Υποομάδα ελεύθερου γινομένου ομάδων. Το Θεώρημα Kurosh.

Το Θεώρημα Kurosh περιγράφει τη δομή μίας υποομάδας ενός ελεύθερου γινομένου. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στη μελέτη της καλυπτικής προβολής που αντιστοιχεί στην υποομάδα. Πριν δούμε το Θεώρημα Kurosh, θα αποδείξουμε το ακόλουθο, που είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Seifert - van Kampen.

<u>Θεώρημα</u> Θεωρούμε ένα συνεκτικό σύμπλοκο K, και υποσύμπλοκα K_i, $i \in I$, έτσι ώστε $K = \bigcup K_i$. Εαν υπάρχει ένα δέντρο T στο K, τ.ω. για κάθε $i \neq j$, $K_i \cap K_j = T$, τότε

$$\pi(K, w) \cong \mathop{\ast}_{i \in I} \pi(K_i, w_i)$$

για $w \in K$ και $w_i \in K_i$.

<u>Απ</u>. Για κάθε $i \in I$, επιλέγουμε ένα μέγιστο δέντρο T_i του K_i, που περιέχει το T. Τότε $T_i \cap T_j = T$, και αφού η τομή είναι συνεκτική $T_i \cup T_j$ είναι δέντρο. Επαγωγικά, $T^* = \bigcup_{i \in I} T_i$ είναι δέντρο, και είναι μέγιστο στο K επειδή περιέχει όλες τις κορυφές του K.

Από το Θεώρημα Tietze, $\pi(K_i, w_i) = (E_i | \Delta_i)$

όπου E_i είναι τα βήματα στο K_i και Δ_i είναι σχέσεις τύπου α) $(u,v)=1$ εάν (u,v) βήμα στο T_i

και τύπου β) $(u,v)(v,x) = (u,x)$ εάν $\{u,v,x\}$ άπλοκο στο K_i.

Άρα μία παράσταση του ελεύθερου γινομένου είναι $(\bigcup E_i | \bigcup \Delta_i)$.

Αλλά $\bigcup E_i$ είναι το σύνολο E όλων των βημάτων στο K

και $\Delta = \bigcup \Delta_i$ αποτελείται από όλες τις σχέσεις $(u,v)=1$

για (u,v) βήμα σε κάποιο T_i, και $(u,v)(v,x) = (u,x)$ εάν

$\{u,v,x\}$ άπλοκο σε κάποιο K_i. Αλλά (u,v) είναι βήμα σε

κάποιο T_i <u>εάν</u> (u,v) είναι βήμα στο T^*, και $\{u,v,x\}$

είναι άπλοκο σε κάποιο K_i <u>εάν</u> $\{u,v,x\}$ είναι άπλοκο στο K.

Άρα $(\bigcup E_i | \bigcup \Delta_i) = (E | \Delta)$ που είναι η παράσταση

της $\pi(K, w)$. //.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Kurosh για τη δομή των υποομάδων ενός ελεύθερου γινομένου, θα θεωρήσουμε γνωστό το αποτέλεσμα ότι κάθε ομάδα είναι ισομορφική με τη θεμελιώδη ομάδα ενός συμπλόκου διάστασης 2.

Την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θα σκιαγραφήσουμε αργότερα.

Πριν δούμε το Θεώρημα Kurosh ας δούμε κάποια παραδείγματα υποομάδων σε ένα ελεύθερο γινόμενο $A * B$.

Εαν $a \in A$, $b \in B$ διαφορετικά από το ταυτοτικό, τότε ab είναι στοιχείο άπειρης τάξης στην $A * B$, και παράγει μία ελεύθερη κυκλική ομάδα.

Τα ίδια τα A και B είναι υποομάδες της $A * B$, αποτελούμενες από τις λέξεις μήκους 1.

Εάν $w \in A * B$ και $C \leq A$, $D \leq B$ τότε wCw^{-1} και wDw^{-1} είναι υποομάδες της $A * B$.

Το Θεώρημα Kurosh λέει οτι κάθε υποομάδα της $A * B$ είναι ελεύθερο γινόμενο τέτοιων υποομάδων. Πιο συγκεκριμένα, κάθε υποομάδα της $H \leq A * B$ είναι ελεύθερο γινόμενο των τομών της H με τις συζυγείς υποομάδες των A και B, και μίας ελεύθερης ομάδας.

