Αμαλγάματα (عمل الجماع).

Θεωρούμε μία οικογένεια ομάδων A_k, $k \in I$, και μία ομάδα B, έτσι ώστε για κάθε $k \in I$ υπάρχει μονομορφισμός $\varepsilon_k : B \longrightarrow A_k$, με $B_k = \varepsilon_k(B)$. Άθροισμα των ομάδων A_k με αμαλγάμωση της ομάδας B, ή απλώς αμάλγαμα των (A_k, ε_k) είναι μία ομάδα A και μία οικογένεια ομομορφισμών $i_k : A_k \longrightarrow A$, τ.ω. για κάθε ομάδα G και οικογένεια ομομορφισμών $f_k : A_k \longrightarrow G$ με $f_k \circ \varepsilon_k = f_\ell \circ \varepsilon_\ell$ για $k, \ell \in I$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : A \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $f_k = \varphi \circ i_k$ για κάθε $k \in I$.

Θεώρημα Για κάθε A_k, $k \in I$, B και $\varepsilon_k : B \longrightarrow A_k$, όπως παραπάνω, υπάρχει το αμάλγαμα, και κάθε δύο αμαλγάματα με αυτά τα δεδομένα είναι ισομορφικά.

Απ. Θεωρούμε παράσταση $(X_k \mid \Delta_k)$ για κάθε A_k, $k \in I$. Ορίζουμε

$$\Delta = \{ \varepsilon_k(b)\, \varepsilon_\ell(b^{-1}) \ : \ b \in B,\ k, \ell \in I \}$$

Τότε η ομάδα A με παράσταση

$$\Big(\bigsqcup_{k \in I} X_k \ \Big|\ \Big(\bigsqcup_{k \in I} \Delta_k\Big) \cup \Delta \Big)$$

και οι προφανείς ομομορφισμοί $i_k : A_k \longrightarrow A$ που προκύπτουν από τις $X_k \hookrightarrow \bigsqcup_{\ell \in I} X_\ell$, αποτελούν αμάλγαμα.

Πράγματι, εάν G είναι ομάδα, $f_k : A_k \to G$ ομομορφισμοί και $f_k \circ \varepsilon_k = f_\ell \circ \varepsilon_\ell$, ορίζουμε $\tilde{\varphi} : \langle \bigsqcup X_k \rangle \to G$ τ.ω. $\tilde{\varphi}(x) = f_k(x)$ εάν $x \in X_k$.

Εάν a ανήκει στην κανονική υποομάδα που παράγεται από $(\bigsqcup \Delta_k) \cup \Delta$, τότε $a \in \ker \tilde{\varphi}$, αφού για $a \in \Delta_k$, $\tilde{\varphi}(a) = f_k(a) = 1$ και για $b \in B$,

$$\tilde{\varphi}\big(\varepsilon_k(b)\, \varepsilon_\ell(b^{-1})\big) = \big(f_k \circ \varepsilon_k(b)\big)\big(f_\ell \circ \varepsilon_\ell(b^{-1})\big) = 1 .$$

Άρα ορίζεται ομομορφισμός $\varphi : A \longrightarrow G$ με $f_k = \varphi \circ i_k$.

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως συνήθως για την καθολική ιδιότητα απεικόνισης. //.

Το άθροισμα των A_1 και A_2 με αμαλγάμωση μέσω της $\vartheta = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1^{-1} : B_1 \longrightarrow B_2$, συμβολίζεται $A_1 *_\vartheta A_2$ ή $A_1 *_B A_2$.

<u>Πόρισμα</u>. $$A_1 *_\vartheta A_2 = (A_1 * A_2)/N$$

όπου N είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $b\,\vartheta(b^{-1})$ για $b \in B_1$. //.

<u>Παράδειγμα</u>. Εαν $B = \{1\}$, τότε $A_1 *_\vartheta A_2 = A_1 * A_2$.

