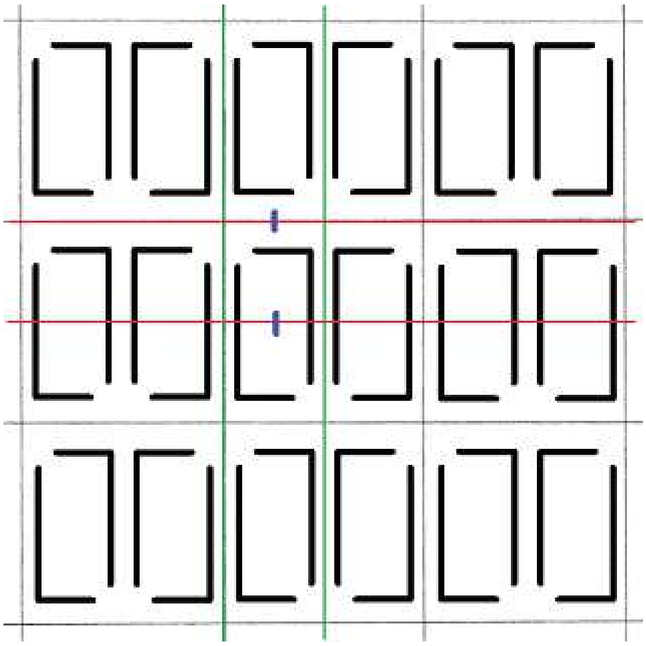
Σχήμα 21.7: Πλακόστρωση με συμμετρία p211.

Ασκήσεις

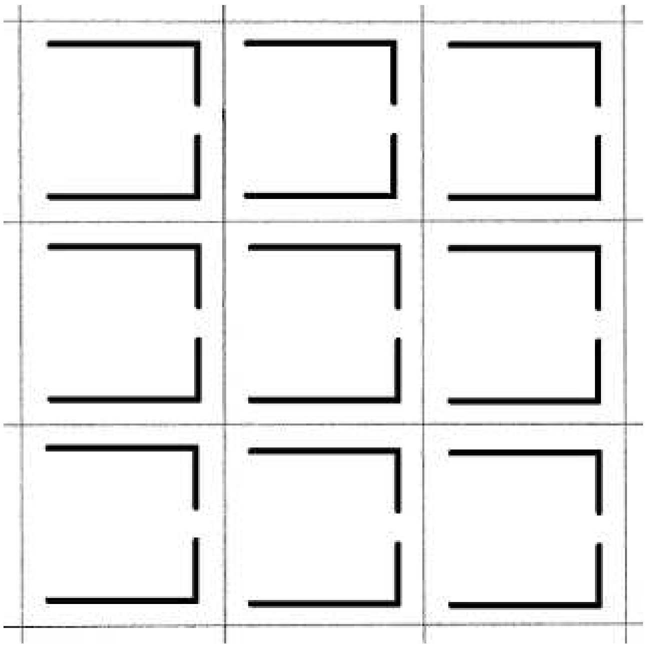
Ασκηση 21.1 Στο Σχήμα 21.8 έχουμε την πλακόστρωση με σύμβολο p2mg. Η βασική μονάδα μεταφοράς είναι το τετράγωνο στο κέντρο του σχήματος. Έχουμε σημειώσει δύο άξονες ανάκλασης της πλακόστρωσης με πράσινο, δύο άξονες της ολισθανάκλασης της πλακόστρωσης με κόκκινο, και δύο κέντρα συμμετρίας. Εξετάστε το Σχήμα, για να βεβαιωθείτε οτι καταλαβαίνετε ποιές είναι οι αντίστοιχες ισομετρίες. Υπάρχουν άλλοι τέτοιοι άξονες και κέντρα συμμετρίας που τέμνουν τη βασική μονάδα μεταφοράς;

Ασκηση 21.2 Σχεδιάστε στο Σχήμα 21.9 τη βασική μονάδα μεταφοράς. Βρείτε τους άξονες ανάκλασης που τέμνονται με τη βασική μονάδα μεταφοράς. Υπάρχουν κέντρα συμμετρίας και άξονες ολισθανάκλασης στο σχήμα; Εάν υπάρχουν, βρείτε όσα τέμνονται με τη βασική μονάδα μεταφοράς.

Ασκηση 21.3 Σχεδιάστε στο Σχήμα 21.10 τη βασική μονάδα μεταφοράς. Βρείτε τους άξονες ολισθανάκλασης που τέμνονται με τη βασική μονάδα μεταφοράς. Υπάρ-

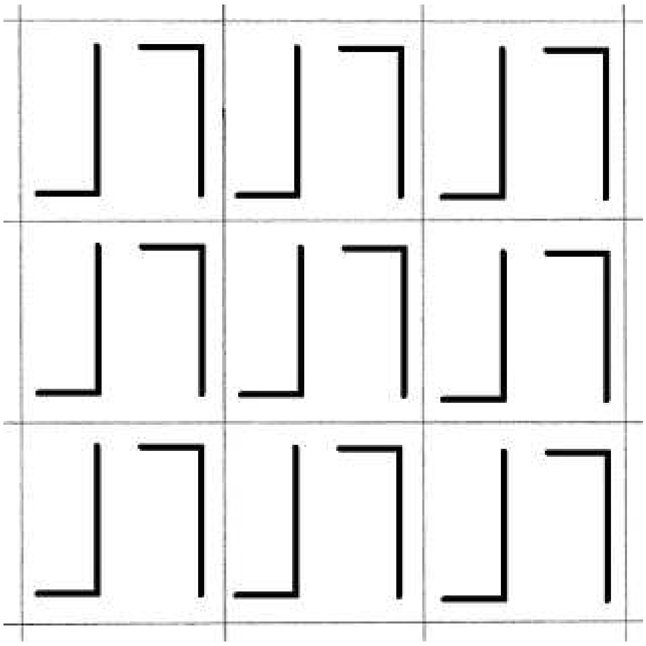


Σχῆμα 21.8: Πλακόστρωση με ομάδα p2mg.



Σχῆμα 21.9: Πλακόστρωση με ομάδα p1m1.

χουν κέντρα συμμετρίας και άξονες ανάκλασης στο σχήμα; Εάν υπάρχουν, βρείτε όσα τέμνονται με τη βασική μονάδα μεταφοράς.



Σχῆμα 21.10: Πλακόστρωση με ομάδα p1g1.

Κεφάλαιο 22

Κάποια επώνυμα Θεωρήματα

Το Θεώρημα του Πάππου

Θεώρημα 22.1 (Θεώρημα Πάππου) *Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε αυθαίρετα παραλληλόγραμμα ΑΒΙΖ και ΑΓΗΘ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΙΖ και ΗΘ μέχρι το σημείο τομής τους Δ. Στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΓΜΚ τέτοιο ώστε ΒΚ είναι παράλληλη και ίση με τη ΔΑ. Τότε το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων ΑΒΙΖ και ΑΓΗΘ είναι ίσο με το εμβαδόν του ΒΓΜΚ.*

Απόδειξη. Προεκτείνουμε τη ΔΑ ώστε να χωρίσει το παραλληλόγραμμο ΒΓΜΚ σε δύο παραλληλόγραμμα, ΒΝΛΚ και ΝΓΜΛ. Αλλά εμβ (ΒΝΛΚ) = εμβ (ΒΕΔΑ), αφού έχουν ίσες βάσεις ΒΚ = ΔΑ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Επίσης εμβ (ΒΕΔΑ) = εμβ (ΑΒΙΖ) αφού έχουν την ίδια βάση ΑΒ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Άρα εμβ (ΒΝΛΚ) = εμβ (ΑΒΙΖ). Παρόμοια εμβ (ΓΜΛΝ) = εμβ (ΑΓΞΔ) = εμβ (ΑΓΗΘ). Συνεπώς

$$\text{εμβ}\,(\mathrm{ΒΓΜΚ}) = \text{εμβ}\,(\mathrm{ΒΝΛΚ}) + \text{εμβ}\,(\mathrm{ΓΜΛΝ}) = \text{εμβ}\,(\mathrm{ΑΒΙΖ}) + \text{εμβ}\,(\mathrm{ΑΓΗΘ})\,.$$

