Ομάδα

Μία ομάδα είναι ένα σύνολο G με μία πράξη, $(a,b) \longmapsto ab$ (ή $a+b$), τ.ω.

α) η πράξη είναι προσεταιριστική,

β) υπάρχει στοιχείο e τ.ω. $ea = a$ για κάθε $a \in G$.

γ) για κάθε $a \in G$ υπάρχει $b \in G$ τ.ω. $ba = e$.

Ιδιότητες

για κάθε a, $ae = a$

e είναι μοναδικό

Εάν $ba = e$ τότε $ab = e$. Ονομάζουμε το e ταυτοτικό στοιχείο. και το συμβολίζουμε 1 (ή 0.)

για κάθε a, το b για το οποίο $ba = e$, είναι μοναδικό. Ονομάζουμε το b αντίστροφο του a, και συμβολίζουμε a^{-1}. (ή $-a$).

Εάν $ab = ac$ ή $ba = ca$, τότε $b = c$.

Για κάθε $a \in G$, ορίζονται αντιστρέψιμες απεικονίσεις

$L_a : G \to G : b \longmapsto ab$ αριστερή μετατόπιση

$R_a : G \to G : b \longmapsto ba^{-1}$ δεξιά μετατόπιση

Για κάθε $a, b \in G$,

$$L_{ab} = L_a \circ L_b$$

$$R_{ab} = R_a \circ R_b .$$

$$L_a \circ R_b = R_b \circ L_a .$$

Η τάξη της G είναι το πλήθος των στοιχείων της G, $|G|$.

<u>Ομομορφισμός</u> είναι μία απεικόνιση $f : G \longrightarrow H$,

όπου G, H είναι ομάδες και $f(ab) = f(a)\,f(b)$

γιν στο G γιν στο H.

Εαν f είναι ομομορφισμός, $f(1_G) = 1_H$, $f(a^{-1}a) = (f(a))^{-1}{}_H$, $f(a^n) = (f(a))^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Εαν f είναι 1-1, λέγεται <u>μονομορφισμός</u>

Εαν f είναι επί, λέγεται <u>επιμορφισμός</u>

Εαν f είναι αντιστρέψιμη, τότε λέγεται ισομορφισμός, και f^{-1} είναι επίσης ομομορφισμός.

Ενας ισομορφισμός από την ομάδα G στον εαυτό της λέγεται <u>αυτομορφισμός</u>.

Για κάθε $a \in G$, ορίζεται η <u>σύζευξη</u>

$$\gamma_a = L_a \circ R_a : x \longmapsto a x a^{-1}.$$

Η σύζευξη είναι αυτομορφισμός (λέγεται και <u>εσωτερικός αυτομορφισμός</u>)

Για κάθε $a, x \in G$, $a x a^{-1}$ είναι συζυγές του x.

Η συζυγία είναι σχέση ισοδυναμίας, και η κλάση συζυγίας του $b \in G$ συμβολίζεται $b^G = \{ aba^{-1} : a \in G \}$.

Η ομάδα G λέγεται <u>αβελιανή</u> εάν η πράξη είναι μεταθετική: για κάθε $a, b \in G$, $ab = ba$. Σε μία αβελιανή ομάδα κάθε σύζευξη είναι ο ταυτοτικός ισομορφισμός, και κάθε κλάση συζυγίας αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

Παραδείγματα

- Για κάθε σύνολο X, συμβολίζουμε S_X το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων απεικονίσεων $X \to X$.

  S_X με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων είναι ομάδα: η πράξη είναι προσεταιριστική, προφανώς ταυτοτικό στοιχείο και αντίστροφο. Ονομάζεται <u>συμμετρική</u> ομάδα του X.

- Εάν X, Y έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, S_X και S_Y είναι ισομορφικές ομάδες.

  Εάν $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη, δείξτε ότι

$$f_{\#} : S_X \longrightarrow S_Y : \sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

  είναι ισομορφισμός. (Εξαρτάται από την επιλογή της f).

- Εάν $|X| = n$, συμβολίζουμε $S_X = S_n$, την ομάδα <u>μεταθέσεων</u> n στοιχείων, ή <u>συμμετρική</u> ομάδα n στοιχείων.

<u>Θεώρημα</u> Κάθε μετάθεση της S_n εκφράζεται ως γινόμενο <u>ξένων</u> <u>κύκλων</u>.
<u>Θεώρημα</u> Κάθε μετάθεση S_n εκφράζεται ως γινόμενο <u>εναλλαγών</u>.

