Δέντρα και αμαλγάματα.

Εαν η ομάδα G δρά στο γράφημα X, έχουμε δράση της G στο V_X και στο E_X, και ικανοποιούνται οι σχέσεις $g\cdot\bar{e} = \overline{g\cdot e}$ και $o(g\cdot e) = g\cdot(o(e))$.

Η ομάδα δρα <u>χωρίς αντιστροφές</u> εαν δεν υπάρχει $g\in G$ και $e\in E_X$ τ.ω. $g\cdot e = \bar{e}$. Εαν G δρά στο γράφημα X χωρίς αντιστροφές, το πηλίκο του X από τη δράση της G είναι το γράφημα $G\backslash X$ με κορυφές $G\backslash V_X$, ακμές $G\backslash E_X$ και

$$\overline{[e]} = [\bar{e}], \quad o([e]) = [o(e)], \quad t([e]) = [t(e)].$$

Ορίζεται φυσικός μορφισμός γραφημάτων $p: X \longrightarrow G\backslash X$.
Για ένα δέντρο T, που είναι απλά συνεκτικό, έχουμε μία ιδιότητα ανύψωσης.

<u>Λήμμα</u> Εαν T είναι δέντρο και $f: T \longrightarrow G\backslash X$ μορφισμός γραφημάτων, v κορυφή στο T, w κορυφή στο X τ.ω. $p(w) = f(v)$. Τοτε υπάρχει μορφισμός γραφημάτων $\tilde{f}: T \longrightarrow X$ τ.ω. $p\circ\tilde{f} = f$ και $\tilde{f}(v) = w$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & G\backslash X \end{tikzcd}$$

(Για την απόδειξη, δείτε D. Cohen, σελ 184.)

Εαν T είναι μέγιστο δέντρο στο ${}_G\backslash X$, και

$i : T \longrightarrow {}_G\backslash X$ ο εγκλεισμός, τότε $\tilde{T} = \tilde{i}(T)$

είναι δέντρο στο X. $V_{\tilde{T}}$ τέμνει κάθε τροχιά

της δράσης της G σε ακριβώς μία κορυφή. $\tilde{T}$ ονομάζεται *δέντρο αντιπροσώπων* για τη δράση της G στο γράφημα X.

Εαν ${}_G\backslash X$ είναι δέντρο, τότε $T = {}_G\backslash X$ και

$\tilde{T} \longrightarrow {}_G\backslash X$ είναι ισομορφισμός. Λέμε ότι $\tilde{T}$

είναι *θεμελιώδη γράφημα* για τη δράση της G στο X.

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει ένα αμάλγαμα με όρους γραφημάτων. Αυτήν την κατασκευή γενικεύει η θεωρία Bass-Serre.

Θεώρημα (Serre, σελ 32). G δρα στο γράφημα X χωρίς αντιστροφές,

και $T : \overset{u}{\bullet} \xrightarrow[e]{} \overset{v}{\bullet}$ είναι θεμελιώδη γράφημα

για τη δράση, $T \subset X$.

G_u και G_v είναι οι σταθεροποιούσες υποομάδες των κορυφών u και v του T.

$G_e = G_{\bar{e}}$ είναι η σταθεροποιούσα υποομάδα της ακμής e.

Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

α) X είναι δέντρο.

β) Ο ομομορφισμός $G_u *_{G_e} G_v \longrightarrow G$

ο επαγόμενος από τους εμφυτευσμούς $G_u \hookrightarrow G$ και

$G_v \hookrightarrow G$, είναι ισομορφισμός.

<u>Απ.</u> Υπενθυμίζουμε ότι X είναι δέντρο σημαίνει ότι X είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλους. Η απόδειξη προκύπτει από 2 Λήμματα.

Λήμμα 1: X είναι συνεκτικό <u>εανν</u> G παράγεται από $G_u \cup G_v$.

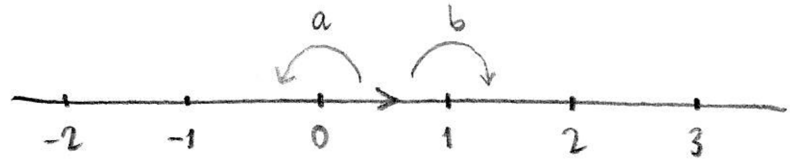
Λήμμα 2: X δεν περιέχει κύκλο <u>εανν</u> $G_u *_{G_e} G_v \to G$ είναι μονομορφισμός.

//.

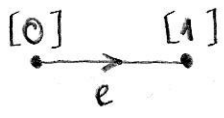
<u>Παράδειγμα</u>. Θεωρούμε την πραγματική ευθεία ως ένα γράφημα X με $V_X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \{ e_n = (n, n+1) : n \in \mathbb{Z} \}$ και $E_X = \mathcal{A} \sqcup \bar{\mathcal{A}}$. Η άπειρη διεδρική ομάδα $D_\infty = \langle a, b \rangle$ δρά στο X όπως δρά στο $\mathbb{R}$: $a : x \longmapsto -x$,

$b : x \longmapsto 2-x$.

X



$D_\infty \backslash X$



Η δράση της D_∞ στο $\mathbb{Z}$ έχει δύο τροχιές, τους άρτιους και τους περιττούς αριθμούς. Άρα $D_\infty \backslash X$ έχει δύο κορυφές $[0]$ και $[1]$ και 1 ζεύγος ακμών e και $\bar{e}$.

Άρα ένα θεμελιώδες γράφημα για τη δράση είναι

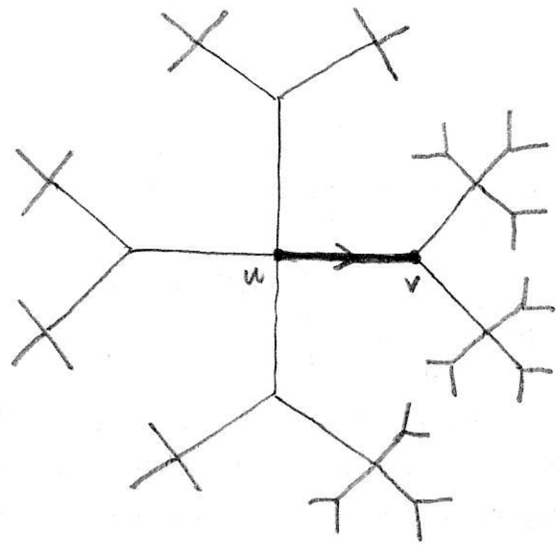
T

Η σταθεροποιούσα της κορυφής 0 είναι η $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ και της κορυφής 1 η $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, ενώ η σταθεροποιούσα της ακμής $(0,1)$ είναι η τετριμμένη ομάδα $\{1\}$.

Το γράφημα X είναι δένδρο, και το θεώρημα επιβεβαιώνει ότι $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Παράδειγμα

X



X είναι το δέντρο $(3,4)$. G η ομάδα που παράγεται από τις περιστροφές του δέντρου γύρω από τις κορυφές u και v.

T $\quad u \xrightarrow{e} v$

Σταθεροποιούσα της u είναι $\mathbb{Z}_4$, σταθεροποιούσα της v είναι $\mathbb{Z}_3$, και σταθεροποιούσα της e η $\{1\}$.

Άρα $G = \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3$.

Παράδειγμα Η ομάδα $SL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, R \rangle$,

για $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ με $S^4 = R^6 = I$,

δρά στο άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$, μέσω των $s(z) = \frac{-1}{z}$ και $r(z) = \frac{z-1}{z}$.

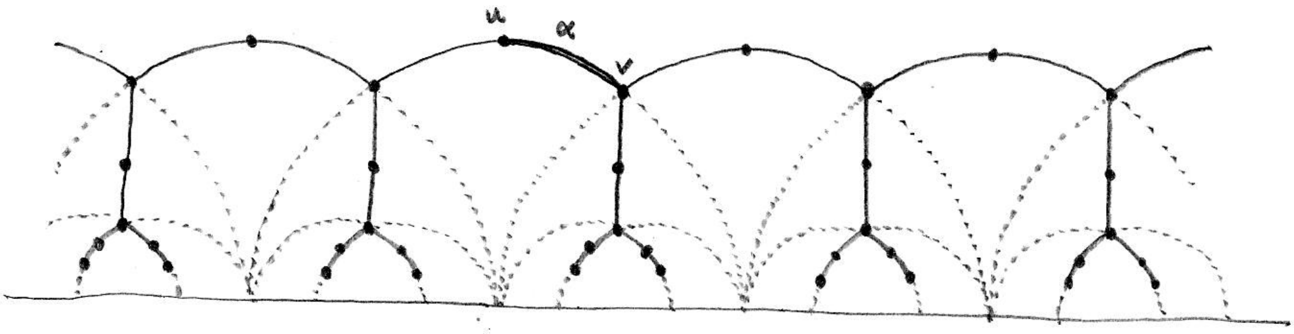
s έχει σταθερό σημείο $u = i$, r έχει σταθερό σημείο $v = e^{\pi i/3}$.

Θεωρούμε το τόξο $\alpha = \{ e^{i\vartheta} : \frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \}$.

Οι εικόνες του α από τη δράση των s και r σχηματίζουν ένα γράφημα $X \subset \mathcal{H}$.

X είναι ένα δέντρο, στο οποίο η $SL(2,\mathbb{Z})$ δρά, με θεμελιώδη γράφημα 

.



Η σταθεροποιούσα της κορυφής u είναι $\langle S \rangle \cong \mathbb{Z}_4$,

η σταθεροποιούσα της κορυφής v είναι $\langle R \rangle \cong \mathbb{Z}_6$,

και η σταθεροποιούσα της ακμής α είναι $\langle -I \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

Από το Θεώρημα,

$$SL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6 .$$

Το Θεώρημα της σελ 148, λέει ότι εάν η ομάδα G δρα σε ένα γράφημα X, με θεμελιώδες γράφημα ένα διάστημα $\overset{u}{\circ}\xrightarrow[e]{\quad}\overset{v}{\circ}$, τότε X είναι δέντρο εάν και μόνον εάν G είναι αμάλγαμα δύο ομάδων.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι, αντιστρόφως, εάν G είναι αμάλγαμα, τότε υπάρχει μοναδικό δέντρο X στο οποίο η G δρα με τον παραπάνω τρόπο.

<u>Θεώρημα</u> Έστω ομάδα $G = A_1 *_B A_2$.
Τότε υπάρχει μοναδικό δέντρο X, στο οποίο η G δρα, με θεμελιώδες γράφημα $\overset{u}{\circ}\xrightarrow[e]{\quad}\overset{v}{\circ}$, με σταθεροποιούσες υποομάδες $G_u = A_1$, $G_v = A_2$ και $G_e = B$.

<u>Απ.</u> Το X έχει σύνολο κορυφών $V_X = \left(G/A_1\right) \sqcup \left(G/A_2\right)$ και σύνολο ακμών $E_X = E \sqcup \overline{E}$, όπου $E = G/B$, με απεικονίσεις $o : G/B \longrightarrow G/A_1$, $t : G/B \longrightarrow G/A_2$ που προκύπτουν από τους εγκλεισμούς $B \hookrightarrow A_1$, $B \hookrightarrow A_2$.
G δρα στο X μέσω της αριστερής δράσης της G στα G/A_1, G/A_2, G/B.

Θέτουμε $u = 1\cdot A_1$, $v = 1\cdot A_2$ και $e = 1\cdot B$. Τότε $\overset{u}{\circ}\underset{e}{\text{———}}\overset{v}{\circ}$ είναι θεμελιώδη γράφημα για τη δράση της G στο X. Από το θεώρημα της σελ 148, X είναι δέντρο.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι κάθε άλλο δέντρο στο οποίο η G δρά με τον παραπάνω τρόπο, είναι ισομορφικό με το X.

//.

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα δίδουν μία αντιστοιχία μεταξύ αμαλγαμάτων δύο ομάδων και δράσεων σε ένα δέντρο με θεμελιώδη περιοχή $\overset{u}{\circ}\underset{e}{\text{———}}\overset{v}{\circ}$.

Η περίπτωση πιο γενικών αμαλγαμάτων αντιστοιχεί στην έννοια του δέντρου ομάδων, που θα δούμε στη συνέχεια.

Μία ανάλογη αντιστοιχία υπάρχει μεταξύ επεκτάσεων HNN και δράσεων σε ένα δέντρο με πηλίκο της μορφής $u \circlearrowright e$.

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις γενικεύονται από την έννοια ενός γραφήματος ομάδων, και της θεμελιώδους ομάδας του γραφήματος.