Θεωρία Bass-Serre.

Θεμελιώδης ομάδα ενός δέντρου ομάδων. (Serre §4)

Ένα <u>γράφημα ομάδων</u> $\mathcal{G}$ αποτελείται από ένα συνεκτικό γράφημα X, μία ομάδα G_u για κάθε $u \in V_X$, μία ομάδα G_e για κάθε $e \in E_X$, με $G_e = G_{\bar{e}}$, και μονομορφισμούς $i_e : G_e \longrightarrow G_{t(e)}$.

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου το γράφημα είναι δέντρο T, οπότε $\mathcal{G}$ είναι ένα <u>δέντρο ομάδων</u>.

Ορίζουμε την ομάδα G (ή $\pi(\mathcal{G})$) να είναι το <u>ευθύ όριο</u> του συστήματος ομάδων και μονομορφισμών $\mathcal{G}$:

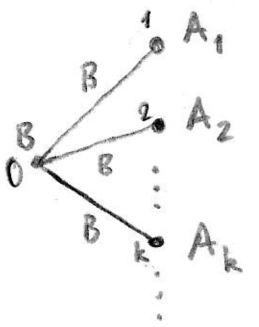
Υπάρχουν ομομορφισμοί $f_e : G_e \longrightarrow G$ και $f_u : G_u \longrightarrow G$, τέτοιοι ώστε $f_e = f_{t(e)} \circ i_e$, με την ιδιότητα:
Για κάθε ομάδα H και ομομορφισμούς $h_e : G_e \longrightarrow H$, $h_u : G_u \longrightarrow H$, με $h_e = h_{t(e)} \circ i_e$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h : G \longrightarrow H$ τέτοιος ώστε για κάθε $e \in E_T$,

$$h_e = h \circ f_e \quad \text{και} \quad h_{t(e)} = h \circ f_{t(e)} .$$

<u>Παραδείγματα.</u>

1. Εάν T είναι $\overset{u}{\bullet} \xrightarrow[e]{} \overset{v}{\bullet}$, έχουμε ομάδες G_u, G_v, $G_e = G_{\bar{e}}$, και μονομορφισμούς $i_e : G_e \longrightarrow G_v$, $i_{\bar{e}} : G_e \longrightarrow G_u$. Τότε $G = G_u *_{G_e} G_v$.

2. Έστω A_k, $k \in I$ είναι σύστημα ομάδων, B είναι ομάδα και $\varepsilon_k : B \longrightarrow A_k$ είναι μονομορφισμοί. Θεωρούμε το δέντρο T με κορυφές $I \sqcup \{0\}$, και ακμές $\{(0,k), (k,0) : k \in I\}$, όπου εάν $e = (0,k)$, τότε $\bar{e} = (k,0)$ και $t(e) = k$, $t(\bar{e}) = 0$.
Ορίζουμε το δέντρο ομάδων $\mathcal{G}$ με $G_0 = B$, $G_e = B$ για κάθε ακμή του T, και $G_k = A_k$ για $k \in I$, και μονομορφισμούς $i_{\bar{e}} = id_B$ για $\bar{e} = (k,0)$, $k \in I$, και $i_e = \varepsilon_k$ για $e = (0,k)$, $k \in I$.



Τότε G είναι το αμάλγαμα των (A_k, ε_k),

$$G = \mathop{\ast_B}_{k \in I} A_k .$$

3. Εαν $\mathcal{G}$ είναι δένδρο ομάδων με δένδρο T, και T' προκύπτει από το T με την προσθήκη μίας κορυφής v και μίας ακμής e με $t(e) = v$, $o(e) = u$ κορυφή του T, και μονομορφισμούς $G_e \longrightarrow G_v$, $G_e \longrightarrow G_u$, τότε το δένδρο ομάδων $\mathcal{G}'$ έχει ομάδα

$$G' = G *_{G_e} G_v .$$

<u>Θεώρημα</u> Θεωρούμε δένδρο ομάδων $\mathcal{G}$, με δένδρο T. Υπάρχει γράφημα X που περιέχει το T, και δράση της ομάδας $G = \pi(\mathcal{G})$ στο X τέτοια ώστε T είναι θεμελιώδες γράφημα για τη δράση της G στο X, και για κάθε κορυφή $u \in V_T$, G_u είναι η σταθεροποιούσα της u, για κάθε ακμή $e \in E_T$, G_e είναι η σταθεροποιούσα της e. Επιπλέον, X είναι δένδρο.

<u>Απ.</u> Το γράφημα X έχει κορυφές $V_X = \bigsqcup_{u \in V_T} G/G_u$, και ακμές $E_X = \bigsqcup_{e \in E_T} G/G_e$, με

$\overline{gG_e} = gG_{\bar{e}}$, και $t(gG_e) = gG_{t(e)}$.

Ελέγχουμε ότι X είναι γράφημα, και G δρα στο X

από τα αριστερά, μέσω της αριστερής δράσης της G στα σύνολα πλευρικών κλάσεων G/G_u, G/G_e.

Για να δείξουμε ότι X είναι δέντρο, αρχικά το δείχνουμε για πεπερασμένο T, και επεκτείνουμε σε άπειρο T λαμβάνοντας το ευθύ όριο.

Εαν T έχει μόνο μία κορυφή, $T = X$.

Υποθέτουμε ότι T έχει $n \geq 2$ κορυφές, και θεωρούμε ακμή e του T με $t(e) = u$ ακραία κορυφή του T.

Τότε $G = G' *_{G_e} G_u$, όπου G' είναι η ομάδα που αντιστοιχεί στο δέντρο T' που προκύπτει από το T όταν αφαιρέσουμε την κορυφή u και τις ακμές e και $\bar{e}$.

