Θεώρημα. Θεωρούμε το αμάλγαμα $A = A_1 *_B A_2$ των ομάδων A_1 και A_2, μέσω των $\varepsilon_1 : B \to A_1$, $\varepsilon_2 : B \to A_2$, με ομομορφισμούς $i_1 : A_1 \to A$, $i_2 : A_2 \to A$.

i) i_1 και i_2 είναι μονομορφισμοί.

ii) Εαν $A_1' = i_1(A_1)$ και $A_2' = i_2(A_2)$, τοτε

$$\langle A_1', A_2' \rangle = A_1 *_B A_2 \quad \text{και} \quad A_1' \cap A_2' = i_1 \circ \varepsilon_1(B) = i_2 \circ \varepsilon_2(B).$$

Απ. Με το συμβολισμό της απόδειξης (σελ. 121–123).

i) Εαν $a \in A_k$, $i_k(a) = j_k(a) N$, όπου $j_k : A_k \to A_1 * A_2$ είναι η κανονική εμφύτευση στο ελεύθερο γινόμενο.

Εαν $a \neq 1$, η κανονική μορφή $F(a) = \lambda(a) b \neq 1$, και $\Phi(i_k(a)) = \varphi(j_k(a)) = |\lambda(a)| \circ |b|$.

Αλλά $|\lambda(a)| \circ |b| \, (1) = \lambda(a) b \neq 1$, άρα $\Phi(i_k(a)) \neq 1$, και συνεπώς $i_k(a) \neq 1$.

ii) Αφού $A_1 *_B A_2 = (A_1 * A_2)/N$, τα A_1', A_2' παράγουν όλο το A.

Εαν $u \in A_1' \cap A_2'$, τοτε υπάρχουν $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ τ.ω. $a_1 N = u = a_2 N$. Από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών $\lambda(a_1) b_1 = u = \lambda(a_2) b_2$, έχουμε $\lambda(a_1) = \lambda(a_2)$ και $b_1 = b_2$.

Αλλά αφού $\lambda(a_1)\lambda(a_2)$ και $\lambda(a_2)\lambda(a_1)$ πρέπει να είναι διαφορετικές κανονικές μορφές, $\lambda(a_1)=\lambda(a_2)$ μόνον όταν είναι ίσα με 1. Άρα

$$u = a_k N = \lambda(a_k)\, b_k N = b_k N \quad ,$$

και συνεπώς $u = i_k(b_k) \in i_k \circ \varepsilon_k(B)$ για $k=1,2$.

Αντίστροφα, εάν $b \in B$, τότε $\varepsilon_1(b)N \in A_1'$ και $\varepsilon_1(b)N = \varepsilon_2(b)N \in A_2'$. Άρα $i_1\circ\varepsilon_1(B) = i_2\circ\varepsilon_2(B) \subseteq A_1' \cap A_2'$. //

Από το Θεώρημα Κανονικής Μορφής, έχουμε το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u> Ένα στοιχείο του αμαλγάματος $A_1 *_B A_2$ έχει πεπερασμένη τάξη <u>εάν</u> είναι συζυγές προς ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης στο A_1' ή στο A_2'.

Θεώρημα (Higman, Neumann, Neumann).

Θεωρούμε ομάδα G, υποομάδες $A \leq G$, $B \leq G$ και $\varphi : A \to B$ ισομορφισμό. Τότε υπάρχει ομάδα H που περιέχει την G και ένα στοιχείο $t \in H$ τέτοιο ώστε $\varphi = \gamma_t : a \mapsto tat^{-1}$.

Απ. Θεωρούμε $\langle u \rangle$ και $\langle v \rangle$ δύο άπειρες κυκλικές ομάδες, και ορίζουμε $K_1 = G * \langle u \rangle$, $K_2 = G * \langle v \rangle$.

