Γράφημα Cayley

Έχουμε ορίσει ένα γράφημα ως ένα σύμπλοκο διάστασης 1. Τέτοια γραφήματα ονομάζονται και απλά ή συνδυαστικά γραφήματα. Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν πιο γενικό ορισμό γραφήματος, στο οποίο θα προσθέσουμε "διακόσμηση".

Ορισμός Ένα γράφημα Γ αποτελείται από δύο σύνολα V_Γ και E_Γ και δύο απεικονίσεις $E_\Gamma \longrightarrow V_\Gamma \times V_\Gamma \; : \; e \longmapsto (o(e), t(e))$

και $E_\Gamma \longrightarrow E_\Gamma \; : \; e \longmapsto \bar{e}$, με τις ιδιότητες:

για κάθε $e \in E_\Gamma$, $e \neq \bar{e}$, $\bar{\bar{e}} = e$ και $o(e) = t(\bar{e})$.

$e \in E_\Gamma$ είναι ακμή του γραφήματος

$v \in V_\Gamma$ είναι κορυφή του γραφήματος

$o(e)$ είναι η αρχή της ακμής e, $t(e)$ είναι το πέρας της ακμής e, και $\bar{e}$ είναι η αντίθετη της ακμής e.

Ένας προσανατολισμός στο γράφημα Γ είναι η επιλογή ενός συνόλου $E_+ \subseteq E_\Gamma$ τ.ω. $E_+ \cap \overline{E}_+ = \emptyset$ και $E_\Gamma = E_+ \cup \overline{E}_+$.

<u>Ορισμός</u> Έστω ομάδα G και X πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G. Το <u>γράφημα Cayley</u> $\Gamma_{G,X}$ είναι το προσανατολισμένο γράφημα με $V_\Gamma = G$, $E_\Gamma = E_+ \sqcup \overline{E}_+$ όπου $E_+ = G \times S$. Η προσανατολισμένη ακμή $e = (g,x)$ έχει $o(e) = g$, $t(e) = gx$.

<u>Θεώρημα</u> $\Gamma_{G,X}$ είναι συνεκτικό γράφημα, και G δρά αξιόπιστα στο $\Gamma_{G,X}$ (από τα αριστερά).

<u>Απ.</u> $\Gamma_{G,X}$ είναι συνεκτικό, γιατί μία λέξη στο X που παριστάνει το στοιχείο g ορίζει μία διαδρομή από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_g.

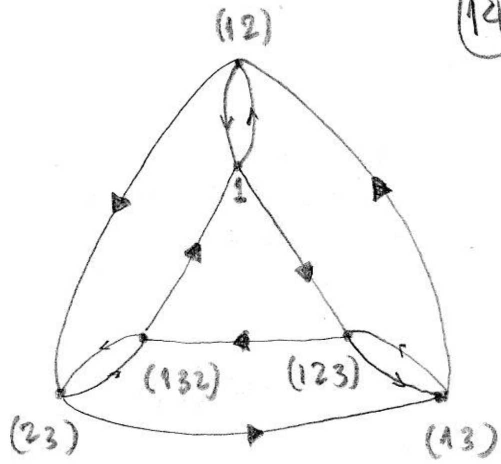
G δρά στις κορυφές $g \cdot v_h = v_{gh}$.

Αυτή η δράση επεκτείνεται στις ακμές: εάν $e = (h,x)$ είναι η ακμή με $o(e) = h$, $t(e) = hx$, τότε $g \cdot e$ είναι η ακμή (gh, x) με $o(g.e) = gh$ και $t(g.e) = ghx$.

Παραδείγματα

$G = S_3 \,,\quad X = \{(12), (123)\}$.

$\rightarrow \quad \blacktriangleright$



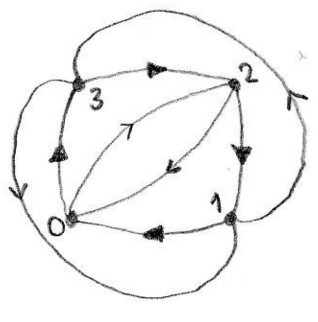
$G = \mathbb{Z} \,,\quad X = \{1\}$.

$G = \mathbb{Z} \,,\quad X = \{2,3\}$

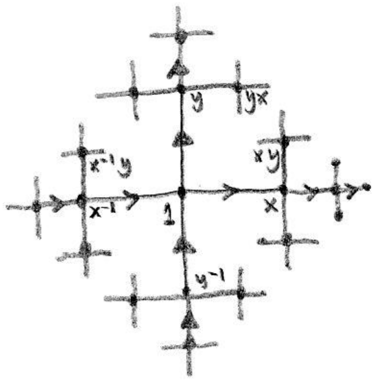
$G = \mathbb{Z}_2 \,,\quad X = \{1\}$

$G = \mathbb{Z}_4 \,,\quad X = \{2,3\}$

$\rightarrow \quad \blacktriangledown$



$G = F_2 \,,\quad X = \{x, y\}$



Θεώρημα Το γράφημα Cayley $\Gamma_{G,X}$ είναι δέντρο **εάν** G είναι ελεύθερη ομάδα με βάση X.

