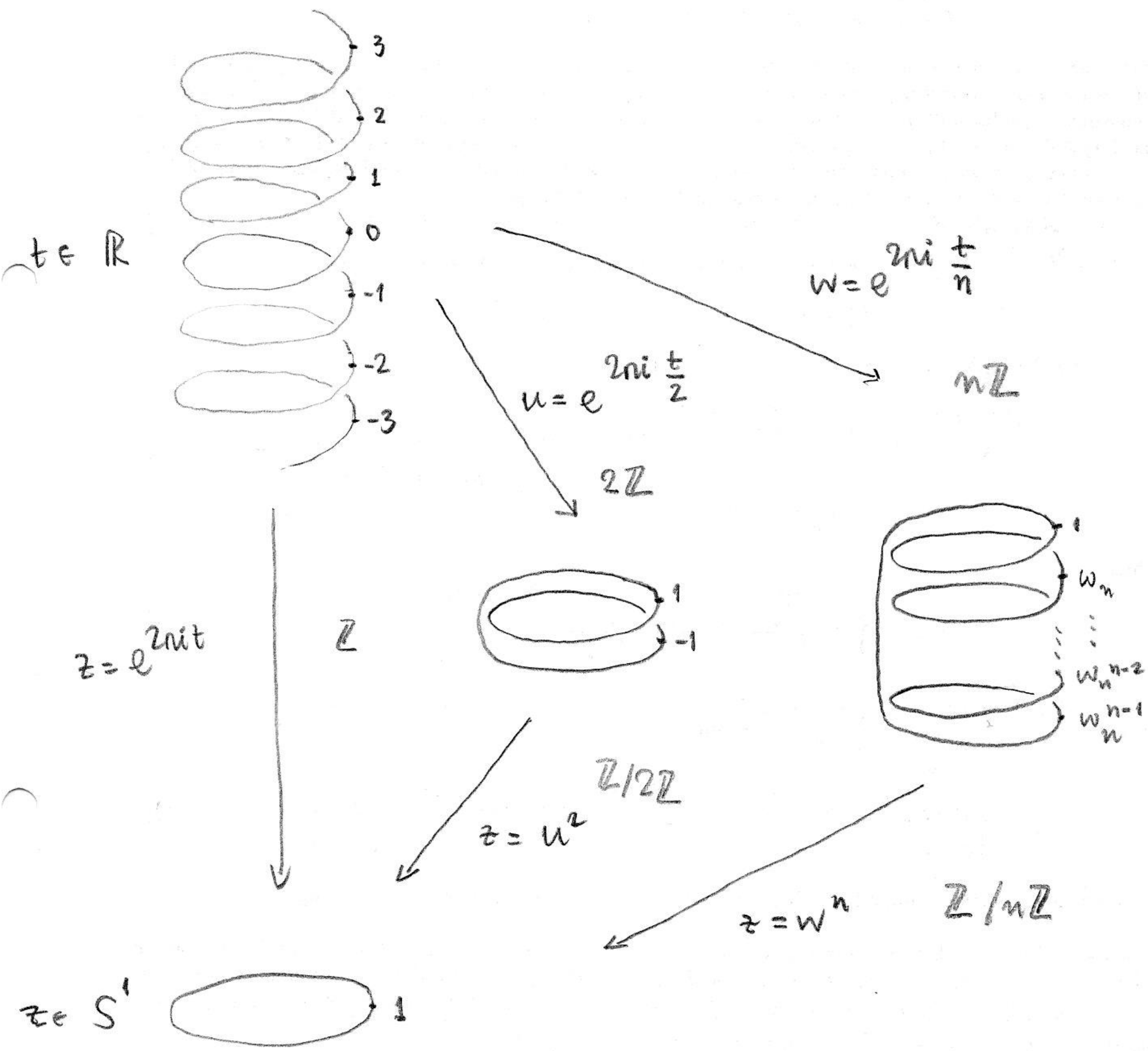
Καλυπτικές προβολές

Πρότυπο: $\quad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.

$$t \longmapsto e^{2\pi i t}.$$



$\pi(S^1) = \mathbb{Z}$. Για κάθε υποομάδα της $\mathbb{Z}$, δηλ. $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \ldots, n\mathbb{Z}, \ldots$ υπάρχει η αντίστοιχη καλυπτική προβολή του S^1.

Εάν $\varphi : K \longrightarrow K'$ είναι μορφισμός συμπλόκων, και L' είναι υποσύμπλοκο του K', τότε $\varphi^{-1}(L')$ είναι το σύνολο όλων των απλόκων στο K των οποίων η εικόνα είναι άπλοκο του L'.

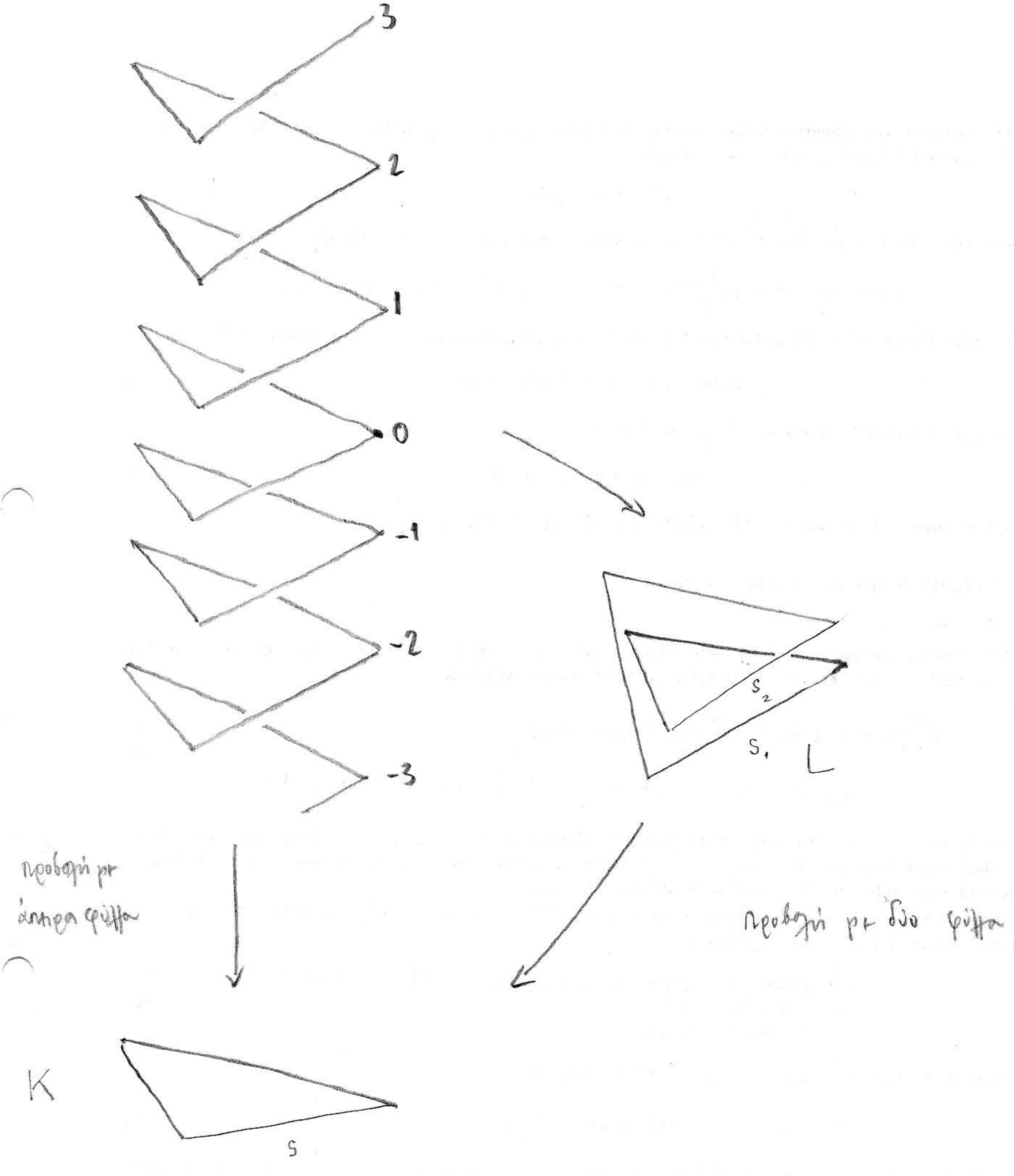
<u>Ασκ.</u> Δείξτε ότι $\varphi^{-1}(L')$ είναι υποσύμπλοκο του K, και ότι εάν L' είναι πλήρες υποσύμπλοκο του K', τότε $\varphi^{-1}(L')$ είναι πλήρες υποσύμπλοκο του K.