Θεώρημα Kurosh

Εάν $G = \mathop{\ast}\limits_{i \in I} A_i$ και $H \leq G$, τότε

υπάρχει μία ελεύθερη ομάδα $F \leq G$ και μία οικογένεια $H_j \leq G$

τέτοια ώστε

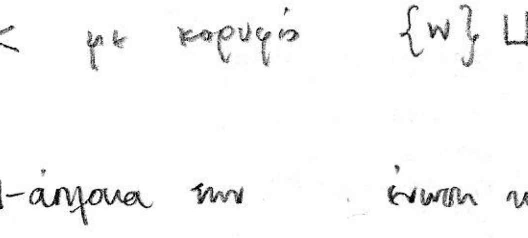
$$H = F * \mathop{\ast}\limits_{j \in J} H_j ,$$

όπου για κάθε j, υπάρχει $g_j \in G$ και $i \in I$ τ.ω.

$$g_j H_j g_j^{-1} \leq A_i .$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι έχουμε συνεκτικά σύμπλοκα K_i με $\pi(K_i, w_i) \cong A_i$. Ορίζουμε ένα συνεκτικό σύμπλοκο K με κορυφές $\{w\} \sqcup \bigsqcup_{i \in I} V_{K_i}$,

1-απλόκα την ένωση των 1-απλόκων των K_i και του δέντρου $T = \{ \{w, w_i\} : i \in I \}$. Τότε από το Θεώρημα,



$$\pi(K, w) \cong \mathop{\ast}\limits_{i \in I} \pi(K_i \cup T, w_i),$$

αλλά $\pi(K_i \cup T, w_i) \cong \pi(K_i, w_i)$

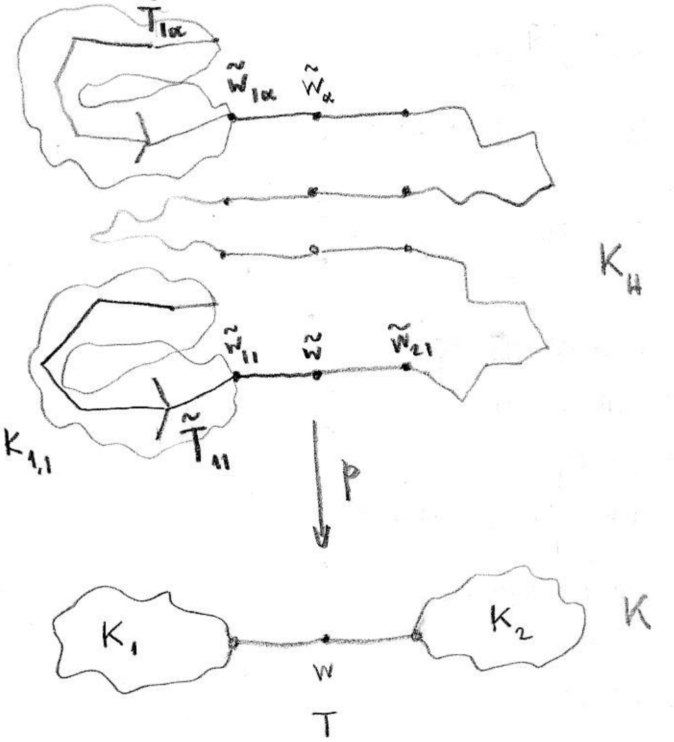
άρα

$$\pi(K, w) \cong \mathop{\ast}\limits_{i \in I} A_i .$$

Ταυτίζουμε την υποομάδα H με υποομάδα του $\pi(K, w)$, και θεωρούμε την καλυπτική προβολή $p : K_H \to K$ που αντιστοιχεί στην υποομάδα H. Επιλέγουμε $\tilde{w} \in p^{-1}(w)$ τ.ω.

$$p_*\big(\pi(K_H, \tilde{w})\big) = H \leq \pi(K, w).$$

Για κάθε $K_i \subset K$, $p^{-1}(K_i)$ είναι η ξένη ένωση των συνεκτικών συνιστωσών $\tilde{K}_{i\alpha}$.
Θέτουμε $J = \{(i,\alpha) : i \in I,\ \tilde{K}_{i\alpha} \text{ συνεκτική συνιστώσα του } p^{-1}(K_i)\}$.



Επιλέγουμε μέγιστο δέντρο $\tilde{T}_{i\alpha}$ σε κάθε $\tilde{K}_{i\alpha}$ και ορίζουμε

$$\tilde{L} = \Big(\bigcup_{(i,\alpha)\in J} \tilde{T}_{i\alpha}\Big) \cup p^{-1}(T).$$

Τέλος επιλέγουμε μέγιστο δέντρο $\tilde{T}$ στο $\tilde{L}$, το οποίο να περιέχει το $p^{-1}(T)$.