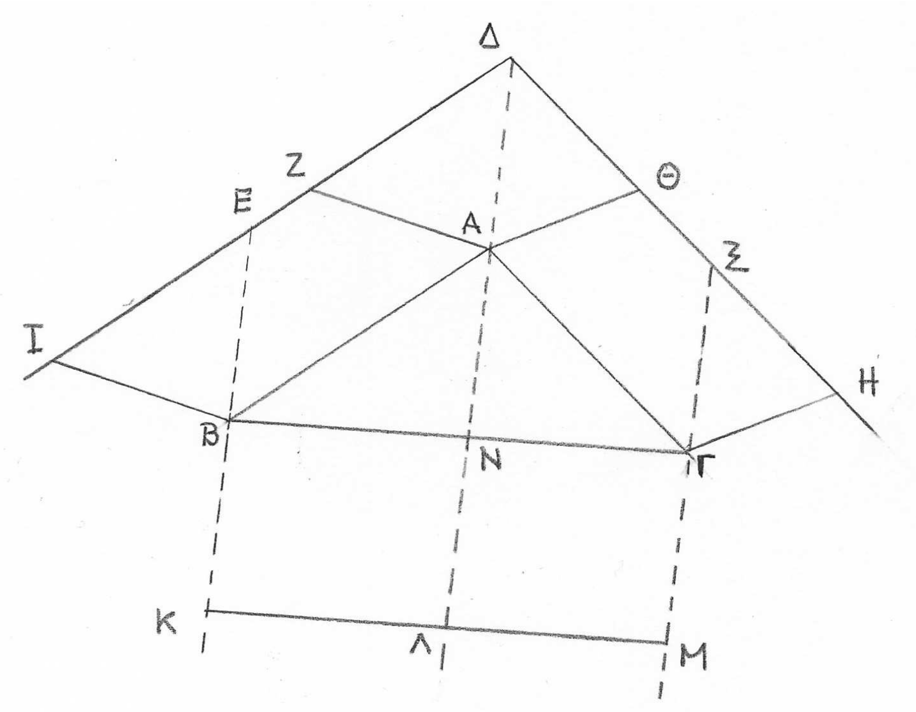
□

Απολλώνιοι κύκλοι

Θεώρημα 22.2 *Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB και θετικό αριθμό $\kappa \neq 1$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία $\dfrac{AX}{BX} = \kappa$ είναι κύκλος με κέντρο στην ευθεία AB, που ονομάζεται κύκλος του Απολλώνιου ως προς λόγο κ.*

Η ακτίνα του κύκλου δίδεται από

$$r = \frac{\kappa}{|1-\kappa^2|}|AB|\,.$$



Σχῆμα 22.1: Θεώρημα Πάππου.

Οι κύκλοι του Απολλώνιου για λόγους κ και $\frac{1}{\kappa}$ έχουν ίσες ακτίνες και βρίσκονται συμμετρικά ως προς τη μεσοκάθετο του AB.

Για την απόδειξη και άλλες ιδιότητες των Απολλώνιων κύκλων, δείτε τις Σημειώσεις του μαθήματος ''Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί''.

Πρόβλημα Απολλώνιου

Ο Απολλώνιος, στο έργο του ''Επαφαί'' μελετάει το πρόβλημα της εύρεσης όλων των κύκλων που εφάπτονται σε (ή διέρχονται από) τρία αντικείμενα, τα οποία είναι κύκλοι, ευθείες ή σημεία.

Ανάλογα με το είδος των αντικειμένων προκύπτουν 10 κύριες κατηγορίες του προβλήματος,

α΄. Τρεις κύκλοι

β΄. Δύο κύκλοι και μία ευθεία

γ΄. Δύο κύκλοι και ένα σημείο

δ΄. Ένας κύκλος και δύο ευθείες

ε΄. Ένας κύκλος, μία ευθεία και ένα σημείο

ϛ΄. Ένας κύκλος και δύο σημεία

ζ΄. Τρεις ευθείες

η΄. Δύο ευθείες και ένα σημείο

ϑ΄. Μία ευθεία και δύο σημεία

ι΄. Τρία σημεία

Κάθε κατηγορία περιλαμβάνει διαφορετικές περιπτώσεις, ανάλογα με τη σχετική θέση των τριών αντικειμένων: οι κύκλοι ή οι ευθείες μπορεί να τέμνονται ή να εφάπτονται, οι κύκλοι μπορεί να βρίσκονται εξωτερικά ή εσωτερικά ο ένας του άλλου, κλπ.

Έχουμε ήδη εξετάσει την περίπτωση τριών σημείων, όπου υπάρχει μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα τρία σημεία, και την περίπτωση τριών ευθειών που σχηματίζουν τρίγωνο, όπου υπάρχουν συνολικά 4 κύκλοι, ο εγγεγραμμένος και οι τρεις παρεγγεγραμμένοι στο τρίγωνο.

Κάποιες άλλες περιπτώσεις:

Δύο σημεία και μία ευθεία: υπάρχουν δύο, ένας ή κανένας κύκλος, ανάλογα με τη θέση των σημείων.

Δύο ευθείες και ένα σημείο: υπάρχουν δύο λύσεις.

Δύο σημεία και ένας κύκλος: υπάρχουν δύο, ένας ή κανένας κύκλος

Ένας κύκλος, μία ευθεία και ένα σημείο: υπάρχουν τέσσερεις κύκλοι.

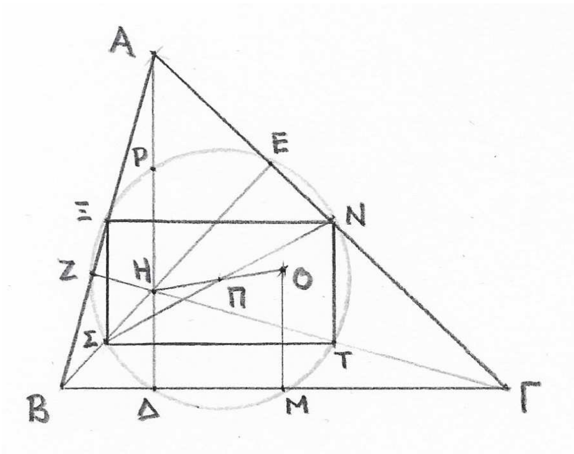
Δύο κύκλοι και ένα σημείο: υπάρχουν μέχρι τέσσερεις κύκλοι.

Στις υπόλοιπες κατηγορίες, ένας κύκλος και δύο ευθείες, δύο κύκλοι και μία ευθεία ή τρεις κύκλοι: υπάρχουν μέχρι οκτώ κύκλοι.

Ο κύκλος του Euler

Θεώρημα 22.3 (Κύκλος Euler, Κύκλος των εννέα σημείων.) *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, με κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου Ο και ορθόκεντρο Η. Ο κύκλος με κέντρο το μέσο του ΟΗ και ακτίνα το μισό της ακτίνας ΟΑ του περιγεγραμμένου κύκλου, διέρχεται από τα μέσα των πλευρών Μ, Ν, Ξ, από τα ίχνη των υψών Δ, Ε, Ζ και από τα μέσα Ρ, Σ, Τ των τμημάτων από το ορθόκεντρο στις κορυφές του τριγώνου.*

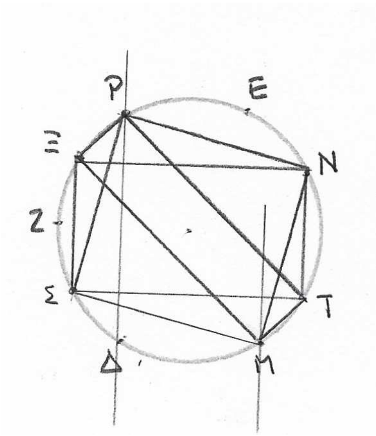
Απόδειξη. Θα δείξουμε οτι ΣΤΝΞ είναι ορθογώνιο. Το ΣΞ ενώνει τα μέσα των ΒΑ και ΒΗ, άρα είναι παράλληλο στο ΑΗ και ίσο με το μισό του ΑΗ. Το ΝΤ ενώνει τα μέσα των ΓΑ και ΓΗ, άρα είναι παράλληλο στο ΑΗ και ίσο με το μισό του ΑΗ.



Σχῆμα 22.2: Τα εννέα σημεία στον κύκλο του Euler.

Συμπεραίνουμε οτι ΣΞ είναι παράλληλο και ίσο προς το ΝΤ. Άρα ΣΤΝΞ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά ΣΤ ενώνει τα μέσα των ΗΒ και ΗΓ, άρα είναι παράλληλο προς την ΒΓ. Άρα ΣΤ είναι κάθετο στην ΑΗ, συνεπώς και στις ΣΞ και ΤΝ. Άρα ΣΤΝΞ είναι ορθογώνιο.

