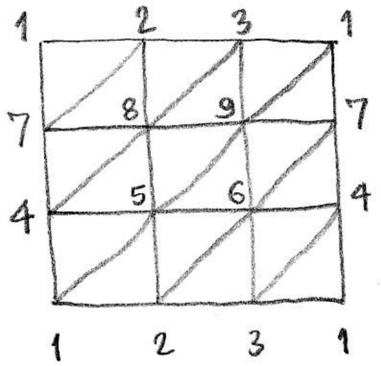
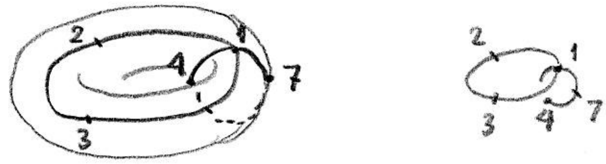
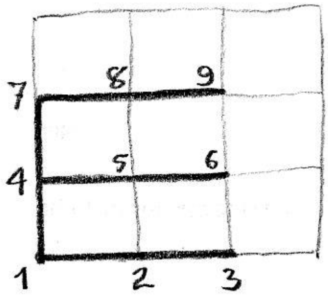
<u>Παράδειγμα</u>. Θα υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα του συμπλόκου K, που έχει 9 κορυφές, $\{1, 2, \dots, 9\}$, 27 1-απλοκα και 18 2-απλοκα, που αντιστοιχούν στις κορυφές, τις ακμές και τα τρίγωνα στο σχήμα. Προσέξτε ότι για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε το σύμπλοκο στο επίπεδο, κάποιες από τις κορυφές και τις ακμές εμφανίζονται δύο φορές, και η κορυφή 1 εμφανίζεται τέσσερις φορές. Στις 3 διαστάσεις μπορούμε να ταυτίσουμε τις "πάνω" με τις "κάτω" ακμές $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$ και τις "δεξιά" με τις "αριστερά" ακμές $(1,4)$, $(4,7)$, $(7,1)$. Αυτό που θα πάρουμε θα είναι η επιφάνεια μίας σπείρας (τόρος, σαμπρέλα). Το σύμπλοκο K προκύπτει από μία τριγωνοποίηση της επιφάνειας της σπείρας.





Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Tietze, επιλέγουμε ένα μέγιστο δέντρο στο K, T με 9 κορυφές και 8 ακμές.



$$T = \big\{ \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{7,8\}, \{8,9\} \big\}.$$

Από το θεώρημα, μία παράσταση της $\pi(K,1)$ έχει γεννήτορες όλα τα βήματα στο K,

και σχέσεις α) τα βήματα στο T

β) για κάθε άπλοκο $\{u,v,x\}$, $(u,v)(v,x) = (u,x)$.

Παρατηρούμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε βήματα (u,v) με $u \neq v$, γιατί από το (β) $(u,u) = (u,v)(v,u)$ για κάποιο 1-άπλοκο $\{u,v\}$ στο T, και από το (α) $(u,v) = 1 = (v,u)$.

Επίσης αρκεί να θεωρήσουμε μόνο ένα από τα δύο βήματα που αντιστοιχούν σε κάθε 1-άπλοκο, γιατί $(u,v)(v,u) = (u,u) = 1$, άρα $(v,u) = (u,v)^{-1}$.

Τα οκτώ βήματα που περιέχονται στο T είναι ίσα με 1.

Θεωρούμε τα υπόλοιπα 19 βήματα, και εφαρμόζουμε τις σχέσεις (β).

$$(1,5) = (1,4)(4,5) = 1$$

$$(2,5) = (1,2)^{-1}(1,5) = 1$$

Παρόμοια $(2,6)=1, \quad (3,6)=1,$

$$(4,8)=1, \quad (5,8)=1,$$

$$(5,9)=1, \quad (6,9)=1.$$

Κατόπιν

$$(7,2)=(7,1)(1,2)=(7,1)$$

$$(8,2)=(7,8)^{-1}(7,2)=(7,1)$$

και παρόμοια, $(8,3)=(7,1) \quad , \quad (9,3)=(7,1)$

Επίσης

$$(3,4)=(3,1)(1,4)=(3,1)$$

$$(6,4)=(3,6)^{-1}(3,4)=(3,1)$$

και παρόμοια $(6,7)=(3,1)$ και $(9,7)=(3,1)$.