(θεωρούμε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $p^{-1}(T)$ ως μία κορυφή, και επιλέγουμε μέγιστο δέντρο στο σύμπλοκο πηλίκο).

Τότε $\tilde{T} \cap \tilde{K}_{i\alpha} = \tilde{T}_{i\alpha}$, αφού $\tilde{T}_{i\alpha}$ είναι μέγιστο δέντρο στο $\tilde{K}_{i\alpha}$.

K_H είναι η ένωση του $\tilde{L}$ και των $\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T}$ για $(i,\alpha) \in J$.

Κάθε τομή $\tilde{L} \cap (\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T})$ και $(\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T}) \cap (\tilde{K}_{k\beta} \cap \tilde{T})$ είναι το δέντρο $\tilde{T}$. Άρα, από το Θεώρημα,

$$\pi(K_H, \tilde{w}) = \pi(\tilde{L}, \tilde{w}) * \left(\mathop{\Large *}_{(i,\alpha)\in J} \pi(\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T}, \tilde{w}_{i\alpha}) \right)$$

όπου $\tilde{w}_{i\alpha} \in p^{-1}(w_i) \cap \tilde{K}_{i\alpha}$.

$\pi(\tilde{L}, \tilde{w})$ είναι ελεύθερη, αφού $\dim \tilde{L} = 1$.

Έστω $\tilde{w}_\alpha \in p^{-1}(w)$ το πέρας της ανύψωσης της (w_i, w) από το $\tilde{w}_{i\alpha}$. Συμβολίζουμε α τη διαδρομή στο δέντρο $\tilde{T}$ από το $\tilde{w}$ στο $\tilde{w}_\alpha$.

Τότε $\pi(\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T}, \tilde{w}_{i\alpha}) = \alpha_{\#}(\pi(\tilde{K}_{i\alpha} \cup \tilde{T}, \tilde{w}))$

όπου $\alpha_{\#}[\beta] = [\alpha^{-1}\beta\alpha]$.

Άρα $\pi(K_H, \tilde{w}) = F * \left(\mathop{\Large *}_{(i,\alpha)\in J} \alpha_{\#}(H_{i\alpha}) \right)$.

και $H = p_*(\pi(K_H, \tilde{w})) = p_*(F) * \left(\mathop{\Large *} (p\alpha)_{\#}(p_*(H_{i\alpha})) \right)$

όπου $p_*(H_{i\alpha}) \leq A_i$.

//.

<u>Αλγεβρική ερμηνεία των $\pi(\tilde{K}_{i\alpha}, \tilde{w}_{i\alpha})$</u>, (από Serre)

Για $G = \underset{i \in I}{\ast} A_i$, συμβολίζουμε $G/A_i = \{gA_i : g \in G\}$

των αριστερών πλευρικών κλάσεων της A_i.

Η υποομάδα H δρά στα αριστερά στο G/A_i : για $h \in H$,

$$h \cdot gA_i = (hg)A_i .$$

Θεωρούμε ένα υποσύνολο $X_i \subseteq G/A_i$, που αποτελείται

από αντιπροσώπους από διαφορετικές τροχιές της δράσης

της H στο G/A_i :

$\alpha \in X_i$ είναι $\alpha = g_\alpha A_i$,

και εάν $\alpha \neq \beta$, $g_\alpha A_i \neq h g_\beta A_i$ για $h \in H$,

δηλαδή $g_\alpha^{-1} H g_\beta \cap A_i = \emptyset$,

ισοδύναμα $H \cap g_\alpha A_i g_\beta^{-1} = \emptyset$.

Για $\alpha \in X_i$ ορίζουμε $H_{i\alpha} = H \cap g_\alpha A_i g_\alpha^{-1}$.

$H_{i\alpha}$ είναι η σταθεροποιούσα του α ως προς τη δράση

της H στο G/A_i. Με αυτό το συμβολισμό, το Θεώρημα

Kurosh είναι

$$H \cong F \ast \Big(\underset{\substack{i \in I \\ \alpha \in X_i}}{\ast} H_{i\alpha} \Big) .$$

Παράδειγμα

Υπάρχει πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $PSL(2,\mathbb{Z})$

ισομορφική με το ελεύθερο γινόμενο

$$G \cong \mathop{\ast}_{i=1}^{s} \mathbb{Z} \ast \mathop{\ast}_{j=1}^{a} \mathbb{Z}_2 \ast \mathop{\ast}_{k=1}^{b} \mathbb{Z}_3$$

για οποιαδήποτε $s, a, b \geq 0$.

Για κάθε τριάδα (s,a,b) υπάρχουν υποομάδες της $PSL(2,\mathbb{Z})$ πεπερασμένης τάξεως, εκτός από τέσσερις:

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,0).$$

(Kulkarni, Michigan Math J. 30, 1983)

Άλλες ιδιότητες ελεύθερων γινομένων.