Παρόμοια δείχνουμε οτι ΣΜΝΡ και ΞΜΤΡ είναι ορθογώνια.

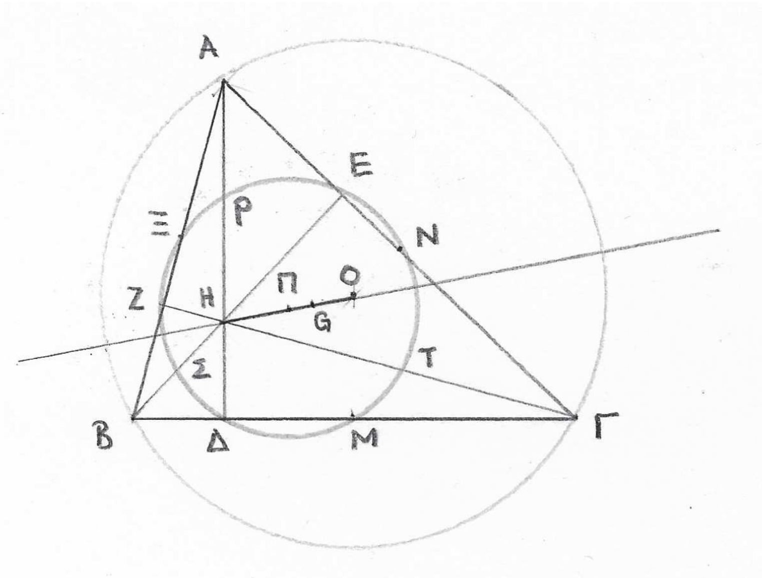


Σχῆμα 22.3: Τα ορθογώνια στη διάμετρο.

Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου. Αφού ΣΝ είναι κοινή διαγώνιος των ΣΤΝΞ και ΣΜΝΡ, συμπεραίνουμε οτι Ξ, Τ, Ρ και Μ βρίσκονται στον κύκλο με διάμετρο ΣΝ.

Τα ΞΤ και ΡΜ είναι επίσης διάμετροι αυτού του κύκλου, αφού είναι διαγώνιοι των εγγεγραμμένων ορθογωνίων ΣΜΝΡ και ΞΜΤΡ. Το Δ βλέπει τη διάμετρο ΡΜ υπό ορθή γωνία, άρα βρίσκεται στον ίδιο κύκλο. Παρόμοια, Ε και Ζ βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 13.34 γνωρίζουμε οτι $|\mathrm{AH}| = 2|\mathrm{OM}|$. Άρα PH είναι παράλληλο και ίσο με το OM, και PHMO είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς οι διαγώνιοι PM και OH διχοτομούνται, σε σημείο Π, το οποίο είναι το μέσο της διαμέτρου PM, και συνεπώς το κέντρο του κύκλου Euler.



Σχῆμα 22.4: Ο κύκλος και η ευθεία του Euler.

Το ΠP ενώνει τα μέσα των HA και HO, άρα η ακτίνα του κύκλου Euler $|\Pi\mathrm{P}|$ είναι το μισό της ακτίνας $|\mathrm{OA}|$ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

□

Ο Τύπος του Ήρωνα

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a = |\mathrm{B\Gamma}|$, $b = |\mathrm{A\Gamma}|$, $c = |\mathrm{AB}|$ και $\tau = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

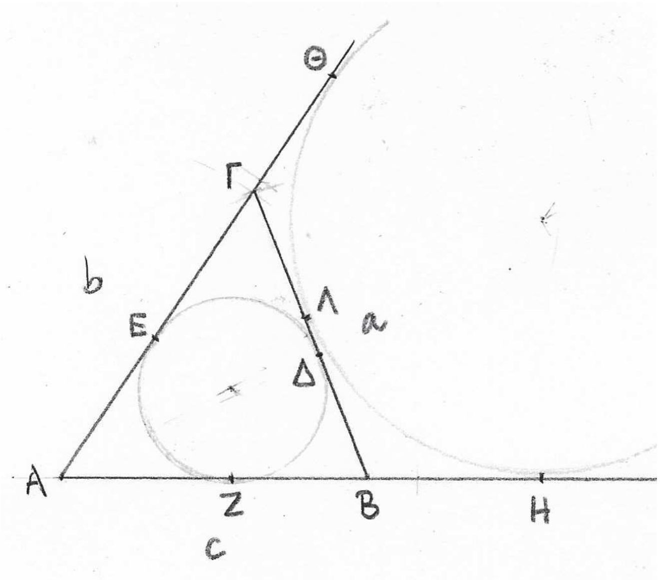
Πρόταση 22.4 *Εάν Δ, Ε και Ζ είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου, έχουμε*

$$\begin{aligned} |AZ| &= |AE| = \tau - a\,, \\ |B\Delta| &= |BZ| = \tau - b\,, \\ |\Gamma E| &= |\Gamma\Delta| = \tau - c\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Πράγματι, οι πρώτες ισότητες είναι συνέπεια των ιδιοτήτων της εφαπτομένης. Για τις δεύτερες, παρατηρούμε οτι $\tau = |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{B}\Delta| + |\Gamma\mathrm{E}|$ και

$$\begin{aligned} a &= |\mathrm{B}\Delta| + |\Gamma\mathrm{E}|\,, \\ b &= |\Gamma\mathrm{E}| + |\mathrm{AZ}|\,, \\ c &= |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{B}\Delta|\,. \end{aligned}$$

□



Σχῆμα 22.5: Εφαπτόμενες προς εγγεγραμμένο και παρεγγεγραμμένους κύκλους.

Πρόταση 22.5 *Εάν επιπλέον H, Θ είναι τα σημεία επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου με τις προεκτάσεις των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, τότε*

$$|AH| = |A\Theta| = \tau \quad \textit{και} \quad |BH| = |\Gamma\Delta| = \tau - c\,, \quad |\Gamma\Theta| = |B\Delta| = \tau - b\,.$$

Απόδειξη. Οι εφαπτόμενες από το A προς τον παρεγγεγραμμένο κύκλο είναι ίσες, $|\mathrm{AH}| = |\mathrm{A}\Theta|$. Αφού $|\mathrm{BH}| + |\Gamma\Theta| = a$, ισχύει επίσης

$$|\mathrm{AH}| + |\mathrm{A}\Theta| = b + |\Gamma\Theta| + c + |\mathrm{BH}| = a + b + c = 2\tau\,.$$

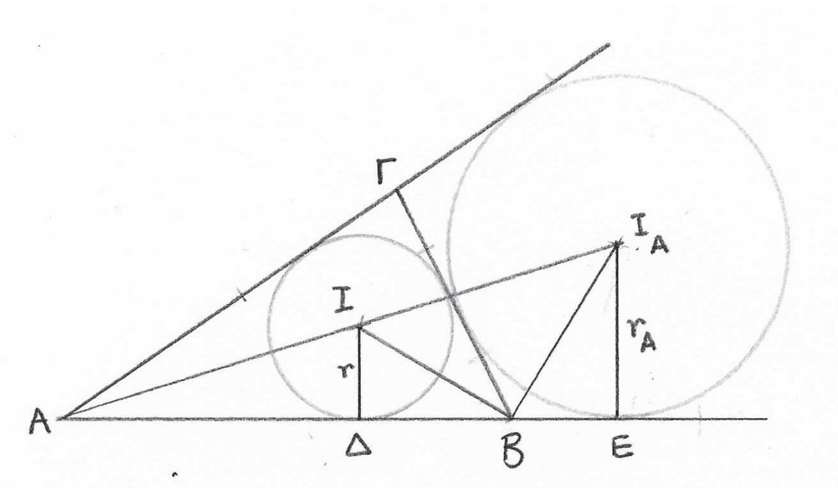
Άρα $|\mathrm{AH}| = |\mathrm{A}\Theta| = \tau$, και $|\mathrm{BH}| = \tau - c$, $|\Gamma\Theta| = \tau - b$.

□

Περισσότερες σχέσεις μεταξύ των προβολών των κέντρων αυτών των κύκλων δίδονται στο Π.Πάμφιλος, "Γεωμετρικόν", Πρόταση 5.1.3.

