Ένα σύμπλοκο διάστασης ≤ 1 είναι ένα <u>γράφημα</u>.

Ένα συνεκτικό γράφημα που δεν έχει κύκλους είναι ένα <u>δέντρο</u>.

<u>Παραδείγματα</u>. • μοναδικό δέντρο διαστ. 0.

Ένα σύμπλοκο K είναι <u>απλά συνεκτικό</u> εάν είναι συνεκτικό και

$\pi(K, v) = 1$ (για κάποιο, και συνεπώς για κάθε, v).

<u>Παράδειγμα</u>: Ένα δένδρο είναι απλά συνεκτικό.

<u>Θεώρημα</u> Εάν L είναι ένα απλά συνεκτικό υποσύμπλοκο του K, και α είναι κλειστή διαδρομή στο K της οποίας όλα τα σημεία ανήκουν στο L, τότε $[\alpha] = 1 \in \pi(K, v)$.

<u>Απ.</u> Ο εγκλεισμός $\varphi : L \hookrightarrow K$ είναι μορφισμός συμπλόκων, και $\varphi_*([\alpha]) = [\alpha]$. Αλλά $\varphi_*([\alpha]) = 1$. //

Ένα υποσύμπλοκο T του K είναι ένα <u>μέγιστο δέντρο</u>, εάν T είναι δέντρο, και δεν είναι γνήσιο υποσύμπλοκο ενός άλλου δέντρου στο K.

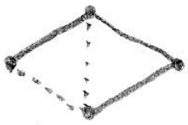
<u>Λήμμα</u> Εάν K είναι συνεκτικό σύμπλοκο, ένα δέντρο είναι μέγιστο <u>εανν</u> $V_T = V_K$.

<u>Απ.</u>

Έστω $v \notin V_T$. Τότε υπάρχει α από $v_0 \in V_T$ στο v, και $T' = T \cup \{\{v_i\}, \{v_{i-1}, v_i\}\}$ είναι δέντρο, που περιέχει γνήσια το T. Αντίφαση. //

Κάθε σύμπλοκο έχει ένα μέγιστο δέντρο (απαιτεί το Λήμμα του Zorn αν το σύμπλοκο είναι άπειρο).

Παραδείγματα.



Ορισμός. Εάν T είναι μέγιστο δέντρο στο συνεκτικό σύμπλοκο K, ορίζουμε την ομάδα $\tau(K,T)$ με παράσταση $(X \mid R)$

όπου X : όλα τα βήματα (u,v) στο K.

R : α) όλα τα βήματα (u,v) στο T.

β) όλες οι λέξεις $(u,v)(v,w)(u,w)^{-1}$

όπου $\{u,v,w\}$ είναι απλοκο στο K.

Παραδείγματα σχέσεων τύπου (β): $(u,u) = (u,u)(u,v)(u,v)^{-1}$

$(u,v)(v,w) = (u,w)$

Θεώρημα Tietze. Εάν K είναι συνεκτικό σύμπλοκο και T είναι μέγιστο δέντρο στο K, τότε

$$\pi(K,w) \cong \tau(K,T).$$

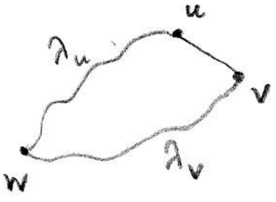
Απ. Έστω F η ελεύθερη ομάδα στο X, και N η κανονική υποομάδα της F που παράγεται από τις λέξεις στο R.

Τότε $\tau(K,T) = F/N$.

Αφού T είναι μέγιστο δέντρο, υπάρχει μοναδική ανηγμένη διαδρομή λ_u στο T από το w σε κάθε κορυφή $u \in V_K \setminus \{w\}$. Ορίζουμε και $\lambda_w = (w,w)$.

Ορίζουμε απεικόνιση $f : X \longrightarrow \pi(K,w)$ με

$$(u,v) \longmapsto [\lambda_u (u,v) \lambda_v^{-1}].$$



Εστω $\varphi : F \longrightarrow \pi(K,w)$ ο μοναδικός ομομορφισμός που επεκτείνει την f.