Το γράφημα $X' = G' \cdot T'$ είναι υπογράφημα του X, και δείχνουμε ότι είναι το γράφημα που αντιστοιχεί στο δέντρο ομάδων $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|_{T'}$.

Από την επαγωγική υπόθεση, X' είναι δέντρο.

Για $gG' \in G/G'$, τα υπογραφήματα gX' του X είναι ξένα ανά δύο.

Θεωρούμε το γράφημα πηλίκο $\tilde{X}$, που προκύπτει από το X

όταν συρρικνώσουμε κάθε υπογράφημα gX' σε μια κορυφή.

Η ομάδα G δρά στο $\tilde{X}$, με θεμελιώδη περιοχή

$T/T' = \overset{T'}{\bullet}\!\underset{e}{\text{———}}\!\overset{u}{\bullet}$, και σταθεροποιούσες $G_{T'} = G'$,

G_u και G_e.

Τότε $\tilde{G} = G' \underset{G_e}{*} G_u \cong G$. Από το Θεώρημα

της σελ 153, $\tilde{X}$ είναι δέντρο.

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις έννοιες της Αλγεβρικής Τοπολογίας, μπορούμε να δείξουμε ότι εάν $\tilde{X}$ προκύπτει από τη συρρίκνωση ξένων ανά δύο δέντρων στο X, και $\tilde{X}$ είναι δέντρο, τότε X είναι δέντρο, (Serre, σελ 22-23).

Άρα X είναι δέντρο. //

Το ακόλουθο Θεώρημα Δομής περιγράφει τη δομή μίας ομάδας G που δρα σε ένα δέντρο X και $G\backslash X$ είναι επίσης δέντρο.

Θεωρούμε ομάδα G που δρά σε ένα γράφημα X, με θεμελιώδες γράφημα ένα δέντρο T.

Ορίζουμε το δέντρο ομάδων $\mathcal{G}$, με δέντρο T, και για κάθε κορυφή $u \in V_T$, $G_u \leq G$ είναι η σταθεροποιούσα της u, και για κάθε ακμή $e \in E_T$, $G_e \leq G$ είναι η σταθεροποιούσα της e. Εάν $u = t(e)$, $G_e \leq G_u$ και $i_e : G_e \longrightarrow G_{t(e)}$ είναι ο εγκλεισμός.

Θεωρούμε την ομάδα $\pi(\mathcal{G})$, ευθύ όριο του συστήματος $\mathcal{G}$. Οι εγκλεισμοί $G_u \hookrightarrow G$ επεκτείνονται σε ομομορφισμό $\varphi : \pi(\mathcal{G}) \longrightarrow G$. Εαν X είναι συνεκτικό, φ είναι επιμορφισμός, (Serre, σελ 34, 4.1 lemma 4).

Από το προηγούμενο θεώρημα, στο δέντρο ομάδων $\mathcal{G}$ αντιστοιχεί δέντρο $\tilde{X}$, που περιέχει το δέντρο T, και δράση της $\pi(\mathcal{G})$ στο $\tilde{X}$. Η ταυτοτική απεικόνιση $T \longrightarrow T$ επεκτείνεται σε μοναδικό μορφισμό γραφημάτων $\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$ που είναι συμμεταθετικός ως προς τις δράσεις της $\pi(\mathcal{G})$ στο $\tilde{X}$, της G στο X και τον ομομορφισμό φ.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κορυφή $u \in \tilde{X}$, και $g \in \pi(\mathcal{G})$, ισχύει

$$\psi(g \cdot u) = \varphi(g) \cdot \psi(u) .$$

<u>Θεώρημα Δομής</u> Με τις παραπάνω υποθέσεις και συμβολισμούς, οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

1) X είναι δέντρο

2) $\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$ είναι ισομορφισμός γραφημάτων.

3) $\varphi : \pi(\mathcal{G}) \longrightarrow G$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

<u>Απ.</u>

$3 \Rightarrow 2$, από τη μοναδικότητα στο Θεώρημα της σελ. 157.

$2 \Rightarrow 1$, αφού από το Θεώρημα της σελ 157, $\tilde{X}$ είναι δέντρο.

$2 \Rightarrow 3$: Από την κατασκευή του φ, έχουμε ισομορφισμούς όταν περιορίσουμε στις σταθεροποιούσες υποομάδες $\tilde{G}_u$, για $u \in \tilde{X}$. Δείχνουμε ότι, όταν ψ είναι αμφιμονοσήμαντη, $\ker \varphi \leq \tilde{G}_u$. Άρα $\ker \varphi = \ker (\varphi | \tilde{G}_u) = \{1\}$.

$1 \Rightarrow 2$: ψ είναι επιμορφισμός γραφημάτων, αφού ψ είναι συμμεταθετικός και $\psi|_T = id$. Επίσης ψ είναι 1-1 στα υποσύνολα των ακμών με μία κοινή κορυφή, αφού φ είναι ισομορφισμός μεταξύ των σταθεροποιούσών υποομάδων. Ένας μορφισμός με αυτή την ιδιότητα από ένα συνεκτικό γράφημα σε ένα δέντρο είναι μονομορφισμός: εάν $\psi(u) = \psi(v)$, για γεωδαισιακή διαδρομή από το u στο v απεικονίζεται σε κύκλο. Αφού X είναι δέντρο, πρέπει να υπάρχει πισωγύρισμα στη διαδρομή. Αλλά τότε υπάρχουν διαδοχικά βήματα τα οποία ψ δεν είναι 1-1. //.