Πρόταση 22.6 *Η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου και η ακτίνα r_A του παρεγγεγραμμένου κύκλου στη γωνία $\angle A$, ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$r^2 = \frac{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau},$$
$$r_A^2 = \frac{\tau(\tau-b)(\tau-c)}{\tau-a}.$$



Σχήμα 22.6: Η ακτίνα του εγγεγραμμένου και του παρεγγεγραμμένου κύκλου.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με εγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο Ι και ακτίνα r, και παρεγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο I_A και ακτίνα r_A. Συμβολίζουμε Δ την προβολή του σημείου Ι στην ΑΒ, και Ε την προβολή του σημείου I_A στην ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΔΙ και AEI_A είναι όμοια, άρα $\frac{\Delta\mathrm{I}}{\mathrm{EI}_A} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AE}}$, και αντικαθιστώντας από τις Προτάσεις 22.4 και 22.5, έχουμε $\frac{r}{r_A} = \frac{\tau-a}{\tau}$.

Τα τρίγωνα ΔΙΒ και BEI_A είναι όμοια, άρα $\frac{\Delta\mathrm{I}}{\Delta\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EI}_A}$, και αντικαθιστώντας $\frac{r}{\tau-b} = \frac{\tau-c}{r_A}$. Άρα $r_A = \frac{(\tau-c)(\tau-b)}{r}$.

Από τις δύο σχέσεις έχουμε $\frac{r^2}{(\tau-c)(\tau-b)} = \frac{\tau-a}{\tau}$.

□

Θεώρημα 22.7 (Τύπος του Ήρωνα) *Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι*

$$\epsilon\mu\beta\, AB\Gamma = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}\,.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 13.15, το εμβαδόν του τριγώνου είναι

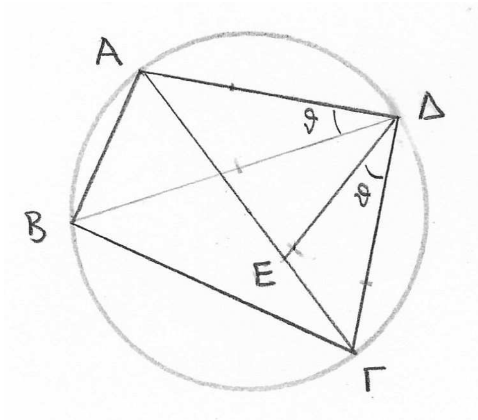
$$\text{εμβ ΑΒΓ} = r\tau = \sqrt{\frac{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau}}\tau = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}\,.$$

□

Το Θεώρημα του Πτολεμαίου

Θεώρημα 22.8 (Θεώρημα Πτολεμαίου) *Εάν $ΑΒΓΔ$ είναι τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών. Συγκεκριμένα*

$$|ΑΓ|\,|ΒΔ| = |ΑΒ|\,|ΓΔ| + |ΑΔ|\,|ΒΓ|\,.$$



Σχῆμα 22.7: Το Θεώρημα του Πτολεμαίου.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο Ε στη διαγώνιο ΑΓ, τέτοιο ώστε $\angle ΕΔΓ = \angle ΑΔΒ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι όμοια, άρα $\frac{ΑΒ}{ΕΓ} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}$, συνεπώς$|ΑΒ|\,|ΔΓ| = |ΒΔ|\,|ΕΓ|$.

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΔΓ είναι όμοια, άρα $\frac{ΒΓ}{ΑΕ} = \frac{ΒΔ}{ΑΔ}$, συνεπώς$|ΑΕ|\,|ΒΔ| = |ΑΔ|\,|ΒΓ|$.

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

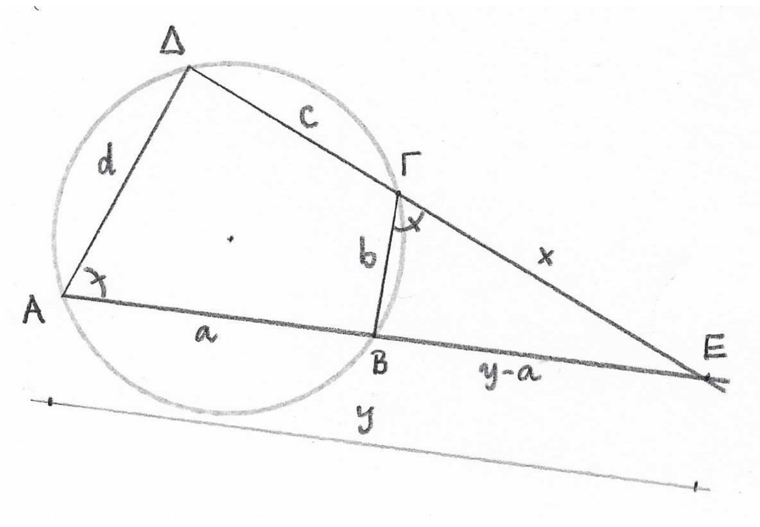
$$|ΒΔ|(|ΑΕ| + |ΕΓ|) = |ΑΒ|\,|ΓΔ| + |ΑΔ|\,|ΒΓ|\,.$$

□

Ο τύπος του Brahmagupta.

Θεώρημα 22.9 (Τύπος του Brahmagupta) *Θεωρούμε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, και συμβολίζουμε $a = ΑΒ$, $b = ΒΓ$, $c = ΒΓ$, $d = ΔΑ$ και $\tau = \frac{a+b+c+d}{2}$. Τότε*

$$\epsilon\mu\beta\, ΑΒΓΔ = \sqrt{(\tau - a)(\tau - b)(\tau - c)(\tau - d)}\,.$$



Σχῆμα 22.8: Ο τύπος του Brahmagupta.

Απόδειξη. Εάν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, ο τύπος ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε οτι ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο Ε, και θέτουμε x = ΕΓ, y = ΕΑ. Τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΓΒ είναι όμοια, με λόγο λ. Τότε $x = \lambda y$, $b = \lambda d$, $y - a = \lambda(c + x)$, Σχήμα 22.8.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι

$$\text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma\Delta} = \text{εμβ}\,\mathrm{E\Delta A} - \text{εμβ}\,\mathrm{EB\Gamma}\,.$$

Το τρίγωνο ΕΑΔ έχει μήκη πλευρών $|\mathrm{EA}| = y$, $|\mathrm{A\Delta}| = d$, $|\mathrm{E\Delta}| = x + c$, και θέτουμε

$$\begin{aligned}
2\sigma &= |\mathrm{EA}| + |\mathrm{A\Delta}| + |\mathrm{\Delta E}| = y + d + x + c\,,\\
s_1 &= \sigma = \frac{y + d + x + c}{2}\,,\\
s_2 &= \sigma - y = \frac{d + c + x - y}{2}\,,\\
s_3 &= \sigma - d = \frac{y + c + x - d}{2}\,,\\
s_4 &= \sigma - x - c = \frac{y + d - c - x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Ήρωνα,

$$\text{εμβ}\,\mathrm{EA\Delta} = \sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} \quad \text{και} \quad \text{εμβ}\,\mathrm{EB\Gamma} = \sqrt{(\lambda s_1)(\lambda s_2)(\lambda s_3)(\lambda s_4}\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma\Delta} &= \text{εμβ}\,\mathrm{E\Delta A} - \text{εμβ}\,\mathrm{EB\Gamma} \\
&= \sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} - \lambda^2 \sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} \\
&= (1-\lambda^2)\sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} \\
&= \sqrt{(1-\lambda)^2 s_1 s_3 (1+\lambda)^2 s_2 s_4} \\
&= \sqrt{(s_1 - \lambda s_1)(s_2 - \lambda s_2)(s_3 - \lambda s_3)(s_4 + \lambda s_4)}\,.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
s_1 - \lambda s_1 &= \frac{1}{2}(y + d + x + c - x - b - (y - a)) \\
&= \frac{1}{2}(a + c + d - b) \\
&= \tau - b\,.
\end{aligned}$$

Παρόμοια

$$s_2 + \lambda s_2 = \tau - a\,, \quad s_3 - \lambda s_3 = \tau - d\,, \quad s_4 + \lambda s_4 = \tau - c\,.$$

Άρα

$$\text{εμβ}\,\mathrm{AB\Gamma\Delta} = \sqrt{(\tau - b)(\tau - a)(\tau - d)(\tau - c)}\,.$$

□

Κεφάλαιο 23

Μέτρηση κύκλου

Η μέτρηση του κύκλου, δηλαδή ο υπολογισμός του μήκους της περιφέρειας του κύκλου και του εμβαδού του εσωτερικού του, απαιτεί πέντε διαδικασίες:

α΄. Πρέπει να ορίσουμε τί εννοούμε με μήκος κύκλου και με εμβαδόν του εσωτερικού του κύκλου.