Καταλήγουμε ότι $\pi(K,1)$ παράγεται από τά βήματα $(3,1)$ και $(7,1)$. Το βήμα $(9,1)$ δίδει τη σχέση μεταξύ αυτών των δύο:

$$(9,1)=(9,7)(7,1)=(3,1)(7,1)$$

$$(9,1)=(9,3)(3,1)=(7,1)(3,1)$$

δηλαδή $(3,1)(7,1)(3,1)^{-1}(7,1)^{-1}=1$.
Συμπεραίνουμε ότι $\pi(K,1)$ παράγεται από τις κλάσεις ομοτοπίας των μέγιστων διαδρομών $\alpha=(1,2)(2,3)(3,1)$ και $\beta=(1,4)(4,7)(7,1)$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=1$. Συνεπώς

$$\pi(K,1)\cong F_2/F_2' \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την καλυπτική προβολή $p: K_H \to K$ που αντιστοιχεί στην υποομάδα $H = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Εάν α και β είναι οι γεννήτορες της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \langle 2\alpha, \beta \rangle$.

Οι κορυφές του συμπλόκου K_H είναι κλάσεις ισοδυναμίας $H\gamma$ διαδρομών στο K, όπου $\delta \equiv_H \gamma$ εάν $\gamma\delta^{-1} \in H$.

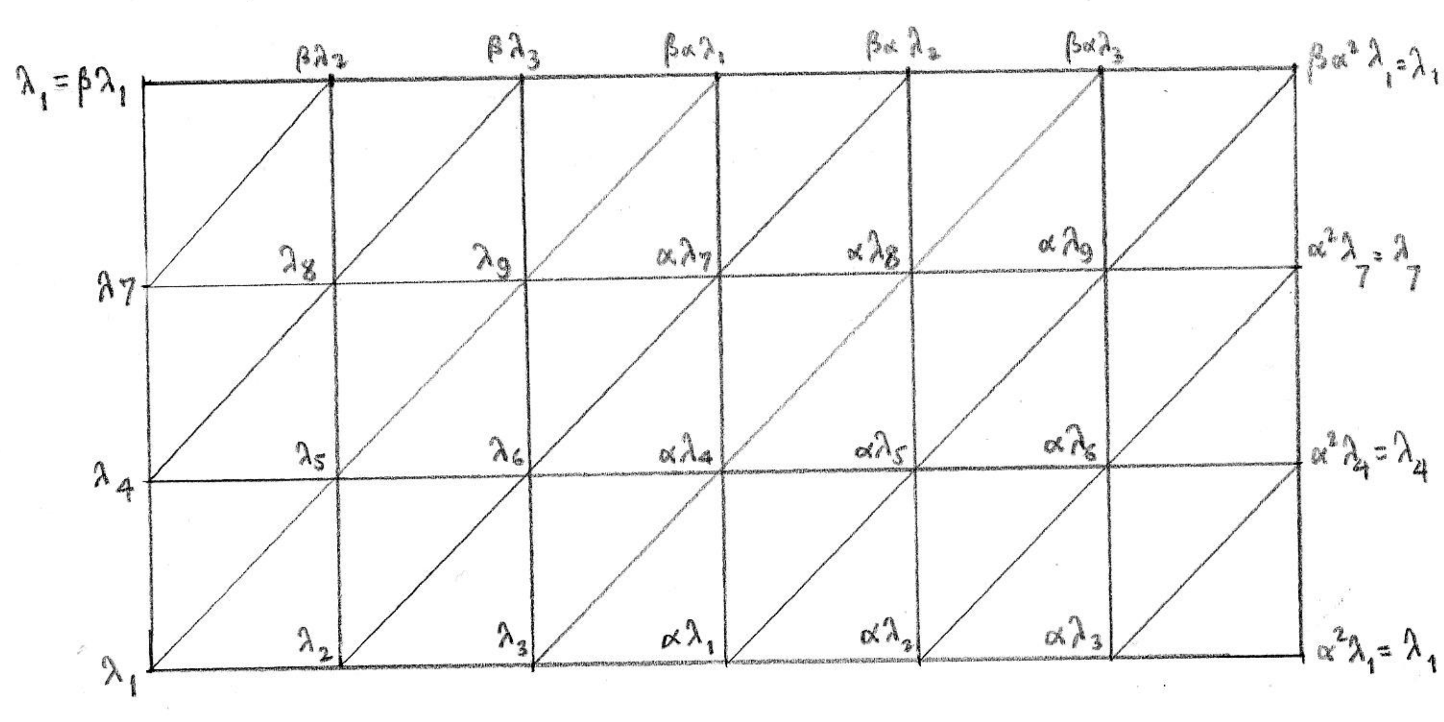
Για κάθε κορυφή i του K, $i = 1, \dots, 9$ επιλέγουμε μία διαδρομή λ_i από το 1 στο i, μέσα στο δέντρο T.

$H\lambda_i = \{\gamma : \gamma\lambda_i^{-1} \in H\}$ δηλαδή $\gamma = \alpha^{2n}\beta^m\lambda_i$

$H\alpha\lambda_i = \{\gamma : \gamma\lambda_i^{-1}\alpha^{-1} \in H\}$ δηλαδή $\gamma = \alpha^{2n+1}\beta^m\lambda_i$.