Απ.

Εάν G είναι ελεύθερη ομάδα με βάση X, κάθε στοιχείο της G γράφεται ως ανηγμένη λέξη. Έστω G_n το σύνολο των στοιχείων της G που έχουν μήκος n. Εάν g έχει μήκος n,

$$g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

τότε η κορυφή v_g γειτνιάζει με μοναδική κορυφή v_h με $h \in G_{n-1}$, δηλαδή $h = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$.

Έτσι έχουμε απεικονίσεις $G_n \longrightarrow G_{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$.

Από το αντίστροφο σύστημα $\cdots G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 = \{1\}$ κατασκευάζουμε ένα δέντρο, το οποίο είναι ισομορφικό με το $\Gamma_{G,X}$.

Αντίστροφα, εάν Γ είναι ένα δέντρο, Γ είναι συνεκτικό και κάθε στοιχείο της G συνδέεται με μία διαδρομή με το $\{1\}$, άρα X είναι σύνολο γεννητόρων της G, και αφού δεν υπάρχουν κύκλοι μήκους $n \leq 2$, $X \cap X^{-1} = \emptyset$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανηγμένη λέξη $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ που αντιστοιχεί στο $1 \in G$. Επιλέγουμε μία τέτοια λέξη ελάχιστου μήκους n. Αφού $X \cap X^{-1} = \emptyset$, $n \geq 3$.

Θεωρούμε τα στοιχεία $p_i \in G$ που αντιστοιχούν στις υπολέξεις $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_i^{\varepsilon_i}$, για $i = 0, \dots, n$. Αφού η λέξη έχει ελάχιστο μήκος, αυτά είναι διαφορετικά για $i = 0, \dots, n-1$, και $p_0 = p_n = 1$. Αφού $n \geq 3$, τα διαδοχικά ζεύγη (p_i, p_{i+1}) για $i = 0, \dots, n-1$ και (p_n, p_0) είναι όλα διαφορετικά, και ορίζουν μία κλειστή διαδρομή στο Γ. Άτοπο, αφού Γ είναι δέντρο.

<u>Θεώρημα</u> Μία ομάδα G είναι ελεύθερη εάν και μόνον εάν G δρα ελεύθερα σε ένα δέντρο.

<u>Απ.</u> Εάν G είναι ελεύθερη, τότε δρα ελεύθερα στο γράφημα Cayley $\Gamma_{G,X}$ που είναι δέντρο.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο θα χρειαστούμε την έννοια της θεμελιώδους περιοχής:

<u>Θεώρημα</u> Εάν η ομάδα G δρα σε ένα συνεκτικό γράφημα Γ, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathcal{F}$ των γεωμετρικών σημείων $|\Gamma|$ τέτοιο ώστε:

α) $\mathcal{F}$ είναι κλειστό

β) $\{ g \cdot \mathcal{F} : g \in G \} = |\Gamma|$

γ) Δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{F}$ που να ικανοποιεί τα (α) και (β).

$\mathcal{F}$ ονομάζεται <u>θεμελιώδης περιοχή</u> για τη δράση της G στο Γ.

Θα περιγράψουμε μία θεμελιώδη περιοχή για μία ελεύθερη δράση της ομάδας G σε ένα δέντρο. Επιλέγουμε μία κορυφή $v \in \Gamma$, και θεωρούμε υποδέντρα $\mathcal{T}$ τέτοια ώστε

α) $v \in \mathcal{T}$

β) εάν u και w είναι διαφορετικές κορυφές στο $\mathcal{T}$, δεν υπάρχει στοιχείο της G τέτοιο ώστε $g \cdot u = w$.

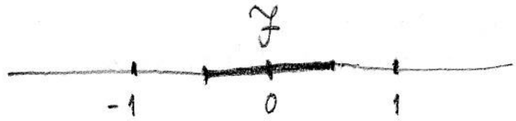
Τότε υπάρχει ένα μέγιστο υποδέντρο $\mathcal{A}$ με τις παραπάνω ιδιότητες.

Η ένωση των εικόνων του $\mathcal{A}$ από τη δράση της G, $G \cdot \mathcal{A}$ περιέχει όλες τις κορυφές του Γ. Εάν e είναι ακμή του Γ που δεν περιέχεται στο $G \cdot \mathcal{A}$ και e έχει μία κορυφή στο $\mathcal{A}$, θεωρούμε την ημιακμή h_e: Το κλειστό διάστημα $[0, \frac{1}{2}] \subset |\Gamma|$ που συνδέεται με το $|\mathcal{A}|$.