β΄. Να δείξουμε οτι η περίμετρος του κύκλου είναι ανάλογη προς τη διάμετρο.

γ΄. Να δείξουμε οτι το εμβαδόν του κύκλου είναι ανάλογο προς το τετράγωνο της ακτίνας του.

δ΄. Να δείξουμε οτι οι λόγοι στα δύο προηγούμενα είναι ίσοι.

ε΄. Να υπολογίσουμε αυτό το λόγο.

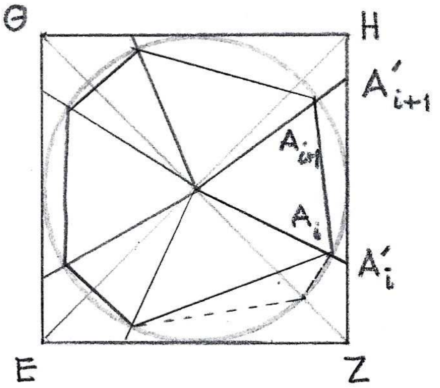
Περίμετρος κύκλου

Έχουμε ορίσει το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, μίας τεθλασμένης γραμμής ή ενός πολυγώνου. Για να ορίσουμε το μήκος του κύκλου, ή γενικότερα μίας καμπύλης γραμμής, χρειάζεται μία επέκταση της έννοιας του μήκους. Αυτή η επέκταση μας φέρνει για άλλη μία φορά να χρησιμοποιήσουμε οριακές διαδικασίες.

Θεωρούμε τα μήκη των περιμέτρων κυρτών πολυγώνων εγγεγραμμένων στον κύκλο. Θα δείξουμε οτι αυτά αποτελούν ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Λήμμα 23.1 *Κάθε κυρτό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r έχει περίμετρο μικρότερη από $8r$.*

Απόδειξη. Έστω πολύγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_k$ με περίμετρο p, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, r), και ΕΖΗΘ τετράγωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο. Εάν στις κορυφές του

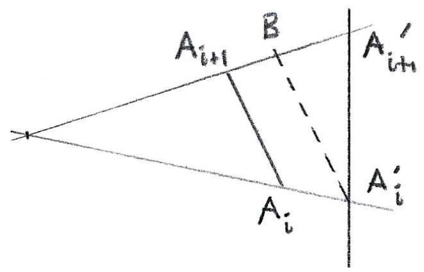


Σχῆμα 23.1: Περίμετρος φραγμένη από το τετράγωνο.

πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_k$ προσθέσουμε τα σημεία όπου οι διαγώνιοι ΕΗ και ΖΘ τέμνουν τον κύκλο, η περίμετρός του αυξάνει. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε οτι οι κορυφές του $A_1A_2\ldots A_k$ περιλαμβάνουν αυτά τα σημεία.

Προεκτείνουμε κάθε ακτίνα OA_i μέχρι το σημείο A'_i στο τετράγωνο, Σχήμα 23.1. Θα δείξουμε οτι το πολύγωνο $A'_1A'_2\ldots A'_k$ έχει περίμετρο q μεγαλύτερη από την περίμετρο του πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_k$.

Δραστηριότητα 23.1 Χρησιμοποιήστε το Σχήμα 23.2 για να δείξετε οτι $|A_iA_{i+1}| < |A'_iA'_{i+1}|$



Σχῆμα 23.2: Σύγκριση πλευρών πολυγώνου και τετραγώνου.

Συμπεραίνουμε οτι $p < q$. Αλλά κάθε πλευρά του $A'_1A'_2\ldots A'_k$ είναι μέρος μίας πλευράς του τετραγώνου ΕΖΗΘ, και υποθέσαμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, οτι στις κορυφές του $A'_1A'_2\ldots A'_k$ περιλαμβάνονται τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ. Άρα οι πλευρές του $A'_1A'_2\ldots A'_k$ καλύπτουν όλο το τετράγωνο, και q είναι ίσο με την περίμετρο του τετραγώνου $4r$.

□

Από το Αξίωμα της Συνέχειας των πραγματικών αριθμών, γνωρίζουμε οτι κάθε μη κενό φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή έναν αριθμό που δεν είναι μικρότερος από κανένα στοιχείο του συνόλου, αλλά τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε αυθαίρετα κοντά από αριθμούς του συνόλου. Αυτό ορίζουμε να είναι το μήκος του κύκλου ακτίνας r,

$$p_r = \sup\{\text{περίμετρος κυρτών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας } r\}\,.$$

Μπορούμε να δείξουμε οτι αρκεί να θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα, και το ελάχιστο άνω φράγμα θα είναι το ίδιο. Το μήκος του κύκλου λοιπόν είναι

$$p_r = \sup_n n\lambda_n\,,$$

όπου λ_n είναι το μήκος της πλευράς του κανονικού πολυγώνου με n κορυφές, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r.

Λήμμα 23.2 *Για κάθε κανονικό πολύγωνο με n κορυφές, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r, ο λόγος της περιμέτρου q_n προς τη διάμετρο $2r$ είναι ανεξάρτητος από την ακτίνα r.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε ω_n τη γωνία μέτρου $\frac{180}{n}$. Σε ένα πολύγωνο με n κορυφές, κάθε πλευρά έχει μήκος

$$\lambda_n = 2r\sin\omega_n\,.$$

Αφού η περίμετρος είναι $q_n = n\lambda_n$, ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρο είναι

$$\frac{q_n}{2r} = n\sin\omega_n\,.$$

□

Θεώρημα 23.3 *Για κάθε κύκλο, ο λόγος της περιμέτρου p_r προς τη διάμετρο $2r$ είναι ανεξάρτητος από την ακτίνα r.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο κύκλους με ακτίνες r και s, και αντίστοιχα περιμέτρους p_r και p_s. Υποθέτουμε οτι $\frac{p_s}{2s} < \frac{p_r}{2r}$. Τότε υπάρχει κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, για κάποιο n, εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας r, που έχει περίμετρο q τέτοια ώστε

$$\frac{p_s}{2s} < \frac{q}{2r} < \frac{p_r}{2r}\,.$$

Αλλά το κανονικό πολύγωνο με n πλευρές εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας s έχει περίμετρο $q^{'}$, και σύμφωνα με το Λήμμα 23.2,

$$\frac{q^{'}}{2s} = \frac{q}{2r}\,.$$

Άρα $\frac{p_s}{2s} < \frac{q^{'}}{2s}$. 'τοπο, αφού από τον τρόπο που ορίστηκε το $q^{'}$, $p_s \geq q^{'}$.

□

Αυτόν το λόγο της περιμέτρου του κύκλου προς τη διάμετρο συμβολίζουμε π.

Πόρισμα 23.4 *Υπάρχει ένας αριθμός π, τέτοιος ώστε για κάθε $r > 0$, ο κύκλος με ακτίνα r έχει περίμετρο $2\pi r$.*

Εμβαδόν κύκλου

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του εσωτερικού του κύκλου, χρησιμοποιούμε πάλι εγγεγραμμένα πολύγωνα. Από την Ιδιότητα 13.5, συμπεραίνουμε οτι το εμβαδόν κάθε τέτοιου πολυγώνου είναι μικρότερο από το εμβαδόν του περιγεγραμμένου τετραγώνου του κύκλου,

$$\text{εμβ}\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_k < 4r^2\,.$$

Άρα υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα αυτών των αριθμών, και ορίζουμε για κύκλο K_r, ακτίνας r,

$$\text{εμβ}\,K_r = \sup\{\text{ εμβαδόν κυρτών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας } r\}\,.$$