(εναλλαγή: μετάθεση που εναλλάσσει δύο στοιχεία και αφήνει τα υπόλοιπα σταθερά, δηλ. κύκλος μήκους 2).

κύκλος: $a_1, \dots, a_r$ διαφορετικά στοιχεία του $\{1, \dots, n\}$. Ο <u>κύκλος</u> $(a_1, \dots, a_r)$ (μήκους r) είναι η μετάθεση $a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots a_{r-1} \mapsto a_r \mapsto a_1$ και αφήνει τα υπόλοιπα σταθερά.

ξένες: Δύο μεταθέσεις σ, τ είναι <u>ξένες</u> εάν τα στοιχεία που μετακινεί η μία είναι σταθερά σημεία της άλλης.

Το σύνολο $\{1,-1\}$ είναι ομάδα, με πράξη τον πολλαπλ. ακεραίων.

Η απεικόνιση $\mathrm{sgn}: S_n \longrightarrow \{1,-1\}$

που απεικονίζει τη μετάθεση σ στο 1 εάν εκφράζεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων,

και στο -1 εάν εκφρ. ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

είναι καλά ορισμένη, και είναι ομομορφισμός.

Ο πυρήνας $\ker \mathrm{sgn}$ είναι η <u>εναλλάσσουσα</u> ομάδα σε n στοιχεία, $A_n \trianglelefteq S_n$.

$\mathbb{Z}_n$ ακέραιοι modulo n, αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση.

ταυτοτικό στοιχείο το 0. (Κυκλική ομάδα τάξεως n.)

$\mathbb{Z}$ ακέραιοι, αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση.

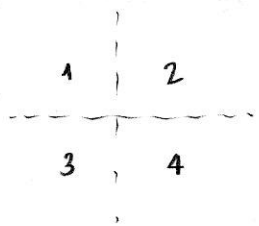
(άπειρη κυκλική ομάδα)

$\mathbb{Z}_n \cong$ ομάδα n-οστών ριζών της μονάδας.

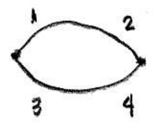
$\cong$ ομάδα περιστροφών κανονικού n-γώνου.

V : υποσύνολο του S_4 που αποτελείται από

$1, \ (12)(34), \ (13)(24), \ (14)(23).$



V: συμμετρίες του "διγώνου".



$s = (14)(23)$, $\quad t = (12)(34)$.

$tst = (14)(23) = s$.

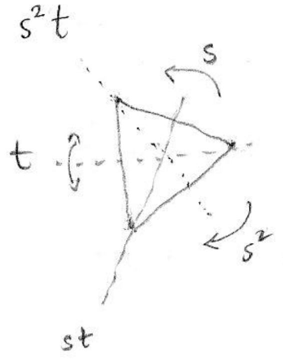
<u>Διεδρική ομάδα</u>. D_{2n}: Η ομάδα συμμετριών του κανονικού n-γώνου είναι η ομάδα τάξεως $2n$ που παράγεται από τα στοιχεία s και t με

$$s^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tst = s^{-1}.$$

s: περιστροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$.

t: ανάκλαση σε έναν άξονα συμμετρίας του n-γώνου.

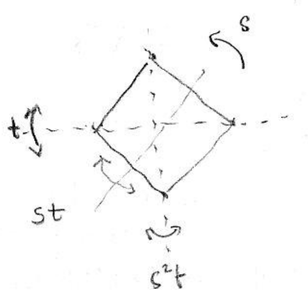
D_6



$1, \ s = (1\,2\,3), \ s^2 = (1\,3\,2)$

$t = (2\,3), \ st = ts^2 = (1\,2), \ s^2t = ts = (1\,3)$.

D_8



$1, \ s = (1\,2\,3\,4), \ s^2 = (13)(24),$

$s^3 = (1\,4\,3\,2)$

$t = (2\,4), \quad ts = s^3t = (14)(23)$

$ts^2 = s^2t = (1\,3)$

$ts^3 = st = (12)(34)$.

<u>Υποομάδα</u>

Εαν $S \neq \emptyset$, $S \subseteq G$, λέμε οτι S είναι <u>υποομάδα</u> της G εαν για κάθε $s, t \in S$, $st^{-1} \in S$.

Συμβολίζουμε $S \leq G$.

