Ελεύθερα γινόμενα.

Το <u>ελεύθερο γινόμενο</u> δύο ομάδων είναι το άθροισμα στην κατηγορία των ομάδων. Δηλαδή, εάν $\{A_k : k \in I\}$ είναι μία οικογένεια ομάδων, το ελεύθερο γινόμενο των A_k είναι μία ομάδα P και μία οικογένεια ομομορφισμών $i_k : A_k \to P$, τ.ω. για κάθε ομάδα G και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $f_k : A_k \to G$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : P \to G$ τ.ω. $f_k = \varphi \circ i_k$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
A_k \arrow[ur, "i_k"] \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

<u>Λήμμα</u> Εάν P, i_k είναι ελεύθερο γινόμενο, i_k είναι μονομορφισμοί.

<u>Απ.</u> Για συγκεκριμένο $k \in I$, θεωρούμε $G = A_k$, $f_k = id_{A_k}$ και f_j τετριμμένο για $j \neq k$. Τότε $\varphi \circ i_k = id_{A_k}$, άρα i_k είναι μονομορφισμός.

Έχουμε δει ότι το ελεύθερο γινόμενο (όπως κάθε άθροισμα) είναι μοναδικό, και το συμβολίζουμε $A_1 * \cdots * A_n$ ή $\mathop{\ast}\limits_{k \in I} A_k$.

<u>Θεώρημα</u> Εάν $\{A_k : k \in I\}$ είναι οικογένεια ομάδων, και P, Q είναι ελεύθερα γινόμενα των A_k, τότε $P \cong Q$.

<u>Παράδειγμα</u> Μία ελεύθερη ομάδα είναι ελεύθερο γινόμενο ελεύθερων κυκλικών ομάδων.

Εάν X είναι βάση της ελεύθερης ομάδας F, για κάθε $x \in X$, $\langle x \rangle$ είναι ελεύθερη κυκλική, και $i_x : \langle x \rangle \hookrightarrow F$.

Για κάθε ομάδα G και συνάρτηση $f : X \to G$, υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : F \to G$ που επεκτείνει την f.

Εάν ορίσουμε $f_x : \langle x \rangle \to G : x^n \mapsto (f(x))^n$,

τότε $\varphi \circ i_x = f_x$

<u>Άσκηση</u> X_k ξένα ανά δύο σύνολα, F_k ελεύθερη ομάδα στο X_k. Δείξτε ότι $* F_k$ είναι η ελεύθερη ομάδα στο $\bigcup X_k$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει το ελεύθερο γινόμενο κατασκευάζοντας ένα ελεύθερο γινόμενο, με τρόπο ανάλογο προς την κατασκευή ελεύθερης ομάδας.

<u>Θεώρημα</u>. Για κάθε οικογένεια ομάδων $\{A_k : k \in I\}$, υπάρχει το ελεύθερο γινόμενο $\underset{k \in I}{*} A_k$.

<u>Απ</u>. Για κάθε $k \in I$, $A_k^{\#} = (A_k \setminus \{1\}) \times \{k\}$.

Τα $A_k^{\#}$ είναι ξένα ανά δύο, και $A = \left(\bigcup_{k \in I} A_k^{\#} \right) \sqcup \{1\}$

είναι το αλφάβητο. Κατασκευάζουμε λέξεις με τα γράμματα του αλφαβήτου, $w = a_1 \dots a_n$, $a_i \in A$.

Μία λέξη είναι <u>ανηγμένη</u> εάν $w = 1$ ή $w = a_1 \dots a_n$ με $a_i \in A_{k_i}^{\#}$ και $k_{i+1} \neq k_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Η ομάδα P έχει στοιχεία όλες τις ανηγμένες λέξεις.

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό των $a_1 \cdots a_n$ και $b_1 \cdots b_m$:

Το γινόμενο είναι: $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ εάν a_n και b_1 ανήκουν σε διαφορετικά $A_k^{\#}$.

Εάν a_n, b_1 ανήκουν στο ίδιο $A_k^{\#}$, $a_n = (a,k)$, $b_1 = (b,k)$

αντικαθιστούμε το $a_n b_1$ με (ab, k) και έχουμε ανηγμένη λέξη.

Εάν $ab = 1 \in A_k$, τότε διαγράφουμε τα $a_n b_1$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τη λέξη $a_1 \cdots a_{n-1} b_2 \cdots b_m$.

Η διαδικασία τελειώνει με μία ανηγμένη λέξη.

1 είναι το ταυτοτικό στοιχείο, και $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$ είναι το αντίστροφο του $a_1 \cdots a_n$, όπου $a_i^{-1} = (a^{-1}, k_i)$ εάν $a_i = (a, k_i)$. Η γραφή σε ανηγμένη μορφή είναι μοναδική.