Πάλι μπορούμε να δείξουμε οτι αρκεί να θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα. Συμβολίζουμε P_n το κανονικό πολύγωνο με n κορυφές εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r, και έχουμε

$$\text{εμβ}\,K_r = \sup_n \text{εμβ}\,P_n\,.$$

Λήμμα 23.5 *Το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου με n κορυφές εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r, είναι*

$$\epsilon\mu\beta\,P_n = \frac{nr^2}{2}\sin 2\omega_n\,.$$

Απόδειξη. Το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου P_n είναι ίσο με n φορές το εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A\Gamma}| = r$ και γωνία στην κορυφή $\frac{360}{n} = 2\omega_n$. Η βάση του τριγώνου είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου, $\lambda_n = 2r\sin\omega_n$, ενώ το ύψος του τριγώνου είναι ίσο με το απόστημα του πολυγώνου, $\alpha_n = r\cos\omega_n$. Άρα

$$\begin{aligned}\text{εμβ}\,\text{ΑΒΓ} &= \frac{1}{2}(2r\sin\omega_n)(r\cos\omega_n) \\ &= \frac{r^2}{2}2\sin\omega_n\cos\omega_n \\ &= \frac{r^2}{2}\sin 2\omega_n\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$P_n = \frac{nr^2}{2}\sin 2\omega_n\,.$$

□

Θεώρημα 23.6 *Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας r είναι εμβ $K_r = \pi r^2$.*

Απόδειξη. Υπολογίζουμε το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου με $2n$ κορυφές,

$$\begin{aligned}\text{εμβ}\,P_{2n} &= 2n\frac{r^2}{2}\sin 2\omega_{2n} \\ &= nr^2\sin\omega_n \\ &= \frac{r}{2}(2nr\sin\omega_n \\ &= \frac{r}{2}p_n\,.\end{aligned}$$

Αλλά το ελάχιστο άνω φράγμα των p_n είναι $2\pi r$, ενώ το ελάχιστο άνω φράγμα των εμβ P_{2n} είναι εμβ K_r. Άρα

$$\text{εμβ}\,K_r = \frac{r}{2}(2\pi r) = \pi r^2\,.$$

□

Ο υπολογισμός του π

Ο Αρχιμήδης στο έργο ''Κύκλου Μέτρησις'' δείχνει οτι ο λόγος π είναι μικρότερος από $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερος από $3\frac{10}{71}$, προσεγγίζοντας την περίμετρο του κύκλου με τις περιμέτρους εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου με 96 πλευρές.

Τους επόμενους αιώνες ο υπολογισμός του αριθμού π απασχόλησε πολλούς μαθηματικούς. Το 1761 ο J.H.Lambert απέδειξε οτι ο π είναι άρρητος αριθμός, ενώ το 1882 ο F.Lindemann απέδειξε οτι είναι υπερβατικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές.

Κεφάλαιο 24

Στερεά

Πρίσματα

Εάν $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_k$ είναι κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο F και ε είναι ευθεία που έχει μόνον ένα κοινό σημείο με το F, το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκονται σε ευθείες που είναι παράλληλες προς την ε και διέρχονται από ένα σημείο του πολυγώνου $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_k$ λέγεται **(κυρτή) πρισματική επιφάνεια**. Οι **ακμές**, οι **έδρες** και οι **δίεδρες γωνίες** της πρισματικής επιφάνειας ορίζονται με τον προφανή τρόπο.

Κάθε επίπεδο G που τέμνει την ε, τέμνει την πρισματική επιφάνεια σε ένα πολύγωνο $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_k$. Ένα επίπεδο παράλληλο προς το G τέμνει την πρισματική επιφάνεια σε ένα πολύγωνο $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_k$ ίσο με το $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_k$. Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας την πρισματική επιφάνεια με τα δύο παράλληλα επίπεδα είναι το **πρίσμα** με **παράπλευρες ακμές** $\mathrm{B}_1\Gamma_1$, $\mathrm{B}_2\Gamma_2$, $\ldots$, $\mathrm{B}_k\Gamma_k$, και **βάσεις** τα πολύγωνα $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_k$ και $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_k$. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων είναι το **ύψος** του πρίσματος. Το πρίσμα λέγεται **ορθό** εάν οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις. Λέγεται **κανονικό** όταν οι βάσεις είναι κανονικά πολύγωνα.

Δραστηριότητα 24.1 Δείξτε οτι η παράπλευρη έδρα $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, και οτι τα πολύγωνα $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_k$ και $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_k$ είναι ίσα.

Κύλινδροι

Εάν (K, r) είναι κύκλος στο επίπεδο F και ε είναι ευθεία κάθετη στο F, το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκονται σε ευθείες που είναι παράλληλες προς την ε και διέρχονται από ένα σημείο X του κύκλου (K, r) λέγεται **(ορθή) κυλινδρική επιφάνεια**. Η ευθεία από το K παράλληλη προς την ε είναι ο άξονας της κυλινδρικής επιφάνειας. Κάθε ευθεία παράλληλη προς την ε που διέρχεται από ένα σημείο X του κύκλου (K, r) λέγεται **γενέτειρα** της κυλινδρικής επιφάνειας.

Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας την κυλινδρική επιφάνεια με δύο επίπεδα κάθετα στον άξονα λέγεται **(ορθός) κύλινδρος**. Σε έναν κύλινδρο διακρίνουμε τις **βάσεις** και την **παράπλευρη επιφάνεια**. Η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων των βάσεων είναι το **ύψος** του κυλίνδρου.

Κώνοι

Εάν (Κ, r) είναι κύκλος στο επίπεδο F, ε είναι ευθεία κάθετη στο F που διέρχεται από το Κ, και Ο είναι σημείο της ε διαφορετικό από το Κ, το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε ευθείες που διέρχονται από το Ο και ένα σημείο Χ του κύκλου (Κ, r) είναι **(ορθή κυκλική) κωνική επιφάνεια**. Η ευθεία ε είναι ο **άξονας** της κωνικής επιφάνειας. Κάθε ευθεία ΟΧ λέγεται **γενέτειρα** της κωνικής επιφάνειας. Το σημείο Ο χωρίζει την κωνική επιφάνεια σε δύο χωνιά.

Κώνος λέγεται το στερεό που προκύπτει τέμνοντας το ένα χωνί της κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα που δεν διέρχεται από το Ο. Σε έναν κώνο διακρίνουμε την **κορυφή** Ο, τη **βάση** και την **παράπλευρη επιφάνεια**. Η απόσταση από την κορυφή στο επίπεδο της βάσης είναι το **ύψος** του κώνου.

Θεώρημα 24.1 *Εάν Σ είναι κωνική επιφάνεια και F είναι επίπεδο στο χώρο, τότε F είτε τέμνει κάθε γενέτειρα της Σ, είτε τέμνει όλες εκτός από δύο γενέτειρες, είτε τέμνει όλες εκτός από μία γενέτειρα.*

Σφαίρα

Η **σφαίρα** $S(\text{K}, r)$ με **κέντρο** Κ και **ακτίνα** r είναι το σύνολο όλων των σημείων Χ του χώρου για τα οποία $|\text{KX}| = r$.

Θεώρημα 24.2 *Τα κοινά σημεία μίας σφαίρας και ενός επιπέδου που την τέμνει είναι είτε ένα σημείο είτε ένας κύκλος.*

Εμβαδόν επιφανείας πολυέδρων

Το εμβαδόν της επιφανείας πρισμάτων, και γενικότερα πολυεδρικών επιφανειών, ορίζεται ως το άθροισμα των εμβαδών των πολυγωνικών εδρών. Έτσι το εμβαδόν της επιφανείας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκη πλευρών a, b και c είναι $2(ab + bc + ca)$.

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος είναι ίσο με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του πρίσματος.

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής πυραμίδας είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγωνικών παράπλευρων εδρών. Αφού όλες οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα τρίγωνα, το εμβαδόν είναι ίσο με το μισό της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος των τριγωνικών εδρών.

Θα ορίσουμε τα εμβαδά καμπύλων επιφανειών, όπως ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα, ως όρια των εμβαδών πολυέδρων εγγεγραμμένων σε αυτές τις επιφάνειες.

Εμβαδόν επιφανείας κυλίνδρου

Το εμβαδόν του κυλίνδρου είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών βάσεων και του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου. Αυτό το ορίζουμε ως το ελάχιστο άνω φράγμα των παράπλευρων εμβαδών πρισμάτων με ύψος ίσο με το ύψος του κυλίνδρου και βάση κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα στον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου. Συμβολίζουμε q_n την περίμετρο του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r. Τότε το παράπλευρο εμβαδόν του κανονικού πρίσματος που είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο ακτίνας r και ύψους υ είναι

$$\upsilon q_n \,.$$

Η ακολουθία q_n είναι φραγμένη. Στο Κεφάλαιο 23 ορίσαμε το μήκος του κύκλου ως το ελάχιστο άνω φράγμα $p_r = \sup q_n$, το οποίο είναι ανάλογο προς την ακτίνα, $p_r = 2\pi r$, Θεώρημα 23.3.