Θα δείξουμε ότι $N \leqslant \ker\varphi$, και συνεπώς ότι φ ορίζει ομομορφισμό $\Phi : \tau(K,T) \longrightarrow \pi(K,w) : (u,v)N \longmapsto [\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}]$.

<u>σχέση</u> τύπου (α): (u,v) βήμα στο T. Τότε η διαδρομή $\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}$ βρίσκεται στο T, και συνεπώς $[\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}] = 1$.

<u>σχέση</u> τύπου (β): Εαν $\{u,v,x\}$ είναι άπλοκο του K,

τότε $\varphi((u,v)(v,x)(u,x)^{-1})$

$$= [\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}][\lambda_v(v,x)\lambda_x^{-1}][\lambda_u(u,x)\lambda_x^{-1}]^{-1}$$

$$= [\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}\lambda_v(v,x)\lambda_x^{-1}][\lambda_u(u,x)\lambda_x^{-1}]^{-1}$$

$$= [\lambda_u(u,v)(v,x)\lambda_x^{-1}][\lambda_u(u,x)\lambda_x^{-1}]^{-1}$$

$$= [\lambda_u(u,x)\lambda_x^{-1}][\lambda_u(u,x)\lambda_x^{-1}]^{-1} = 1.$$

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη κατασκευάζοντας αντίστροφο του Φ. Αρχικά, για μία κλειστή διαδρομή $\alpha = (wv_1)\cdots(v_{n-1}w)$, ορίζουμε

$$\vartheta(\alpha) = \underbrace{(wv_1)\cdots(v_{n-1}w)}_{\text{λέξη στα βήματα}} N \in \tau(K,T).$$

Στοιχειώδεις κινήσεις στη διαδρομή α, δεν αλλάζουν το αριστερό πλευρικό σύνολο $\vartheta(\alpha)$: Εάν $\alpha = \gamma(u,v)(v,x)\delta$

και $\beta = \gamma(u,x)\delta$ προκύπτει από το α με μία στοιχειώδη κίνηση,

τότε
$$\beta^{-1}\alpha = \delta^{-1}(u,x)^{-1}\gamma^{-1}\gamma(u,v)(v,x)\delta$$
$$= \delta^{-1}(u,x)^{-1}(u,v)(v,x)\delta$$
$$= \underbrace{\delta^{-1}(u,x)^{-1}}\ \underbrace{(u,v)(v,x)(u,x)^{-1}}\ \underbrace{(u,x)\delta}$$

και η αντίστοιχη λέξη ανήκει στην N.

Άρα ορίζεται ομομορφισμός $\Theta : \pi(K,w) \longrightarrow \tau(K,T)$,
$$\Theta([\alpha]) = \vartheta(\alpha)$$

Υπολογίζουμε
$$\Phi\,\Theta([\alpha]) = \Phi\big((wv_1)\dots(v_{n-1}w)N\big)$$
$$= [\lambda_w(wv_1)\lambda_{v_1}^{-1}]\cdots[\lambda_{v_{n-1}}(v_{n-1}w)\lambda_w^{-1}]$$
$$= [\lambda_w(wv_1)\dots(v_{n-1}w)\lambda_w^{-1}]$$

και αφού λ_w τετριμμένη διαδρομή,
$$= [\alpha].$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση,
$$\Theta\,\Phi\big((u,v)N\big) = \Theta(\varphi(u,v))$$
$$= \Theta([\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1}])$$
$$= \vartheta(\lambda_u(uv)\lambda_v^{-1})$$
$$= \lambda_u(uv)\lambda_v^{-1}N$$

Αλλά λ_u, λ_v^{-1} είναι διαδρομές στο T, άρα οι αντίστοιχες λέξεις ανήκουν στην N, και συνεπώς

$$\lambda_u(u,v)\lambda_v^{-1} N = \lambda_u(u,v) N = \lambda_u(u,v) \underbrace{(u,v)^{-1}\lambda_u^{-1}(u,v)}_{\in N} N$$
$$= (u,v) N.$$

Δείξαμε ότι $\Theta\Phi$ είναι η κανονική απεικόνιση σε ένα σύνολο γεννητόρων της $\mathcal{T}(K,N)$, και συνεπώς στην $\mathcal{T}(K,N)$ //.