Η προσεταιριστικότητα αποδεικνύεται με τρόπο ανάλογο με της ελεύθερης ομάδας.

Η ομάδα P και οι εμφυτεύσεις $i_k : A_k \longrightarrow P$, όπου για $a \neq 1$, $i_k(a)$ είναι η λέξη με ένα γράμμα (a,k), αποτελούν ελεύθερο γινόμενο: Για $f_k : A_k \to G$, ορίζουμε $\varphi(a_1 \cdots a_n) = f_{k_1}(\bar{a}_1) \cdots f_{k_n}(\bar{a}_n)$, όπου $a_i = (\bar{a}_i, k_i)$, $\bar{a}_i \in A_{k_i}$. Ελέγχουμε ότι φ είναι ομομορφισμός.

Τότε για $a \in A_k$, $\varphi(i_k(a)) = \varphi((a,k)) = f_k(a)$ //.

Ειδικότερα για δύο ομάδες A και B, συμβολίζουμε το ελεύθερο γινόμενο $A * B$. Τα μή κανονικά στοιχεία της $A * B$ είναι εναλλασσόμενες πεπερασμένες ακολουθίες των στοιχείων του A και του B,

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n$$

όπου μόνο τα a_1 και b_n μπορεί να είναι τα κανονικά.

Θεώρημα κανονικής μορφής.

Εαν $g \in \underset{k \in I}{\ast} A_k$ και $g \neq 1$, τότε g έχει μοναδική παραγοντοποίηση $g = a_1 \cdots a_n$ με διαδοχικά γράμματα σε διαφορετικά $A_k^{\#}$. //.

Θεώρημα $\{A_k, k \in I\}$ οικογένεια ομάδων, με παραστάσεις $A_k = (X_k \mid \Delta_k)$, όπου τα X_k είναι ξένα ανά δύο. Τότε $\underset{k \in I}{\ast} A_k$ έχει παράσταση

$$\left(\bigcup_{k \in I} X_k \;\middle|\; \bigcup_{k \in I} \Delta_k \right).$$

Απ. Από την Άσκηση (σελ 97) έχουμε ισομορφισμό $f: F \to *F_k$,

όπου $F_k = (X_k \mid \phi)$, $F = (\sqcup X_k \mid \phi)$.

Θεωρούμε τις εμφυτεύσεις $i_k : A_k \hookrightarrow \underset{j\in I}{*} A_j$,

και τις προβολές $q_k : F_k \to A_k$ με $\ker q_k$ την

κανονική υποομάδα που παράγεται από το Δ_k.

Για την οικογένεια ομομορφισμών $i_k \circ q_k : F_k \to \underset{j\in I}{*} A_j$

υπάρχει μοναδική επέκταση $\varphi : * F_j \longrightarrow * A_j$.

Δείχνουμε ότι $\ker(\varphi \circ f)$ είναι η κανονική υποομάδα της F

που παράγεται από $\bigcup \Delta_k$. //

Παραδείγματα. 1. D_∞, άπειρη διεδρική ομάδα.

Έχουμε ήδη δει ότι η άπειρη διεδρική ομάδα D_∞ είναι

το ελεύθερο γινόμενο δύο κυκλικών ομάδων τάξης 2,

$$D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 .$$

2. $PSL(2,\mathbb{Z})$, modular group.

$SL(2,\mathbb{Z})$ είναι η ομάδα 2×2 πινάκων $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ και $ad-bc = 1$.

Θεωρούμε τους πίνακες

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $S^2 = -I$, T είναι άπειρης τάξης, και

$TS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(TS)^3 = -I$.

<u>Πρόταση</u> $SL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$.

<u>Απ.</u> Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε αλγεβρικά. Θεωρούμε $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Τότε $S \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$ και $T^n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{bmatrix}$.

Εαν $c \neq 0$ και $a = cq + r$, $0 \leq r < |c|$, τότε

$ST^{-q}X = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ με $|c'| < |c|$. Επαναλαμβάνοντας

αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε σε πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ή $\begin{bmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, με ορίζουσα 1 και $m \in \mathbb{Z}$. Αυτοί οι πίνακες γράφονται

ως T^m ή $S^2 T^m$. Άρα S και T παράγουν την

$SL(2,\mathbb{Z})$. //

Η ομάδα $SL(2,\mathbb{Z})$ δεν είναι ελεύθερο γινόμενο. Θα δούμε

αργότερο ότι είναι "αμάλγαμα". Όμως η ομάδα

$$PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z}) / \{I, -I\}$$

είναι ελεύθερο γινόμενο.