Θεώρημα 24.3 *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου με ακτίνα r και ύψος υ είναι*

$$2\pi r\upsilon \,.$$

Εμβαδόν επιφανείας κώνου

Το παράπλευρο εμβαδόν του κώνου με ακτίνα r και ύψος υ το ορίζουμε ως το ελάχιστο άνω φράγμα των παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πυραμίδων με βάση κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα στον κύκλο της βάσης του κώνου. Το εμβαδόν κάθε τριγωνικής παράπλευρης έδρας της κανονικής πυραμίδας είναι

$$\frac{1}{2}\upsilon_n \lambda_n \,,$$

όπου λ_n είναι το μήκος της πλευράς του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r, και υ_n είναι το ύψος κάθε τριγωνικής έδρας, δηλαδή η απόσταση της κορυφής O από κάθε ακμή της βάσης. Το εμβαδόν όλης της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$\frac{1}{2}\upsilon_n n \lambda_n \,.$$

Υπολογίζουμε
$$\upsilon_n = \sqrt{r^2 + \upsilon^2 - \frac{\lambda_n^2}{4}}\,.$$
Συνεπώς η ακολουθία υ_n είναι αύξουσα, με όριο το μήκος της γενέτειρας του κώνου, $\ell = \sqrt{\upsilon^2 + r^2}$. Από το Θεώρημα 23.3 γνωρίζουμε οτι $\lim n\lambda_n = 2\pi r$. Άρα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

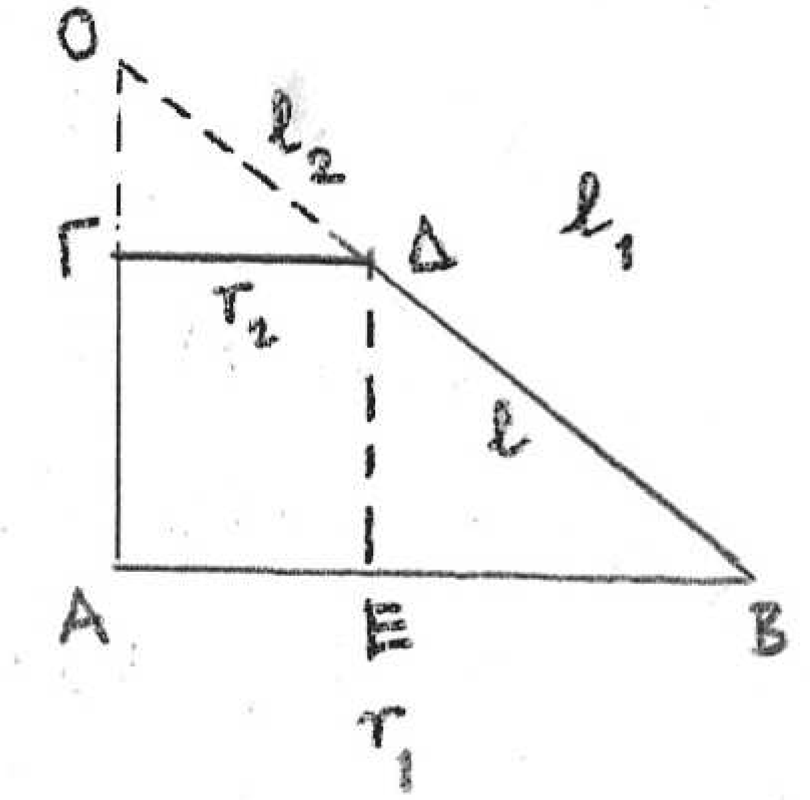
Θεώρημα 24.4 *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κώνου με ύψος υ και ακτίνα r είναι ίσο με*
$$\pi r\ell\,,$$
όπου $\ell = \sqrt{\upsilon^2 + r^2}$.

Εμβαδόν επιφανείας κόλουρου κώνου

Στη συνέχεια θεωρούμε τον **κόλουρο κώνο** που προκύπτει τέμνοντας ένα χωνί μίας κωνικής επιφάνειας με δύο επίπεδα κάθετα στον άξονα. Το ύψος υ του κόλουρου κώνου είναι η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων. Ο κόλουρος κώνος αποτελείται από δύο κυκλικές βάσεις με ακτίνα $r_1 > r_2$ και την παράπλευρη επιφάνεια. Το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου είναι $\ell = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + \upsilon^2}$.

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κόλουρου κώνου ως τη διαφορά των εμβαδών των παράπλευρων επιφανειών δύο κώνων με βάσεις ακτίνας r_1 και r_2, και μήκος γενέτειρας ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Από τα όμοια τρίγωνα στο Σχήμα 24.1, έχουμε
$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell}{r_1 - r_2}\,.$$
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $\pi r_1\ell_1 - \pi r_2\ell_2$. Υπολογίζουμε
$$\begin{aligned} r_1\ell_1 - r_2\ell_2 &= r_2(\ell_1 - \ell_2) + (r_1 - r_2)\ell_1 \\ &= r_2(\ell_1 - \ell_2) + \frac{\ell_1 - \ell_2}{\ell_1} r_1\ell_1 \\ &= (\ell_1 - \ell_2)(r_1 + r_2)\,. \end{aligned}$$
Θέτουμε $2r = r_1 + r_2$ και έχουμε
$$\pi r_1\ell_1 - \pi r_2\ell_2 = 2\pi r\ell\,.$$

Θεώρημα 24.5 *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου είναι*
$$2\pi r\ell\,,$$
όπου ℓ είναι το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου και r είναι η ακτίνα στο μέσο της γενέτειρας.



Σχήμα 24.1: Γενέτειρες κόλουρου κώνου.

Θα δούμε μία άλλη μορφή αυτού του τύπου, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στον υπολογισμό του εμβαδού της σφαίρας. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ στο Σχήμα 24.2, έχουμε

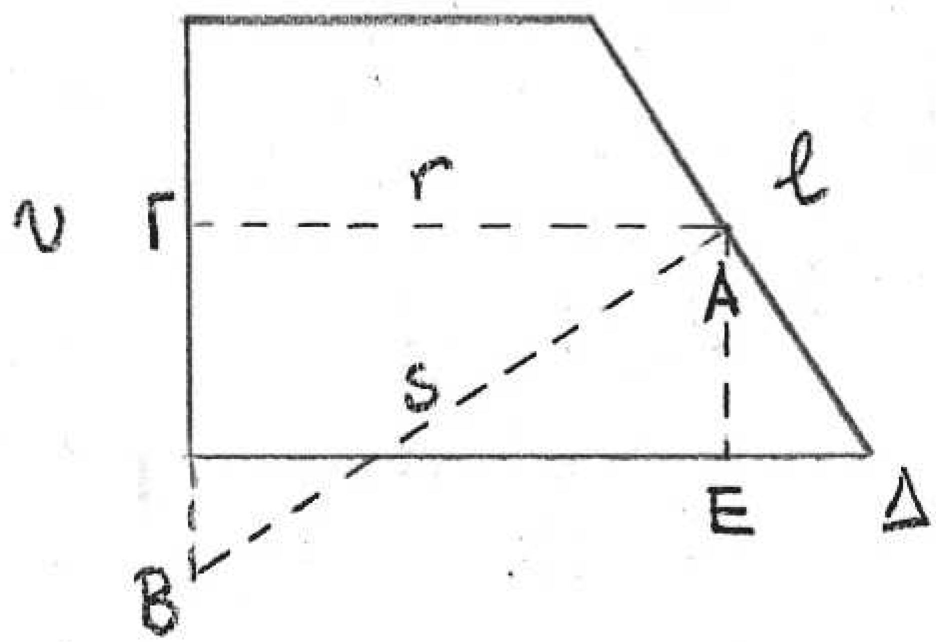
$$\frac{r}{s} = \frac{\upsilon}{\ell},$$

άρα $r\ell = s\upsilon$. Συμπεραίνουμε οτι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κόλουρου κώνου είναι ίσο με $2\pi s\upsilon$, όπου υ είναι το ύψος και s είναι το μήκος του κάθετου τμήματος στο μέσο της γενέτειρας μέχρι τον άξονα.