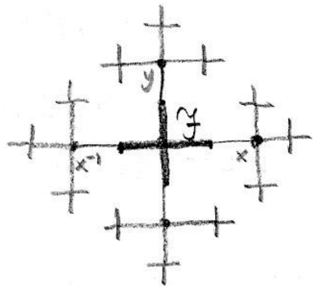
Η ένωση του $|\mathcal{A}|$ και όλων των παραπάνω ημιακμών αποτελεί θεμελιώδη περιοχή $\mathcal{F}$ για τη δράση της G στο Γ. (Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε Meier, σελ 31-33.)

Παραδείγματα

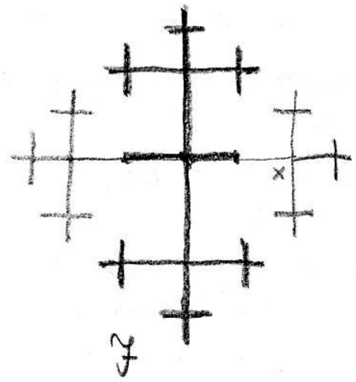
$G = \mathbb{Z}$



$G = F_2 = \langle x, y \rangle$



$G = \mathbb{Z} = \langle x \rangle$



Όταν G δρά στο γράφημα Cayley, A αποτελείται από μία μόνο κορυφή, και $\mathcal{F}$ είναι το "άστρο" που αποτελείται από αυτή την κορυφή και τα μισά των ακμών που την έχουν ως άκρο.

<u>Θεώρημα</u> Το σύνολο S των $g \in G$ για τα οποία $g \neq 1$ και $g \cdot \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, αποτελεί σύνολο γεννητόρων της G.

<u>Απ.</u> Θεωρούμε $g \in G$, κορυφή $v \in \mathcal{F}$ και διαδρομή

α από την v στην $g \cdot v$. Η διαδρομή α περιέχεται στην ένωση πεπερασμένου πλήθους εικόνων της $\mathcal{F}$,

$$\{g_0\mathcal{F}, g_1\mathcal{F}, \dots, g_n\mathcal{F}\} \quad \text{με} \quad g_0 = 1,$$

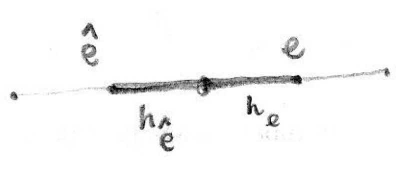
τέτοιων ώστε $g_i\mathcal{F} \cap g_{i+1}\mathcal{F} \neq \emptyset$ για $i=0,\dots,n-1$.

Αλλά τότε $g_i^{-1} g_{i+1} \in S$ για κάθε $i=0,\dots,n-1$, και επομένως g είναι γινόμενο στοιχείων του S. //.

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος.

Όταν λέμε ότι η ομάδα G δρα ελεύθερα στο δέντρο $\mathcal{T}$, εννοούμε ότι η G δρα ελεύθερα στο σύνολο των κορυφών του $\mathcal{T}$, και επιπλέον ότι δεν υπάρχουν αντιστροφές, δηλαδή $g \in G$ και $e \in E_{\mathcal{T}}$ τ.ω. $g \cdot e = \bar{e}$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι G δρα ελεύθερα στο $\mathcal{T}$, με θεμελιώδη περιοχή $\mathcal{F}$. Για κάθε ημιακμή h_e στην $\mathcal{F}$, θεωρούμε το $g_e \in G$ για το οποίο $g_e \cdot \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ είναι το μέσο της e. Έστω S' το σύνολο όλων αυτών των στοιχείων. Παρατηρούμε ότι εάν $g_e \in S'$, τότε επίσης $g_e^{-1} \in S'$: υπάρχει ακμή $\hat{e}$ τ.ω. $g_{\hat{e}} = g_e^{-1}$.



Το σύνολο S' είναι σύνολο γεννητόρων της G, και μπορούμε να επιλέξουμε $S \subset S'$ έτσι ώστε $S' = S \cup S^{-1}$ και $S \cap S^{-1} = \phi$. (Αφού δεν επιτρέπουμε αναστροφή, S δεν περιέχει στοιχεία τάξης 2.)

Για κάθε $g_e \in S'$, θεωρούμε το υποδέντρο $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}$, με κορυφές $u \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{A}$ για τις οποίες η γεωδαισιακή διαδρομή (χωρίς πισωγυρίσματα) από την v στην u περιέχει την ακμή e.

Τώρα εφαρμόζουμε μία παραλλαγή του Table Tennis lemma (Meier, σελ 70) για να δείξουμε ότι G είναι ελεύθερη ομάδα με βάση S. Αφού για κάθε $g_e \in S'$, $g_e(v) \in \mathcal{T}_e$, και για κάθε $g_f \in S' \setminus \{g_e^{-1}\}$, $g_e(\mathcal{T}_f) \subsetneq \mathcal{T}_e$, συμπεραίνουμε ότι G είναι ελεύθερη ομάδα με βάση S. //

Το Θεώρημα Nielsen-Schreier είναι άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος. Εάν G δρα ελεύθερα σε ένα δέντρο και $H \leq G$, τότε H δρα ελεύθερα και συνεπώς είναι ελεύθερη ομάδα.