<u>Ιδιότητες</u> $1 \in S$, για κάθε $s, t \in S$, $s^{-1} \in S$, $st \in S$.
S είναι ομάδα, με πράξη τον περιορισμό της πράξης της G.

Εαν $f : G \to H$ είναι ομομορφισμός,

<u>πυρήνας</u> του f $\ker f = \{ a \in G : f(a) = 1 \}$ είναι υποομάδα της G

<u>εικόνα</u> του f $\operatorname{im} f = \{ h \in H : h = f(a)$ για κάποιο $a \in G \}$

είναι υποομάδα της H. <u>Παρ</u>: $A_n = \ker \operatorname{sgn}$, $\operatorname{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$.

<u>Θεώρημα</u> Η τομή οποιασδήποτε (μη κενής) οικογένειας υποομάδων μιας ομάδας είναι υποομάδα.

Υποσύνολο $X \subset G$, $\langle X \rangle$ είναι η τομή όλων των υποομάδων της G που περιέχουν το X, ονομάζεται υποομάδα <u>παραγόμενη</u> από το X, λέμε επίσης οτι X <u>παράγει</u> την $\langle X \rangle$.

$\langle X \rangle$ είναι η μικρότερη υποομάδα της G που περιέχει το X:
εαν $X \subseteq S$ και S είναι υποομάδα της G, τοτε $\langle X \rangle \leq S$.

Εαν $a \in G$, γράφουμε $\langle a \rangle$ αντί για $\langle \{a\} \rangle$ για την υποομάδα που παράγεται από το a. Μία τέτοια ομάδα λέγεται <u>κυκλική</u>.

Η <u>τάξη του a</u> είναι ο αριθμός των στοιχείων της $\langle a \rangle$, και είναι ίση με τον μικρότερο θετικό ακέραιο m τ.ω. $a^m = 1$.

<u>Πλευρικά σύνολα</u>

Εάν S είναι υποομάδα της G, και $a \in G$,

$$Sa = \{ sa : s \in S \}$$

είναι ένα <u>δεξιό πλευρικό σύνολο</u> της S στην G, (ή δεξιά πλευρική κλάση)

και $$aS = \{ as : s \in S \}$$

είναι ένα <u>αριστερό πλευρικό σύνολο</u> της S στην G.

Ένα στοιχείο του Sa (ή του aS) είναι αντιπρόσωπος του πλευρικού συνόλου Sa (ή aS).

<u>Λήμμα</u> $Sa = Sb$ <u>εάν</u> $ab^{-1} \in S$

$aS = bS$ εάν $b^{-1}a \in S$.

<u>Θεώρημα</u> Κάθε δύο δεξιά πλευρικά σύνολα της S στην G είτε είναι ξένα είτε ταυτίζονται, δηλαδή το σύνολο των δεξιών πλευρικών συνόλων της S στην G αποτελεί διαμέριση της G.

Άρα ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας στην G:

$$a \equiv b \quad \text{εάν} \quad ab^{-1} \in S$$

και οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα δεξιά πλευρικά σύνολα. Συμβολίζουμε $S\backslash G$ το σύνολο των δεξιών πλευρικών συνόλων.

Ο <u>δείκτης</u> της υποομάδας S στην G είναι το πλήθος των δεξιών πλευρικών συνόλων της S στην G, $[G:S] = |S\backslash G|$.

Αντίστοιχα ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας μέσω των αριστερών πλευρικών συνόλων,

$$a \equiv_L b \quad \text{εάν} \quad b^{-1}a \in S,$$

και συμβολίζουμε το αντίστοιχο σύνολο G/S.

Θεώρημα Εάν $S \leq G$, $|{}_S\backslash G| = |G/S|$.

Απ. Ορίζεται αντιστοίχιση $f : {}_S\backslash G \to G/S$ μέσω $f(Sa) = a^{-1}S$. //

Άσκ. Η f είναι καλά ορισμένη και αντιστοίχιση.

8/2/2018

Θεώρημα Lagrange.

Εάν $|G| < \infty$ και $S \leq G$, τότε $|S|$ διαιρεί την $|G|$
και $[G:S] = |G|/|S|$.

Απ. Κάθε δεξιό πλευρικό σύνολο έχει ίσο αριθμό στοιχείων με το S,
($Sa \to S : b \mapsto ba^{-1}$ είναι αντιστοίχιση),
άρα $|G| = [G:S]\,|S|$. //