Βλέπουμε ότι για κάθε κορυφή του K έχουμε 2 κορυφές του K_H.

Μπορούμε να παραστήσουμε το σύμπλοκο K_H ως εξής:



Η προβολή $p : K_H \to K$ απεικονίζει τις κορυφές $H\lambda_i$ και $H\alpha\lambda_i$ στην κορυφή i του K.

Η ίνα στο 1 είναι $\{H\lambda_1, H\alpha\lambda_1\}$, και ο δείκτης της H στην $\pi(K,1)$ είναι

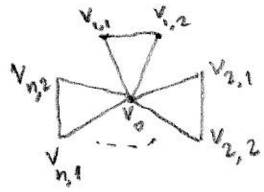
$$[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}] = 2 = |p^{-1}(1)|.$$

Θεώρημα Nielsen-Schreier (απόδειξη Baer, Levi, 1936).

Κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.

Απ. Θεωρούμε F ελεύθερη, με $\operatorname{rank} F = n$, και K το σύμπλοκο διάστασης 1, με $2n+1$ κορυφές και $3n$ 1-απλοκα σε n κύκλους: $V_K = \{v_0, v_{i,1}, v_{i,2}, i=1,\dots,n\}$.

1-απλοκα: $\{v_0, v_{i,1}\}, \{v_0, v_{i,2}\}, \{v_{i,1}, v_{i,2}\}, i=1,\dots,n$.



Τότε $F \cong \pi(K, v_0)$.

Για $H \leq F$, υπάρχει καλυπτική προβολή $p: K_H \longrightarrow K$ με $p_*(\pi(K_H, \tilde{v}_0)) = H'$ την υποομάδα της $\pi(K, v_0)$ που αντιστοιχεί στην $H \leq F$.

Αλλά p_* είναι μονομορφισμός (σελ 80), άρα $\pi(K_H, \tilde{v}_0) \cong H$. Η διάσταση του K_H είναι 1, άρα η ομάδα $\pi(K_H, \tilde{v}_0)$ είναι ελεύθερη, (σελ 72). //

Εάν $[F:H] = j$, τότε έχουμε δει ότι $\operatorname{rank} H = nj - j + 1$. Ας δούμε πως προκύπτει αυτός ο τύπος από τα σύμπλοκα K και K_H. Το σύμπλοκο K έχει $v_K = 2n+1$ κορυφές και $e_K = 3n$ 1-άπλοκα. Αφού $|p^{-1}(w)| = [F:H] = j$, το σύμπλοκο K_H έχει $v_{K_H} = j(2n+1)$ κορυφές,

και $e_{K_H} = 3jn$ 1-απλόκα.

Ένα μέγιστο δέντρο T στο K_H έχει v_{K_H} κορυφές

και $v_{K_H} - 1 = 2jn + j - 1$ 1-απλοκα. Άρα τα 1-απλοκα του

K_H που δεν ανήκουν στο T, που αντιστοιχούν στους γεννήτορες

του $\pi(K_H, \tilde{w})$ μέσω του Θεωρήματος Tietze, είναι

$$e_{K_H} - e_T = 3jn - (2jn + j - 1)$$
$$= jn - j + 1.$$

Θεώρημα: Μία υποομάδα πεπερασμένου δείκτη σε μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα, είναι πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα. //

Θα δούμε ότι, αντίθετα με ότι συμβαίνει στις αβελιανές ομάδες, υπάρχουν υποομάδες πεπερασμένα παραγόμενων ελεύθερων ομάδων που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενες.

Θεώρημα Εάν F είναι ελεύθερη ομάδα σε 2 γεννήτορες, τότε η παράγωγος υποομάδα $F' = [F, F]$ είναι ελεύθερη με άπειρους γεννήτορες.

Απ.

Έστω $\{x, y\}$ το σύνολο γεννητόρων της F.

Η F/F' είναι ελεύθερη αβελιανή, με βάση $\{xF', yF'\}$.

Άρα κάθε δεξί πλευρικό σύνολο της F' έχει μοναδικό αντιπρόσωπο της μορφής $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Αυτοί οι αντιπρόσωποι αποτελούν ένα πλήρες σύνολο Schreier, αφού κάθε αρχικό κομμάτι του $x^m y^n$ είναι επίσης αυτής της μορφής.

Αλλά για κάθε $n > 0$, $\rho_x(x^m y^n) \neq x^m y^n x$,

άρα $t_{x^m y^n, x} \neq 1$. Συνεπώς υπάρχουν άπειρα

$t_{b,x} \neq 1$, και $\operatorname{rank} F' = \infty$. //.