Απ. α) Το πλήθος των στοιχείων της ίνας $p^{-1}(u)$ είναι ίσο με τον δείκτη της σταθεροποιούσας, (σημ. 28).

β) Εάν $\tilde{u} \in p^{-1}(u)$, θεωρούμε διαδρομή B στο L από το $\tilde{w}$ στο $\tilde{u}$, και $\beta = pB$. Τότε έχουμε ισομορφισμούς

$\tilde{\Phi}: \pi(L,\tilde{w}) \to \pi(L,\tilde{u}) : [A] \longmapsto [B^{-1}AB]$, και

$\varphi: \pi(K,w) \to \pi(K,u) : [\alpha] \longmapsto [\beta^{-1}\alpha\beta]$,

με $p_{w*} \circ \Phi = \varphi \circ p_{u*}$. Συνεπώς ο δείκτης της $\operatorname{im} p_{w*} = p_*(\pi(L,\tilde{w}))$ είναι ίσος με το δείκτη της $\operatorname{im} p_{u*} = p_*(\pi(L,\tilde{u}))$. //.

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε, για κάθε υποομάδα $H \leq \pi(K,w)$, μία καλυπτική προβολή $p: K_H \to K$ με $p_*(\pi(K_H,\tilde{w})) = H$.

Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στις διαδρομές στο K με αρχή στο w: $\alpha \equiv_H \beta$ εάν $\text{πέρας}(\alpha) = \text{πέρας}(\beta)$ και $[\beta\alpha^{-1}] \in H$.

<u>Άσκηση</u>. Δείξτε ότι $\equiv_H$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Συμβολίζουμε $H\alpha$ την κλάση ισοδυναμίας της διαδρομής α, και K_H το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας.

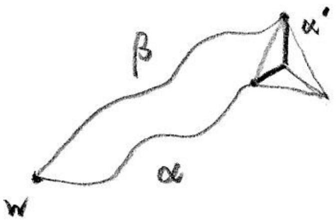
Ορίζουμε τη δομή ενός συμπλόκου στο K_H.

Θεωρούμε ένα άπλοκο s στο K, και α μία διαδρομή στο K από το w σε μία κορυφή του s. Μία <u>επέκταση</u> της α στο s είναι μία διαδρομή $\beta = \alpha\alpha'$ τ.ω. α' είναι διαδρομή στο s.

Ορίζουμε ένα άπλοκο του K_H να είναι ένα σύνολο

$$[s, H\alpha] = \{ H\beta : \beta \text{ είναι επέκταση της } \alpha \text{ στο } s \}.$$

Έτσι $H\beta \in [s, H\alpha]$ <u>εάν</u> υπάρχει διαδρομή α' στο s τ.ω. $[\beta\alpha'^{-1}\alpha^{-1}] \in H$.



<u>Λήμμα</u> Με τον παραπάνω συμβολισμό, K_H είναι σύμπλοκο και $p : K_H \to K$, $p(H\alpha) =$ τέρμα(α), είναι μορφισμός συμπλόκων.

<u>Απ.</u> Όλες οι επεκτάσεις της α στο s με το ίδιο τέρμα είναι ομοτοπικές, αφού ένα άπλοκο s είναι απλά συνεκτικό. Άρα $[s, H\alpha]$ είναι άπλοκο διάστασης ίσης με τη διάσταση του s. Εάν $t \subseteq s$ και τέρμα$(\alpha\alpha') \in t$, για α' διαδρομή στο s, τότε $[t, H\alpha\alpha'] \subseteq [s, H\alpha]$.

$p : H\beta \mapsto$ τέρμα(β) είναι μορφισμός συμπλόκων, αφού

$p([s, H\alpha]) = s$. //

Ορίζουμε για βάση στο K_H την κλάση της τετριμμένης διαδρομής (w,w), $\tilde{w} = H(w,w)$.

<u>Λήμμα</u>. Εάν K είναι συνεκτικό, κάθε διαδρομή α στο K με αρχή στο w, ανυψώνεται σε διαδρομή A στο K_H από το $\tilde{w}$ στο $H\alpha$.

<u>Απ.</u> Ορίζουμε την ανύψωση "βήμα – βήμα".