Για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα των ομάδων που προκύπτουν ως αμαλγάματα, θα βρούμε κανονική μορφή των στοιχείων τους. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό θα περιγράψουμε την κανονική μορφή για αμάλγαμα δύο ομάδων. Για πεπερασμένα αμαλγάματα μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι

$$\mathop{\ast}_{k=1}^{n}{}_{B}\, A_k \cong \Big(\cdots\big(\big(A_1 *_B A_2\big) *_B A_3\big) *_B \cdots\Big) *_B A_n$$

Για $k=1,2$, επιλέγουμε ένα αριστερό εγκάρσιο σύνολο S_k για το A_k/B_k, με $1 \in S_k$.

Για $a \in A_k$, ορίζουμε $\lambda(a)$ να είναι ο αντιπρόσωπος στο S_k του πλευρικού συνόλου aB_k, $\{\lambda(a)\} = S_k \cap (aB_k)$.

Τότε για κάθε $a \in A_k$, $a = \lambda(a)\, b$ για μοναδικό $b \in B_k$.

<u>Ορισμός</u> Μία <u>κανονική μορφή</u> είναι ένα στοιχείο του $A_1 * A_2$ της μορφής

$$\lambda(a_1)\,\lambda(a_2)\cdots\lambda(a_n)\, b$$

όπου $b \in B_1$, $n \geq 0$, $(k_1, \dots, k_n) \in \{1,2\}^n$, με $k_{i+1} \neq k_i$ για $i = 1, \dots, n-1$, και $\lambda(a_i) \in S_{k_i}$.

<u>Θεώρημα Κανονικής Μορφής</u>

Για κάθε $wN \in A_1 *_\theta A_2$ υπάρχει <u>μοναδικό</u> στοιχείο $F(w) \in A_1 * A_2$ σε κανονική μορφή, τέτοιο ώστε

$$wN = F(w)\, N.$$

Απ.

Καθε πλευρικό σύνολο του N έχει έναν αντιπρόσωπο στο $A_1 * A_2$ της μορφής $w = x_1 y_1 \cdots x_n y_n$, όπου $x_i \in A_1$, $y_i \in A_2$ και μόνον τα x_1 και y_n μπορεί να είναι 1. Θα δώσουμε έναν αλγόριθμο που από το w κατασκευάζει ένα στοιχείο $F(w)$ σε κανονική μορφή τ.ω. $F(w)N = wN$.

Εστω $w = x_1 y_1$.

Εαν $y_1 = 1$, τοτε $w = x_1 = \lambda(x_1) b = F(w)$ που είναι κανονική μορφή, αφού $b \in B_1$.

Εαν $x_1 = 1$, τότε $w = y_1 = \lambda(y_1) b$ με $b \in B_2$. Τότε $\vartheta^{-1}(b) \in B_1$ και $F(w) = \lambda(y_1)\vartheta^{-1}(b)$ είναι κανονική μορφή με $wN = F(w)N$.

Εαν $x_1 \neq 1$, $y_1 \neq 1$, τοτε $x_1 y_1 = \lambda(x_1) b y_1$, και $y_1^{-1} b^{-1} \vartheta(b) y_1 \in N$, άρα στο $(A_1 * A_2)/N$

$$x_1 y_1 N = \lambda(x_1) b y_1 (y_1^{-1} b^{-1} \vartheta(b) y_1) N = \lambda(x_1)\vartheta(b) y_1 N.$$

Αλλά $z = \vartheta(b) y_1 \in A_2$, άρα $z = \lambda(z) b_2$ για $b_2 \in B_2$.

Αρα $x_1 y_1 N = \lambda(x_1)\lambda(z) b_2 N = \lambda(x_1)\lambda(z)\vartheta^{-1}(b_2) N$, και $F(w) = \lambda(x_1)\lambda(z)\vartheta^{-1}(b_2)$ είναι κανονική μορφή.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί, και να δώσει μία κανονική μορφή $F(w)$ για κάθε λέξη $w \in A_1 * A_2$, με $wN = F(w)N$: στο j βήμα αντικαθιστούμε
$\lambda(a_1)\cdots\lambda(a_m) b x_j y_j \cdots x_n y_n$ με $\lambda(a_1)\cdots\lambda(a_{m'}) b' x_{j+1} y_{j+1} \cdots x_n y_n$.

Για να δείξουμε τη μοναδικότητα θα κατασκευάσουμε ένα ομομορφισμό Φ με πεδίο ορισμού $A_1 *_\vartheta A_2$ και θα δείξουμε ότι εάν $F(w) \neq F(w')$ τότε

$$\Phi(F(w)N) \neq \Phi(F(w')N).$$

Εστω M το σύνολο όλων των κανονικών μορφών. Εαν $a \in A_i$, ορίζουμε $|a| : M \to M$ την απεικόνιση

$$|a|\big(\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n) b\big) = F\big(a\,\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n) b\big).$$

Παρατηρούμε ότι εάν a και $\lambda(a_1)$ ανήκουν σε διαφορετικά A_k, τότε $a\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n) b$ έχει τη μορφή $x_1 y_1 \cdots x_n y_n$, ενώ εάν a και $\lambda(a_1)$ ανήκουν στο ίδιο A_k, τότε $(a\lambda(a_1))\,\lambda(a_2) \cdots \lambda(a_n) b$ έχει τη μορφή $x_1 y_1 \cdots x_n y_n$.

Η απεικόνιση $|1|$ είναι η ταυτοτική, και εξετάζοντας περιπτώσεις, ανάλογα με τη θέση των αρχικών όρων, δείχνουμε ότι, εάν $a, a' \in A_k$ τότε

$$|a| \circ |a'| = |aa'|.$$

Άρα $|a^{-1}| = |a|^{-1}$, και $|a|$ είναι μετάθεση του M για κάθε $a \in A_k$.

Άρα έχουμε δύο ομομορφισμούς, $\varphi_1 : A_1 \to S_M$ και $\varphi_2 : A_2 \to S_M$.

Από την καθολική ιδιότητα απεικόνισης των ελεύθερων γινομένων, έχουμε ομομορφισμό

$$\varphi : A_1 * A_2 \longrightarrow S_M .$$

με $\varphi(\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n)\, b) = |\lambda(a_1)| \circ \cdots \circ |\lambda(a_n)| \circ |b|$.

Αφού $|b| = |\theta(b)|$ για κάθε $b \in B_1$, έχουμε

$b\,\theta(b^{-1}) \in \ker \varphi$, και συνεπώς καλά ορισμένο ομομορφισμό

$$\Phi : A_1 *_\theta A_2 \longrightarrow S_M ,$$

με

$$\Phi(\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n)\, b) = \varphi(\lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n)\, b) .$$

Αλλά $|\lambda(a_1)| \circ \cdots \circ |\lambda(a_n)| \circ |b| \,(1) = \lambda(a_1) \cdots \lambda(a_n)\, b$,

δηλαδή $\Phi(wN) : 1 \longmapsto F(w)$.

Άρα εάν $G(w)$ είναι κανονική μορφή στο wN,

$G(w) = \Phi(wN)(1) = F(w)$.

Συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο wN του αμαλγάματος $A_1 *_\theta A_2$ έχει μοναδική κανονική μορφή $F(w)$ με