<u>Ορισμός</u>. Σύμπλοκο K. Ένα <u>καλυπτικό σύμπλοκο</u> L είναι ένα συνεκτικό σύμπλοκο για το οποίο υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $p : L \longrightarrow K$ τ.ω. για κάθε άπλοκο $s \in K$, η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(s)$ είναι η ξένη ένωση απλόκων,

$$p^{-1}(s) = \bigcup_{i \in I} \tilde{s}_i$$

και $p|_{\tilde{s}_i} : \tilde{s}_i \longrightarrow s$ είναι ισομορφισμός συμπλόκων για κάθε i. $p : L \longrightarrow K$ είναι η <u>καλυπτική προβολή</u>, και τα άπλοκα $\tilde{s}_i$ είναι τα <u>φύλλα</u> της προβολής πάνω από το s.

Η αντίστοιχη εικόνα με σύμπλοκα



Αφού κάθε άπλοκο στο L είναι ισομορφικό με κάποιο άπλοκο στο K, $\dim L = \dim K$.

Ασκ. Δείξτε ότι η εικόνα ενός συνεκτικού συμπλόκου είναι συνεκτικό σύμπλοκο. Συμπεράνετε ότι εάν K έχει καλυπτική προβολή, K είναι συνεκτικό.

Θεώρημα ανύψωσης διαδρομής. $p : L \to K$ καλυπτική προβολή, $\tilde{w}$ σημείο στο L, $w = p(\tilde{w})$. Εάν α είναι διαδρομή στο K με αρχή στο w, υπάρχει μοναδική διαδρομή $\tilde{\alpha} \in L$ με αρχή $\tilde{w}$ τέτοια ώστε $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

($\tilde{\alpha}$ λέγεται ανύψωση της διαδρομής α.)

Απ. Με επαγωγή στο μήκος της διαδρομής α.

Εάν $\alpha = (w, v)$ τότε $\{w, v\}$ είναι 0- ή 1-άπλοκο.

Εάν $w = v$, τότε το φύλλο του $p^{-1}(w)$ που περιέχει το $\tilde{w}$ είναι $\{\tilde{w}\}$ και $\tilde{\alpha} = (\tilde{w}, \tilde{w})$.

Εάν $w \neq v$, τότε το φύλλο του $p^{-1}(\{w,v\})$ που περιέχει το $\tilde{w}$ είναι το 1-άπλοκο $\{\tilde{w}, \tilde{v}\}$, και $(\tilde{w}, \tilde{v})$ είναι διαδρομή μήκους 1, με $p(\tilde{w}, \tilde{v}) = (w, v)$.

Έστω ότι $(\tilde{w}, \tilde{u})$ είναι άλλη διαδρομή με $p(\tilde{w}, \tilde{u}) = (w, v)$. Τότε $\{\tilde{w}, \tilde{u}\}$ και $\{\tilde{w}, \tilde{v}\}$ είναι διαφορετικά φύλλα στο $p^{-1}(\{w,v\})$, που δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Αντίφαση.