Θέτουμε $L_1 = \langle G, u^{-1}Au \rangle \leq K_1$. Για οποιαδήποτε $g_1, \dots, g_n$ και $a_1, \dots, a_n$, $n \geq 1$, με $g_1 \neq 1$, $a_n \neq 1$, η λέξη $g_1 u^{-1} a_1 u \, g_2 u^{-1} a_2 u \cdots g_n u^{-1} a_n u$ είναι μη τετριμμένη στην K_1, και συνεπώς στην υποομάδα L_1.

Άρα
$$L_1 \cong G * u^{-1}Au.$$

Παρόμοια, εάν $L_2 = \langle G, v^{-1}Bv \rangle \leq K_2$, τότε
$$L_2 \cong G * v^{-1}Bv.$$

Θεωρούμε τους ισομορφισμούς $id_G : G \to G$ και
$$\vartheta' = \gamma_v^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_u : u^{-1}Au \longrightarrow v^{-1}Bv,$$
$\vartheta'(u^{-1}au) = v^{-1}\varphi(a)v$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $\vartheta = id_G * \vartheta' : L_1 \to L_2$, (Άσκηση).

Ορίζουμε $H = K_1 *_\vartheta K_2$. Από το Θεώρημα της σελ 126,

η H περιέχει υποομάδα ισομορφική με την L_1,

άρα και υποομάδες A' και G' ισομορφικές με τις A και G.

Ταυτίζουμε τις A, G με τις A', G'. Τότε, για κάθε

$a \in A$, $u^{-1} a u$ ταυτίζεται μέσα στο H με το

$v^{-1} \varphi(a) v$. Ορίζουμε $t = vu^{-1} \in H$, και

έχουμε $\varphi(a) = vu^{-1} a u v^{-1} = t a t^{-1}$. //

Θεώρημα (Higman, Neumann, Neumann)

Κάθε αριθμήσιμη ομάδα G είναι ισομορφική με μία υποομάδα μίας ομάδας H με δύο γεννήτορες.

Απ. Απαριθμούμε τα στοιχεία της G: $1 = g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$

Θεωρούμε $H = G * F$, $F = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ με γεννήτορες x, y,

και τις υποομάδες της H:

$$A = \langle y, x^{-1} y x, \dots, x^{-n} y x^n, \dots \rangle$$

$$B = \langle x, g_1 y^{-1} x y, g_2 y^{-2} x y^2, \dots, g_n y^{-n} x y^n, \dots \rangle$$

Η A είναι ελεύθερη με αυτούς τους γεννήτορες,

και $\varphi : x^{-n} y x^n \longmapsto g_n y^{-n} x y^n$ είναι ισομορφισμός.

Από το Θεώρημα, υπάρχει ομάδα H^{Ω} που περιέχει την H και ένα στοιχείο $t \in H$ τ.ω. $\varphi(a) = tat^{-1}$ για κάθε $a \in A$.

Θα δείξουμε ότι $\langle y, t \rangle \leq H^{\Omega}$ περιέχει την G.

Έχουμε $x = \varphi(y) = tyt^{-1} \in \langle y, t \rangle$. Επίσης για κάθε n, $t x^{-n} y x^{n} t^{-1} = \varphi(x^{-n} y x^{n}) = g_n y^{-n} x y^{n}$.

Άρα $g_n \in \langle x, y, t \rangle = \langle y, t \rangle$. //

<u>Πόρισμα</u> Εάν G είναι αριθμήσιμη ομάδα, τότε υπάρχει ομάδα H με δύο γεννήτορες τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq 1$, η H περιέχει στοιχείο τάξης n <u>εάν</u> η G περιέχει στοιχείο τάξης n. //

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε υποσύνολο των πρώτων αριθμών υπάρχει ομάδα με δύο γεννήτορες που έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης για τους αντίστοιχους πρώτους.

<u>Πόρισμα</u> Υπάρχουν υπεραριθμήσιμες κλάσεις ισομορφισμού πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων.