Η θεμελιώδης ομάδα ενός γραφήματος ομάδων. (Serre §5)

Θεωρούμε ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ πάνω στο συνεκτικό μη κενό γράφημα X, με ομάδες G_u για κάθε $u \in V_X$, G_e για κάθε $e \in E_X$ και μονομορφισμούς $i_e : G_e \longrightarrow G_{t(e)}$.

Ορίζουμε την ομάδα $F(\mathcal{G}) = H/N$, όπου

$$H = \mathop{\ast}_{u \in V_X} G_u \ast F_{E_X}$$

και

N είναι η κανονική υποομάδα της H που παράγεται από τα στοιχεία $e\bar{e}$ για $e \in E_X$, και $e\left(i_e(a)\right)e^{-1}\left(i_{\bar{e}}(a)\right)^{-1}$, για $e \in E_X$ και $a \in G_e$.

Παρατηρήσεις: 1. $N = \mathcal{N}\left\langle e\, i_e(a)\, \bar{e}\, \left(i_{\bar{e}}(a)\right)^{-1} : e \in E_X,\ a \in G_e \right\rangle$

2. $F(\mathcal{G})$ είναι επέκταση HNN της $\mathop{\ast}_{u \in V_X} G_u$, με ευσταθή γράμματα $\{e, \bar{e}\} \subseteq E_X$.

Θεωρούμε διαδρομή γ στο X, αποτελούμενη από τις ακμές e_i, $i=1,\dots,n$. Θέτουμε $u_i = o(e_{i+1}) = t(e_i)$,

και $\mu = (g_0, \dots, g_n)$, $g_i \in G_{u_i}$.

Ορίζουμε τη λέξη $(\gamma,\mu) = g_0 e_1 g_1 e_2 \cdots e_n g_n$

και συμβολίζουμε $|\gamma,\mu|$ το αντίστοιχο στοιχείο στην $F(\mathcal{G})$.

Ορίζουμε $\pi(\mathcal{G}, X, u_0)$, για $u_0 \in V_X$, την υποομάδα της $F(\mathcal{G})$ που αποτελείται από στοιχεία $|\gamma,\mu|$ με γ κλειστή διαδρομή: $o(e_1) = u_0 = t(e_n)$.

Εάν T είναι μέγιστο δέντρο στο X, ορίζουμε $\pi(\mathcal{G}, X, T)$

$$\pi(\mathcal{G}, X, T) = F(\mathcal{G})/_{M}$$

όπου M είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $e \in E_T \subseteq E_X$.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Εάν $G_u = \{1\}$ για κάθε $u \in V_X$, τότε $\pi(\mathcal{G}, X, u_0)$ είναι η θεμελιώδης ομάδα $\pi(X, u_0)$ του γραφήματος X με βάση u_0.

2. Εάν $X =$ 

, τότε $\pi(\mathcal{G}, X, u) = G_u *_{G_e} G_v$

3. Εάν $X =$ 

, τότε έχουμε δύο μονομορφισμούς

$i_e : G_e \longrightarrow G_u$ και $i_{\bar{e}} : G_e \longrightarrow G_u$, και $\pi(\mathcal{G}, X, u)$

είναι η επέκταση HNN με βάση G_u και ευσταθές γράμμα g_e,

τέτοιο ώστε $g_e \, i_e(a) \, g_e^{-1} = i_{\bar{e}}(a)$ για κάθε $a \in G_e$.

<u>Πρόταση</u> Η κανονική προβολή $F(\mathcal{G}) \longrightarrow \pi(\mathcal{G}, X, T)$

περιορίζεται σε ισομορφισμό $\pi(\mathcal{G}, X, u_0) \cong \pi(\mathcal{G}, X, T)$.

//

Ορίζουμε <u>ανηγμένες λέξεις</u> τύπου (γ, μ): Η λέξη (γ, μ),

$\gamma = e_1 \cdots e_n$, είναι ανηγμένη εάν

- $n = 0$ και $g_0 \neq 1$
- $n \geq 1$, και για κάθε $k = 1, \dots, n$ για το οποίο $e_{k+1} = \bar{e}_k$,

  ισχύει $g_k \notin i_{e_k}(G_{e_k}) \leq G_{t(e_k)}$.

Ειδικότερα, εάν γ έχει μήκος ≥ 1 και δεν έχει πισωγυρίσματα,

(γ, μ) είναι ανηγμένη λέξη.

<u>Θεώρημα</u> Εάν (γ, μ) είναι ανηγμένη λέξη, τότε το

αντίστοιχο στοιχείο στην $F(\mathcal{G})$, $|\gamma, \mu| \neq 1$.

//

(Αυτό είναι το βασικό τεχνικό θεώρημα 11, § 5.3 του Serre.)

Καθολικό κάλυμμα ενός γραφήματος ομάδων.

Θεωρούμε γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$, σε γράφημα Y, T μέγιστο δέντρο στο Y και $\mathcal{A}$ προσανατολισμό του Y (δηλαδή $E_Y = \mathcal{A} \sqcup \overline{\mathcal{A}}$).

Εάν $e \in E_Y$, συμβολίζουμε $|e|$ οποιοδήποτε από τα $e, \bar{e}$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, και ορίζουμε

$$d(e) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } e \in \mathcal{A} \\ 1 & \text{εάν } \bar{e} \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα $\tilde{X}$ και μία δράση της $G = \pi(\mathcal{G}, Y, T)$ στο $\tilde{X}$, έτσι ώστε

$G \backslash \tilde{X} = Y$.

Κορυφές του $\tilde{X}$: θεωρούμε ζεύγη $(g, v) \in G \times V_Y$, και ορίζουμε $(g, v) \sim (h, w)$ εάν $v = w$ και $h \in g G_v$. Αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας, και οι κλάσεις ισοδυναμίας $[g, v]$ είναι οι κορυφές του $\tilde{X}$.

Ακμές του $\tilde{X}$: θεωρούμε ζεύγη (g, e), $(g, \bar{e})$ όπου $g \in G$ και $e \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε $(g, e) \sim (h, f)$

και $(g,\bar{e}) \sim (h,\bar{f})$ εάν $e = f$ και $h \in g(i_e(G_e))$.

Οι ακμές του $\tilde{X}$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας $[g,e]$, $[g,\bar{e}]$.

Ορίζουμε $p : \tilde{X} \longrightarrow Y$,

στις κορυφές $p([g,v]) = v$

και στις ακμές $p([g,e]) = e$.

Ορίζουμε $j : Y \longrightarrow \tilde{X}$,

στις κορυφές $j(v) = [1,v]$, και στις ακμές $j(e) = [1,e]$ του Y.

Ορίζουμε τη δράση της G στο $\tilde{X}$:

$$g \cdot [h,v] = [gh,v] \qquad v \in V_Y,$$

$$g \cdot [h,e] = [gh,e] \qquad e \in E_Y.$$

Τέλος ορίζουμε, για ακμή $[g,e] \in E_{\tilde{X}}$,

$$\overline{[g,e]} = [g,\bar{e}].$$

Για $e \in E_Y$, ορίζουμε $o([g,e]) = [ge^{-d(e)}, o(e)]$ και $t([g,e]) = [ge^{1-d(e)}, t(e)]$, όπου ge είναι γινόμενο στην G.

Οι απεικονίσεις o και t είναι καλά ορισμένες, και δίνουν τη δομή γραφήματος στο $\tilde{X}$.

Η απεικόνιση $p : \tilde{X} \to Y$ είναι μορφισμός γραφημάτων.

Η απεικόνιση $j : Y \to \tilde{X}$ <u>δεν</u> είναι μορφισμός γραφημάτων, αλλά εάν την περιορίσουμε στο μέγιστο δέντρο $T \subseteq Y$, τότε είναι μορφισμός γραφημάτων: οι ακμές στο T αντιστοιχούν στο ταυτοτικό στοιχείο της G, και έτσι για e ακμή στο T, $o([1, e]) = [1, o(e)]$, $t([1, e]) = [1, t(e)]$. Άρα $j : T \to \tilde{T} \subseteq \tilde{X}$ είναι ανύψωση του δέντρου T.

<u>Θεώρημα</u>. Το γράφημα $\tilde{X}$ είναι δέντρο.