Γινόμενο υποσυνόλων

Εαν S, T είναι μη κενά υποσύνολα της G,

$$ST = \{ st : s \in S, t \in T \}.$$

Άσκ: $S(TU) = (ST)U$.

Θεώρημα Εαν $|G| < \infty$, $S, T \leq G$, τοτε

$$|ST|\,|S \cap T| = |S|\,|T|.$$

Απ. $\varphi : (s,t) \to st$. Δείχνουμε οτι $\varphi^{-1}(x) = \{ (sd, d^{-1}t) : d \in S \cap T \}$. //

Κανονική υποομάδα

Μία υποομάδα K της G είναι κανονική εαν για κάθε $a \in G$,

$$aKa^{-1} = K.$$

Ισοδύναμα:

- Κάθε συζυγία $\gamma_a : G \to G$ απεικονίζει το K στον εαυτό του.
- Εαν $x \in K$, κάθε συζυγής του x, $axa^{-1} \in K$.
- Εαν $K \leq G$, K είναι κανονική εαν για κάθε $x, y \in G$,
  $xy \in K$ εαν $yx \in K$.
- $K \leq G$ κανονική εαν για κάθε $a \in G$, $aKa^{-1} \leq K$.
- $K \leq G$ κανονική εαν για κάθε $a \in G$, $aK = Ka$.

Συμβολισμός: $K \lhd G$.

εαν K κανονική, δεν χρειάζεται η διακριση δεξιό/αριστερό συμπ. σύνολο, και γράφουμε G/K για οποιοδήποτε

<u>Άσκ.</u> Εάν $K \triangleleft G$ και $K \leq S \leq G$, τότε $K \triangleleft S$.

Εάν X είναι υποσύνολο της G, η <u>κανονική υποομάδα που παράγεται από το X</u> είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει το X, συμβολίζεται $\langle X \rangle^G$.

<u>Άσκ.</u> Εάν $K, H \triangleleft G$, τότε $K \cap H \triangleleft G$.

Άρα $$\langle X \rangle^G = \bigcap_{\substack{K \triangleleft G \\ X \subseteq K}} K .$$

<u>Άσκ.</u> $$\langle X \rangle^G = \langle \{ a x a^{-1} : x \in X,\ a \in G \} \rangle .$$

Εάν $a, b \in G$, ο <u>μεταθέτης</u> των a, b είναι το
$$[a, b] = a b a^{-1} b^{-1} .$$

Η <u>μεταθετική υποομάδα</u> της G (ή <u>παράγωγος υποομάδα</u>) είναι η
$$G' = [G, G] = \langle \{ [a,b] : a, b \in G \} \rangle .$$

<u>Άσκ.</u> G αβελιανή εάν $G' = 1$.
$$G' = \{ a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1} : a_i \in G,\ n \geq 2 \} .$$
(Rotman σ.34)

<u>**Θεώρημα**</u> $G' \triangleleft G$.

<u>Απ.</u> $$g (a b a^{-1} b^{-1}) g^{-1} = g a g^{-1}\, g b g^{-1}\, g a^{-1} g^{-1}\, g b^{-1} g^{-1} = [g a g^{-1}, g b g^{-1}] .$$

<u>Θεώρημα</u> Εάν $K \lhd G$, τότε το σύνολο των πλευρικών συνόλων της K στην G είναι ομάδα, με πράξη $(S,T) \mapsto ST$, η οποία συμβολίζεται G/K.

<u>Απ</u>. Η πράξη $(S,T) \mapsto ST$ είναι προσεταιριστική, για οποιαδήποτε υποσύνολα της G.

Εάν $S = Ka$, $T = Kb$, και $K = a^{-1}Ka$,

$$KaKb = Ka(a^{-1}Ka)b$$
$$= K(aa^{-1})Kab = Kab.$$

Δηλαδή το γινόμενο δύο πλευρικών συνόλων είναι πλευρικό σύνολο, και η πράξη είναι καλά ορισμένη.

Ουδέτερο στοιχείο $K1 = K$: $K \cdot Ka = Ka$. ✓

Αντίστροφο του Ka, $(Ka)^{-1} = Ka^{-1}$.

$$Ka^{-1}Ka = Ka^{-1}a = K \quad ✓.$$

- φυσικός ομομορφισμός: $\nu : G \longrightarrow G/K : a \longmapsto Ka$.

είναι επιμορφισμός, με $\ker \nu = K$.

<u>Θεώρημα</u> $K \lhd G$. G/K αβελιανή <u>εάν</u> $G' \leq K$.

Θεωρήματα Ισομορφισμού

1ο $f: G \to H$ ομομορφισμός. Τότε

$$G/_{\ker f} \cong \operatorname{im} f.$$

2ο $K \trianglelefteq G$, $H \leq G$. Τότε $K \cap H \trianglelefteq H$ και

$$H/_{(K\cap H)} \cong KH/_K.$$

3ο $K \trianglelefteq G$, $H \trianglelefteq G$, $K \leq H$. Τότε

$H/_K \trianglelefteq G/_K$ και $$(G/K)/_{(H/K)} \cong G/_H.$$

Θεώρημα αντιστοιχίας

$K \trianglelefteq G$, $\nu: G \longrightarrow G/_K$.

Οι οικογένειες $\mathcal{S}$: όλων των υποομάδων της G που περιέχουν την K, και Q: όλων των υποομάδων της $G/_K$ βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία:

$$\nu_* : \mathcal{S} \longrightarrow Q : S \longmapsto \nu(S) = S/_K.$$

και

- εάν $T \leq S$, τότε $\nu_*(T) \leq \nu_*(S)$ και $[S:T] = [\nu_*(S) : \nu_*(T)]$
- εάν $T \trianglelefteq S$, τότε $\nu_*(T) \trianglelefteq \nu_*(S)$ και $S/_T \cong \nu_*(S)/_{\nu_*(T)}$.