Εάν α είναι διαδρομή μήκους $n > 1$, τότε $\alpha = (w, v)\beta$ όπου β είναι διαδρομή μήκους $n-1$.

Υπάρχει μοναδική ανύψωση $(\tilde{w}, \tilde{v})$ της (w, v), και από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{\beta}$ της β με αρχή στο $\tilde{v}$. Άρα $(\tilde{w}\,\tilde{v})\tilde{\beta}$ είναι η μοναδική ανύψωση της α από το $\tilde{w}$. //.

Θεώρημα (ανύψωσης ομοτοπίας)

$p: L \to K$ καλυπτική προβολή, $\tilde{w}$ σημείο στο L, $p(\tilde{w}) = w$. Εάν α, β είναι ομοτοπικές διαδρομές στο K με αρχή στο w, τότε οι ανυψώσεις $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ με αρχή στο $\tilde{w}$ είναι ομοτοπικές και έχουν το ίδιο πέρας.

Απ. Αρκεί να δείξουμε ότι όταν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις στοιχειώδεις κινήσεις στα βήματα $(u,v)(v,x)$, τότε μπορούμε να τις εφαρμόσουμε και στις ανυψώσεις $(\tilde{u}, \tilde{v})(\tilde{v}, \tilde{x})$. Δηλαδή, να δείξουμε ότι όταν $s = \{u, v, x\}$ είναι άπλοκο στο K, τότε $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}\}$ είναι άπλοκο στο L.

Υπάρχει μοναδικό φύλλο πάνω από το s που περιέχει το $\tilde{v}$: $\tilde{s} = \{\tilde{v}, u', x'\}$. Υπάρχει μοναδικό φύλλο πάνω από το s που περιέχει το $\tilde{u}$: $\tilde{t} = \{\tilde{u}, v'', x''\}$.

Έχουμε $p(\tilde{v}) = p(v'') = v$ και $p(\tilde{u}) = p(u') = u$. Αλλά $(\tilde{u}, \tilde{v})$ και $(\tilde{u}, v'')$ είναι ανυψώσεις της (u,v) με αρχή στο $\tilde{u}$. Από μοναδικότητα, $\tilde{v} = v''$. Τα $\tilde{s}$ και $\tilde{t}$ δεν είναι ξένα, και άρα $\tilde{u} = u'$, $\tilde{v} = v''$, $x' = x''$.

Παρόμοια δείχνουμε ότι $\tilde{x} = x'$. //

<u>Θεώρημα</u> Εάν $p : L \to K$ καλυπτική προβολή, $\tilde{w} \in V_L$, $w = p(\tilde{w}) \in V_K$, τότε

$$p_* : \pi(L, \tilde{w}) \longrightarrow \pi(K, w)$$

είναι μονομορφισμός.

<u>Απ.</u> Θεωρούμε $[A], [B] \in \pi(L, \tilde{w})$ με $p_*([A]) = p_*([B])$, δηλαδή $pA \sim pB$. Αλλά A και B είναι οι ανυψώσεις των pA και pB με αρχή στο $\tilde{w}$. Άρα $A \sim B$, δηλαδή $[A] = [B]$. //

Εάν $p : L \to K$ είναι καλυπτική προβολή, και v είναι κορυφή του K, $p^{-1}(v)$ ονομάζεται <u>ίνα</u> της p πάνω από το v. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις ομάδες $\pi(L, \tilde{u})$ όταν $\tilde{u}$ κινείται μέσα στην ίνα $p^{-1}(w)$.

<u>Θεώρημα</u> $p : L \to K$ καλυπτική προβολή. $\tilde{w}$ και $\tilde{u} \in V_L$ με $p(\tilde{w}) = p(\tilde{u}) = w$. Τότε $p_*(\pi(L, \tilde{w}))$ και $p_*(\pi(L, \tilde{u}))$ είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi(K, w)$.