Παρατηρούμε οτι ο ίδιος τύπος ισχύει για τον κύλινδρο, όπου $s = r$, και για τον κώνο με βάση ακτίνας r, όπου $s\upsilon = \frac{r}{2}\ell$.

Πόρισμα 24.6 *Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου ή κόλουρου κώνου είναι*

$$2\pi s\upsilon,$$



Σχῆμα 24.2: Το κάθετο τμήμα στο μέσο της γενέτειρας.

όπου υ είναι το ύψος και s είναι το μήκος του κάθετου τμήματος στο μέσο της γενέτειρας μέχρι τον άξονα.

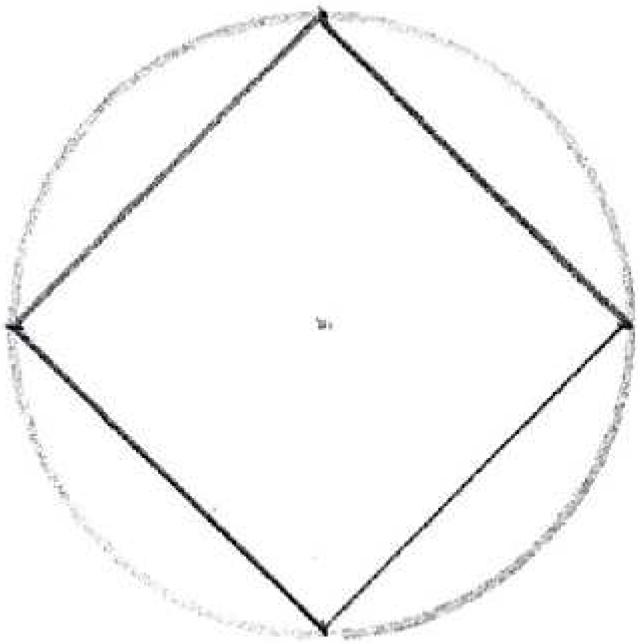
Το εμβαδόν της σφαίρας

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της σφαίρας, θα θεωρήσουμε τη σφαίρα ως την επιφάνεια που προκύπτει από την περιστροφή ενός κύκλου με άξονα μία διάμετρο του κύκλου. Θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν της σφαίρας με το εμβαδόν των επιφανειών E_n που προκύπτουν από την περιστροφή ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές, εγγεγραμμένου στον κύκλο έτσι ώστε ο άξονας περιστροφής να συμπίπτει με έναν άξονα συμμετρίας του κανονικού πολυγώνου.

Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο και περιστρέψουμε με άξονα μία διαγώνιο του τετραγώνου, θα σχηματιστούν στο εσωτερικό της σφαίρας, δύο κώνοι.

Εάν θεωρήσουμε ένα οκτάγωνο, η επιφάνεια στο εσωτερικό της σφαίρας θα αποτελείται από δύο κόλουρους κώνους και δύο κώνους.

Γενικότερα, η επιφάνεια που προκύπτει από την περιστροφή ενός πολυγώνου με 2^k



Σχῆμα 24.3: Δύο κώνοι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα.

πλευρές, με άξονα μία κύρια διαγώνιο, θα αποτελείται από $2^{k-1}-2$ κόλουρους κώνους και δύο κώνους. Το εμβαδόν της επιφάνειας αυτού του σχήματος αποτελείται από το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων επιφανειών των 2 κώνων και $2^{k-1}-2$ κόλουρων κώνων.

Από το Πόρισμα 24.6, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου με κορυφή στο B_0 είναι $2\pi s_1 \upsilon_1$, όπου s_1 είναι το μήκος της κάθετης από το μέσο της πλευράς $\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ προς τον άξονα περιστροφής. Αλλά η μεσοκάθετος μία χορδής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Συνεπώς s_1 είναι ίσο με το απόστημα του πολυγώνου α_{2^k}.

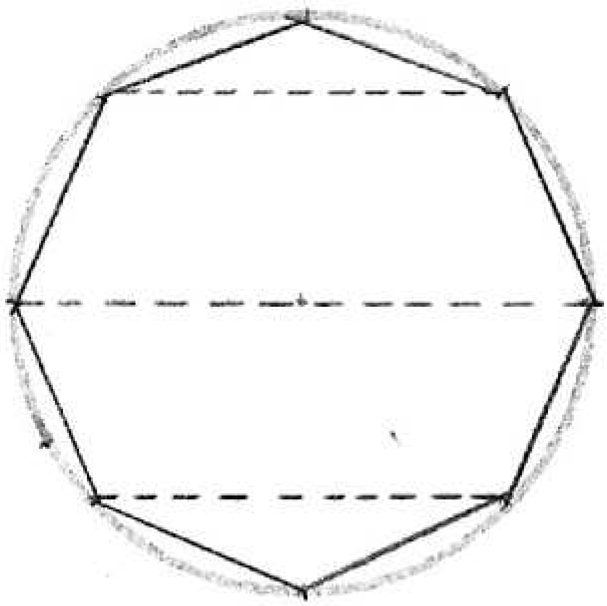
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κάθε κόλουρου κώνου είναι $2\pi s_i \upsilon_i$. Αλλά s_i είναι πάλι ίσο με το απόστημα α_{2^k}. Συνεπώς το εμβαδόν όλης της επιφάνειας είναι

$$2\pi\alpha_{2^k}(\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_{2^{k-1}})\,.$$

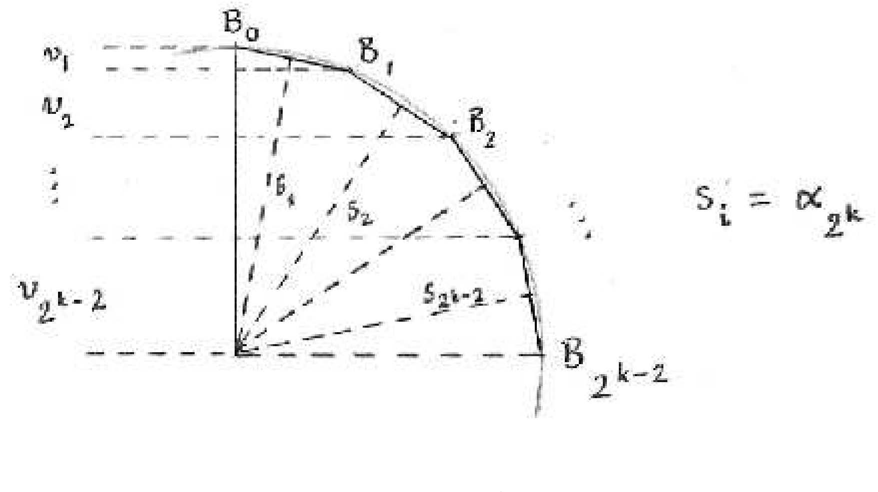
Αλλά το άθροισμα των υψών των κώνων και κόλουρων κώνων είναι

$$\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_{2^{k-1}}=|\mathrm{B}_0\mathrm{B}_{2^{k-1}}|=2r\,.$$

Καταλήγουμε οτι το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή ενός κανονικού πολυγώνου με 2^kκορυφές, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r, γύρω από



Σχῆμα 24.4: Επιφάνεια από περιστροφή οκταγώνου.



Σχῆμα 24.5: Προσέγγιση του εμβαδού της σφαίρας.

μία κύρια διαγώνιο, είναι

$$2\pi\alpha_{2^k}(2r)\,.$$

Το εμβαδόν της σφαίρας το ορίζουμε ως

$$\text{εμβ}\, S(\mathrm{K},\, r) = \sup\{\text{εμβαδόν κυρτών πολυέδρων εγγεγραμμένων στη σφαίρα}\}\,.$$

Μπορούμε να δείξουμε οτι αυτό είναι ίσο με το ελάχιστο άνω φράγμα των εμβαδών των

των επιφανειών εκ περιστροφής E_{2^k},

$$\text{εμβ}\, S(\mathrm{K},\, r) = \sup 4\pi r \alpha_{2^k}\,.$$

Το απόστημα α_{2^k} είναι αύξουσα συνάρτηση του k, με ελάχιστο άνω φράγμα το μήκος της ακτίνας r. Συνεπώς

$$\text{εμβ}\, S(\mathrm{K},\, r) = 4\pi r^2\,.$$

Θεώρημα 24.7 *Το εμβαδόν σφαίρας είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του περιγεγραμμένου κυλίνδρου,*

$$\epsilon\mu\beta\, S(K,\, r) = 4\pi r^2\,.$$