<u>Πόρισμα</u>. Εαν K είναι συνεκτικό σύμπλοκο διάστασης 1, $\pi(K,w)$ είναι ελεύθερη ομάδα. Εαν T είναι μέγιστο δέντρο στο K, τότε

$$\mathrm{rank}(\pi(K,w)) = \left|\{\text{1-απλοκα που δεν ανήκουν στο } T\}\right|$$

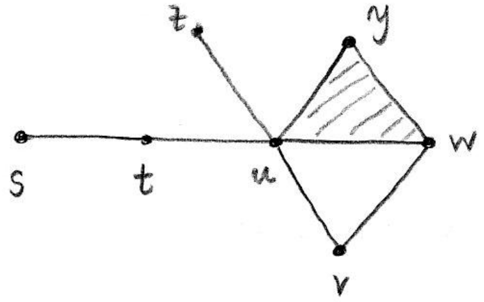
και ένα σύνολο γεννητόρων του $\pi(K,w)$ είναι το:

$$\left\{ \lambda_w(u,v)\lambda_v^{-1} : \begin{array}{l}(u,v) \text{ είναι ένα από τα βήματα} \\ \text{που αντιστοιχούν στο 1-απλοκο } \{u,v\} \\ \text{που δεν ανήκει στο } T\end{array} \right\}.$$

<u>Απόδειξη</u> Από το Θεώρημα, $\mathcal{T}(K,T)$ παράγεται από τα βήματα που δεν είναι στο T: (u,v) και (v,u) για κάθε 1-απλοκο $\{u,v\}$ που δεν είναι στο T. Αλλά $(v,u)(u,v) \in N$, άρα αρκεί να πάρουμε ένα από τα δύο βήματα ως γεννήτορα. Εαν $\{u,v,w\}$ είναι άπλοκο του K, τουλάχιστον δύο από τις κορυφές συμπίπτουν, αφού K έχει διάσταση 1. Συνεπώς όλες οι σχέσεις τύπου (β) είναι τετριμμένες, και $\mathcal{T}(K,T)$ είναι ελεύθερη.

//

Παράδειγμα



$$V_K = \{ s, t, u, v, w, y \}$$

$$K = \{ \{s\}, \{t\}, \{u\}, \{v\}, \{w\}, \{y\}, \{z\}$$
$$\{s,t\}, \{t,u\}, \{u,z\}, \{u,y\}, \{u,w\},$$
$$\{u,v\}, \{v,w\}, \{w,y\}, \{u,w,y\} \}.$$

K έχει 6 0-απλόκα, 8 1-απλόκα και 1 2-απλόκο.

Οι ακόλουθες διαδρομές είναι ομοτοπικές. Γράψτε τις κινήσεις που δίδουν τις ομοτοπίες.

$$\alpha_1 = (s,t)(t,u)(u,w)$$

$$\alpha_2 = (s,t)(t,u)(u,z)(z,u)(u,w)$$

$$\alpha_3 = (s,t)(t,t)(t,u)(u,w)$$

$$\alpha_4 = (s,t)(t,u)(u,y)(y,w).$$

Η διαδρομή β δεν είναι ομοτοπική με τα $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Γιατί;

$$\beta = (s,t)(t,u)(u,v)(v,w).$$

Ποιές από τις διαδρομές $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ είναι ανηγμένες;

Θεωρήστε το σύμπλοκο $L = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\} \}$.

Σχεδιάστε το αντίστοιχο γράφημα.

Είναι η αντιστοίχιση

$$\varphi(s) = \varphi(t) = \varphi(u) = a$$
$$\varphi(z) = \varphi(v) = b$$
$$\varphi(y) = \varphi(w) = c$$

μορφισμός συμπλόκων $\varphi : K \to L$;

Είναι η ψ, $\psi(x) = \varphi(x)$ για $x \neq y$

$$\psi(y) = v$$

μορφισμός συμπλόκων $\psi : K \to L$;

Είναι η χ, $\chi(a) = u$, $\chi(b) = w$, $\chi(c) = y$

μορφισμός συμπλόκων $\chi : L \to K$;

Θεωρήστε άλλες 1-1 αντιστοιχίσεις $V_L \to V_K$ και εξετάστε εάν είναι μορφισμοί συμπλόκων $L \to K$.