G είναι <u>ομάδα στρέψης</u> εάν κάθε στοιχείο της G έχει πεπερασμένη τάξη. G είναι ομάδα <u>χωρίς στρέψη</u> εάν κάθε στοιχείο της G έχει άπειρη τάξη.

<u>Πρόταση</u>. Εάν κάθε A_i είναι ομάδα στρέψης, H είναι ομάδα χωρίς στρέψη και $H \leq \ast_i A_i$, τότε H είναι ελεύθερη ομάδα.

<u>Πρόταση</u> Κάθε πεπερασμένη υποομάδα της $\ast_i A_i$ είναι συζυγής μιας υποομάδας της A_i για κάποιο i.

Ειδικότερα, κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της $\ast A_i$ είναι συζυγό με ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης της A_i για κάποιο i.

<u>Παρατήρηση</u>: Μία άπειρη ομάδα μπορεί να έχει μέγιστες p-υποομάδες που να μην είναι ισομορφικές: εάν A και B είναι πεπερασμένες p-ομάδες, τότε είναι μέγιστες p-υποομάδες στην $A \ast B$.

Πρόταση Θεωρούμε $g \in A * B$ και $1 \neq a \in A$.

Εάν $gag^{-1} \in A$, τότε $g \in A$.

Ειδικότερα, εάν $g \notin A$, τότε $gAg^{-1} \cap A = 1$.

Πρόταση Θεωρούμε $g, h \in A * B$ με $gh = hg$.

Τότε είτε τα g και h ανήκουν στο ίδιο συζυγές ενός από τους παράγοντες, είτε g και h είναι δυνάμεις του ίδιου στοιχείου.

Για πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G, ορίζουμε $\mu(G)$ τον ελάχιστο αριθμό γεννητόρων σε μία παράσταση της G.

Θεώρημα Grushko

$$\mu(A * B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Table Tennis lemma (Κριτήριο Klein, λήμμα Schottky)

Ομάδα G δρά στο σύνολο X. H_1, H_2 δύο υποομάδες της G, με $|H_1| \geq 3$, $|H_2| \geq 2$. H η υποομάδα που παράγεται από τις H_1 και H_2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά υποσύνολα X_1 και X_2 του X, με $X_2 \not\subseteq X_1$, τ.ω.

$$g(X_2) \subseteq X_1 \quad \text{για κάθε } g \in H_1,\ g \neq 1.$$

$$g(X_1) \subseteq X_2 \quad \text{για κάθε } g \in H_2,\ g \neq 1.$$

Τότε $H \cong H_1 * H_2$.

Απ. Θεωρούμε μία μη κενή ανηγμένη λέξη w στα στοιχεία των $H_1 \setminus \{1\}$, $H_2 \setminus \{1\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι w δεν είναι το ταυτοτικό στοιχείο στο H.

Εάν $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots b_{k-1} a_k$, $a_1, \dots, a_k \in H_1$
$b_1, \dots, b_{k-1} \in H_2$

τότε

$$\begin{aligned} w(X_2) &= a_1 b_1 \cdots a_{k-1} b_{k-1} a_k (X_2) \\ &\subseteq a_1 b_1 \cdots a_{k-1} b_{k-1} (X_1) \\ &\subseteq a_1 b_1 \cdots a_{k-1} (X_2) \\ \cdots &\subseteq a_1 (X_2) \subseteq X_1. \end{aligned}$$

Άρα $w \neq 1$.

Εάν $w = b_1 a_1 b_2 \cdots a_{k-1} b_k$, επιλέγουμε $a \in H_1 \setminus \{1\}$,

και έχουμε, από το προηγούμενο, $a w a^{-1} \neq 1$.

Άρα $w \neq 1$.

Εάν $w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k$, επιλέγουμε $a \in H_1 \setminus \{1, a_1^{-1}\}$,

και έχουμε $a w a^{-1} \neq 1$, άρα $w \neq 1$.

Εάν $w = b_1 a_1 b_2 \cdots b_k a_k$, επιλέγουμε $a \in H_1 \setminus \{1, a_k\}$,

και έχουμε $a w a^{-1} \neq 1$, άρα $w \neq 1$. //

<u>Άσκηση</u> Εφαρμόστε το TTL στα σύνολα

$X_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x| > |y| \}$ και

$X_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x| < |y| \}$

για να δείξετε ότι οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

παράγουν μία ελεύθερη υποομάδα της $SL(2, \mathbb{Z})$.