Αντίστροφα, εάν $H \leq \pi(K, w)$ είναι συζυγής της $p_*(\pi(L, \tilde{w}))$ τότε υπάρχει $\tilde{u}$ με $p(\tilde{u}) = w$, τ.ω. $H = p_*(\pi(L, \tilde{u}))$.

Απ. Αφού L είναι συνεκτικό, υπάρχει διαδρομή B από το $\tilde{w}$ στο $\tilde{u}$, και ισομορφισμός

$$\begin{aligned} B_\# : \pi(L, \tilde{w}) &\longrightarrow \pi(L, \tilde{u}) \\ [A] &\longmapsto [B^{-1} A B]. \end{aligned}$$

Αφού $p(\tilde{w}) = p(\tilde{u}) = w$, $p(B)$ είναι κλειστή διαδρομή στο w, δηλαδή $[p(B)] \in \pi(K, w)$, και έχουμε το διάγραμμα ισομορφισμών:

$$\begin{tikzcd} \pi(L, \tilde{w}) \arrow[r, "B_\#"] \arrow[d, "p"] & \pi(L, \tilde{u}) \arrow[d, "p"] \\ p_*(\pi(L, \tilde{w})) \arrow[r, "{[pB]_\#}"'] & p_*(L, \tilde{u}) \end{tikzcd}$$

Αντίστροφα, έστω $H = [\alpha]\, p_*\, \pi(L, \tilde{w})\, [\alpha]^{-1}$, και B ανύψωση της α^{-1} με αρχή στο $\tilde{w}$ και πέρας στο $\tilde{u}$.

Τότε $$[B^{-1}]\, \pi(L, \tilde{w})\, [B] = \pi(L, \tilde{u}),$$

και
$$\begin{aligned} p_*(L, \tilde{u}) &= p_*\big([B^{-1}]\, \pi(L, \tilde{w})\, [B]\big) \\ &= [\alpha]\, p_*\, \pi(L, \tilde{w})\, [\alpha^{-1}] \\ &= H. \end{aligned}$$

//

<u>Θεώρημα</u> Έστω $p: L \to K$ καλυπτική προβολή, $w \in V_K$.
Η ομάδα $\pi(K, w)$ δρα μεταβατικά (στα δεξιά) στην ίνα $p^{-1}(w)$ και η σταθεροποιούσα ενός σημείου $\tilde{w}$ είναι η $p_*(\pi(L, \tilde{w}))$.

<u>Απ.</u> $\tilde{u} \in p^{-1}(w)$, $[\alpha] \in \pi(K, w)$. Θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{\alpha}$ της α με αρχή στο $\tilde{u}$. Το πέρας της $\tilde{\alpha}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της α μέσα στην κλάση ομοτοπίας. Ορίζουμε

$$\tilde{u}\,[\alpha] = \text{πέρας}(\tilde{\alpha}),$$

<u>Άσκ.</u> Επαληθεύστε ότι είναι δεξιά δράση.

Η δράση είναι μεταβατική, γιατί υπάρχει διαδρομή β στο L μεταξύ δύο σημείων της ίνας $p^{-1}(w)$, και $[p\beta]$ στέλνει το ένα σημείο στο άλλο.

$\tilde{w}\,[\alpha] = \tilde{w}$ εάν $\tilde{\alpha}$ είναι κλειστή διαδρομή, δηλαδή εάν $[\tilde{\alpha}] \in \pi(L, \tilde{w})$, και συνεπώς $[\alpha] \in p_*(\pi(L, \tilde{w}))$.

<u>Πόρισμα</u>

α) Εάν $\tilde{w} \in p^{-1}(w)$, τότε

$$\left[\pi(K, w) : p_*(\pi(L, \tilde{w}))\right] = |p^{-1}(w)|$$

β) Εάν $u, w \in V_K$, τότε $|p^{-1}(w)| = |p^{-1}(u)|$.