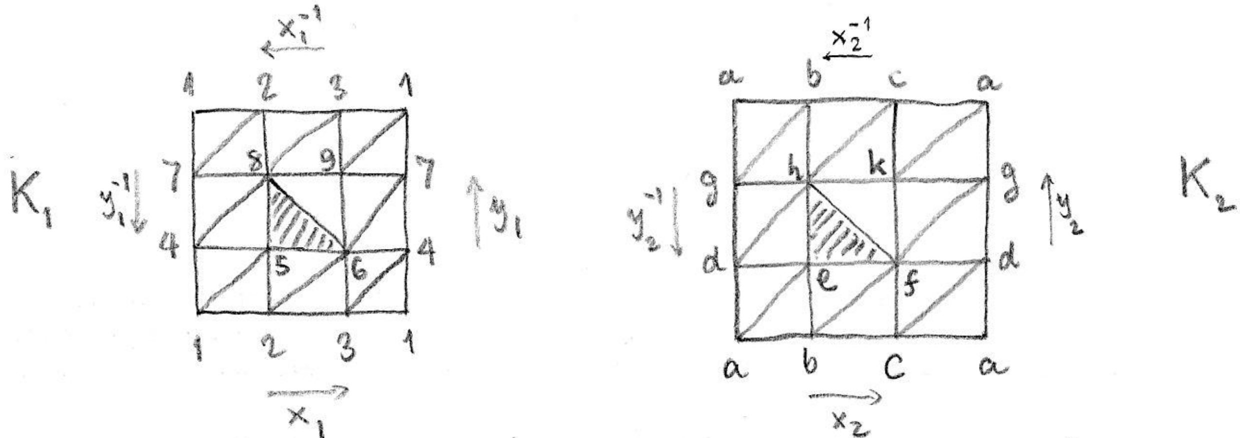
$$wN = F(w)N .$$

//

<u>Παράδειγμα</u> $A_1 \cong F_2$ με γεννήτορες x_1, y_1

$A_2 \cong F_2$ με γεννήτορες x_2, y_2.

$B_1 = \langle x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \rangle$, $\vartheta(x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}) = x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}$.



K_1 το σύμπλοκο του σχήματος, χωρίς το 2-άπλοκο $\{5, 6, 8\}$.

Όταν ταυτίσουμε τις αντίστοιχες πλευρές έχουμε μία σπείρα με μία τρύπα. Παρόμοια, K_2 το σύμπλοκο, χωρίς το 2-άπλοκο $\{e, f, g\}$.

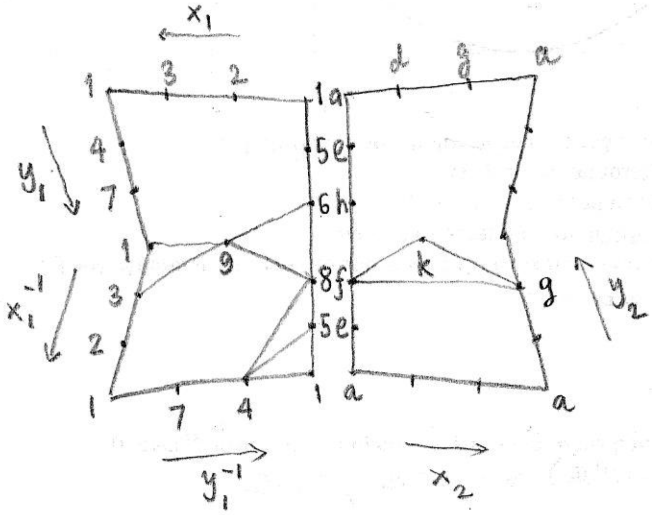
$x_1 = (12)(23)(31)$ $\qquad x_2 = (ab)(bc)(ca)$

$y_1 = (14)(47)(71)$ $\qquad y_2 = (ad)(dg)(ga)$.

Η διαδρομή $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}$ είναι ομοτοπική με τη διαδρομή $\beta_1 = (15)(56)(68)(85)(51)$. Άρα $B_1 = \langle [\beta_1] \rangle$

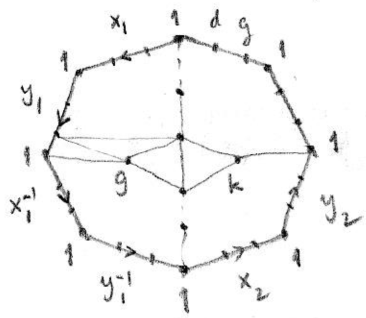
Η διαδρομή $x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}$ είναι ομοτοπική με τη διαδρομή $\beta_2 = (ae)(ef)(fh)(he)(ea)$. Άρα $\vartheta([\beta_1]) = [\beta_2]$.

Κόβουμε κατά μήκος της (15) και της (ae), "ανοίγουμε" τα σύμπλοκα και τα συγκολλούμε κατά μήκος των διαδρομών β_1 και β_2. Έτσι στην ομάδα $A_1 * A_2$ ταυτίζουμε το στοιχείο $[\beta_1]$ με το $\vartheta([\beta_1])$. Το σύμπλοκο K που προκύπτει από αυτή τη ταύτιση έχει θεμελιώδη ομάδα $A_1 *_\vartheta A_2$.



Συμπληρώνουμε τα υπόλοιπα άπλοκα στα K_1 και K_2.

Ταυτίζονται οι κορυφές $1 \equiv a$, $5 \equiv e$, $6 \equiv h$, $8 \equiv f$.



Το οκτάγωνο, με ταύτιση των πλευρών, δίδει την επιφάνεια γένους 2.