<u>Θεώρημα</u> $PSL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

Εαν θέσουμε $R = TS$, τότε $T = RS^{-1}$, και

η $SL(2,\mathbb{Z})$ παράγεται από δύο στοιχεία πεπερασμένης τάξεως,

S και R, με τάξη 4 και 6 αντίστοιχα.

<u>Λήμμα</u> $PSL(2,\mathbb{R})$ δρά στη σφαίρα του Riemann, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

<u>Απ.</u> Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, ορίζουμε $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ για $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$ και $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$.

<u>Άσκηση</u> i) $\operatorname{Im}(f_A(z)) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$

ii) Εάν $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, τότε $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

Άρα $A \longmapsto f_A$ ορίζει μία (αριστερή) δράση της $SL(2,\mathbb{Z})$ στο $\hat{\mathbb{C}}$. Παρατηρούμε ότι $f_{-A} = f_A$. Συνεπώς έχουμε μία καλά ορισμένη δράση $\{\pm A\} \longmapsto f_A$ της $PSL(2,\mathbb{Z})$ στο $\hat{\mathbb{C}}$. //

Η δράση είναι αξιόπιστη: εάν $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$, τότε $A = \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι εάν $f_A(i) = i$ τότε $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ για κάποιο θ, και εάν επίσης $f_A(2i) = 2i$, τότε $\sin\theta = 0$.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος</u>

Αφού S και R παράγουν το $SL(2,\mathbb{Z})$, οι κλάσεις $\pm S$, $\pm R$ παράγουν το $PSL(2,\mathbb{Z})$. Για να δείξουμε ότι $PSL(2,\mathbb{Z})$ είναι ελεύθερο γινόμενο των $\langle \pm S \rangle$, $\langle \pm R \rangle$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αναγωγή λέξη είναι διαφορετική από το ταυτοτικό στοιχείο. Αφού η δράση της $PSL(2,\mathbb{Z})$ είναι αξιόπιστη, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε εναλλασσόμενη σύνθεση των f_S και $f_R^{\pm 1}$ είναι διαφορετική από την ταυτοτική.

Θα περιοριστούμε στη δράση της $PSL(2,\mathbb{Z})$ στο σύνολο $\mathcal{A} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των αρρήτων αριθμών. $\mathcal{A} = \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$, όπου $\mathcal{N}$ αρνητικοί και $\mathcal{P}$ θετικοί άρρητοι αριθμοί.

Παρατηρούμε ότι $f_S(t) = -\frac{1}{t}$, άρα $f_S(\mathcal{P}) \subset \mathcal{N}$.

και $f_R(t) = 1 - \frac{1}{z}$, $f_R^{-1}(t) = \frac{1}{1-z}$,

άρα $f_R(\mathcal{N}) \subset \mathcal{P}$, $f_R^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{P}$.

Μια ανηγμένη λέξη στο ελεύθερο γινόμενο $\langle f_S \rangle * \langle f_R \rangle$ με περιττό μήκος είναι της μορφής

$w_1 = f_S \circ f_R^{\pm 1} \circ f_S \cdots \circ f_R^{\pm 1} \circ f_S$ ή $w_2 = f_R^{\pm 1} \circ f_S \circ f_R^{\pm 1} \circ \cdots \circ f_S \circ f_R^{\pm 1}$

Αλλά $w_1(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{N}$ και $w_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{P}$, άρα w_1 και w_2 δεν είναι το ταυτοτικό στοιχείο στο $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Εάν w_3 είναι ανηγμένη λέξη με άρτιο μήκος, τότε είτε η w_3 είτε η συζυγής της, $f_S \circ w_3 \circ f_S$, αρχίζει με $f_R^{\pm 1}$ και τελειώνει με f_S.

Εάν $w_3 = f_R \circ f_S \circ \cdots \circ f_R^{\pm 1} \circ f_S$, και $t \in \mathcal{P}$, $t < 1$, τότε $w_3(t) \in f_R(\mathcal{N})$, άρα $w_3(t) > 1$ και $w_3(t) \neq t$.

Εάν $w_3 = f_R^{-1} \circ f_S \circ \dots \circ f_R^{\pm} \circ f_S$ και $t \in \mathcal{P}$, $t > 1$,

τότε $w_3(t) \in f_R^{-1}(\mathcal{N})$, άρα $w_3(t) < 1$ και $w_3(t) \neq t$.

Σε κάθε περίπτωση, μία ανηγμένη λέξη ή μία συζυγής της

είναι διαφορετική από το ταυτοτικό στοιχείο στο $PSL(2,\mathbb{Z})$.