Εάν $\alpha = (w, v_1) \cdots (v_{n-1}, v)$, ορίζουμε

$\alpha_i = (w, v_1) \cdots (v_{i-1}, v_i)$, $i \geq 1$.

Εάν s_i είναι το άπλοκο $\{v_i, v_{i+1}\}$,

τότε $H\alpha_i$ και $H\alpha_{i+1}$ είναι κορυφές του $[s_i, H\alpha_i]$,

συνεπώς $(H\alpha_i, H\alpha_{i+1})$ είναι ένα βήμα στο K_H.

Άρα $A = (\tilde{w}, H\alpha_1)(H\alpha_1, H\alpha_2) \cdots (H\alpha_{n-1}, H\alpha)$

είναι ανύψωση της α με αρχή στο $\tilde{w}$ και τέρμα $H\alpha$.

<u>Πόρισμα</u> Εάν K είναι συνεκτικό, τότε K_H είναι συνεκτικό.

Θεώρημα Εαν K είναι συνεκτικό σύμπλοκο, $w \in V_K$ και $H \leq \pi(K, w)$, τότε $p : K_H \to K$ είναι καλυπτική προβολή με $p_*(\pi(K_H, \tilde{w})) = H$.

Απ. Έχουμε δείξει ότι ο περιορισμός της p σε κάθε άπλοκο $[s, H\alpha]$ είναι ισομορφισμός $[s, H\alpha] \to s$. Εαν s είναι άπλοκο στο K, το σύνολο κορυφών

$$p^{-1}(s) = \{ H\beta \in K_H : \text{τ.ω. τέρμα}(\beta) \in s \}.$$

$$= \bigcup [s, H\alpha]$$

όπου η ένωση είναι σε όλα τα $H\alpha$ τ.ω. τέρμα$(\alpha) \in s$.

Αλλά αφού s είναι πλήρες υποσύμπλοκο, η αντίστροφη εικόνα του είναι επίσης πλήρες υποσύμπλοκο, δηλαδή το σύνολο απλόκων που ορίζεται από τις κορυφές στο $p^{-1}(s)$.

Για να δείξουμε ότι διαφορετικά φύλλα είναι ξένα μεταξύ τους, υποθέτουμε ότι $H\gamma \in [s, H\alpha] \cap [s, H\beta]$. Τότε $\gamma \equiv_H \alpha\alpha'$ και $\gamma \equiv_H \beta\beta'$, για διαδρομές α' και β' μέσα στο s. Αλλά τότε τέρμα(α') = τέρμα(β'), και $[\alpha\alpha'\beta'^{-1}\beta^{-1}] = [\gamma\gamma^{-1}] = 1 \in H$.

Αρα $\beta \equiv_H \alpha\alpha'\beta'^{-1}$ και $H\beta \in [s, H\alpha]$.

Συνεπώς $[s, H\alpha] = [s, H\beta]$.

Τέλος δείχνουμε ότι $p_*(K_H, \tilde{w}) = H$.

Εάν α είναι κλειστή διαδρομή του K στο w,
υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{\alpha}$ με αρχή στο $\tilde{w}$.
Αλλά έχουμε κατασκευάσει μία τέτοια ανύψωση, τη διαδρομή
A στο K_H από το $\tilde{w}$ στο $H\alpha$. Άρα τέλος$(\tilde{\alpha}) = H\alpha$.

Τώρα $[\alpha] \in p_*\big(\pi(K_H, \tilde{w})\big)$
εάν $[\alpha] = [pA]$, για $[A] \in \pi(K_H, \tilde{w})$
δηλαδή αρχή A = τέλος $A = \tilde{w}$. Αλλά τέλος $A = H\alpha$.
Συνεπώς $H\alpha = \tilde{w} = H(w,w)$. Άρα $\alpha \equiv_H (w,w)$,
δηλαδή $[\alpha\,(w,w)^{-1}] \in H$. Αλλά $[(w,w)] = 1 \in H$,
άρα $[\alpha] \in H$. //

Ειδικότερα, κάθε συνεκτικό σύμπλοκο K έχει ένα
απλά συνεκτικό καλυπτικό σύμπλοκο, το K_H για $H = \{1\}$.
Αυτό ονομάζεται <u>καθολικό καλυπτικό σύμπλοκο</u> και
συμβολίζεται $\tilde{K}$.