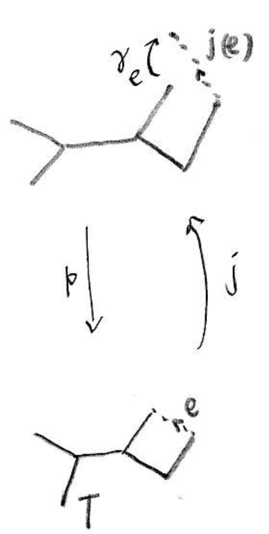
Το Θεώρημα Δομής

Θεωρούμε μία ομάδα H που δρά χωρίς αντιστροφές σε ένα συνεκτικό, μη κενό γράφημα X. Το Θεώρημα Δομής λέει ότι εάν X είναι δέντρο, τότε η ομάδα H είναι ισομορφική με τη θεμελιώδη ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ ενός γραφήματος ομάδων στο $Y = {}_H\backslash X$.

Για να κατασκευάσουμε το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$, θεωρούμε ένα μέγιστο δέντρο $T \subset Y$, και ανύψωση $j : T \to X$. Επεκτείνουμε το μορφισμό γραφημάτων j σε μία τομή:
Επιλέγουμε προσανατολισμό A στο Y, και για κάθε ακμή $e \in A \setminus E_T$, επιλέγουμε ακμή $j(e)$ τέτοια ώστε $p \circ j(e) = e$ και $o(j(e))$ είναι κορυφή του $j(T)$.
Επίσης επιλέγουμε $\gamma_e \in H$ τ.ω.

$$t(j(e)) = \gamma_e \cdot j(t(e))$$



Θέτουμε επίσης $\gamma_{\bar{e}} = \gamma_e^{-1}$,

και $\gamma_e = 1$ για e ακμή του T.

Χρησιμοποιούμε την τομή j για να ορίσουμε το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ στο Y: για $u \in V_Y$,

$$G_u = H_{j(u)}, \quad \text{και για} \quad e \in E_Y, \quad G_e = H_{j(e)}.$$

Αφού G_u και G_e είναι υποομάδες της H, έχουμε φυσικό ομομορφισμό από τη θεμελιώδη ομάδα $G = \pi(\mathcal{G}, Y, T)$, $\varphi: G \to H$.

Εάν $\tilde{X}$ είναι το καθολικό κάλυμμα του $\mathcal{G}$, ορίζουμε απεικόνιση $\psi : \tilde{X} \to X$ με

$$\psi([g, u]) = \varphi(g) \cdot j(u), \quad g \in G, \ u \in V_Y$$

$$\psi([g, e]) = \varphi(g) \cdot j(e), \quad g \in G, \ e \in E_Y.$$

Η απεικόνιση ψ είναι μορφισμός γραφημάτων και συμμεταβλητός ως προς τον ομομορφισμό φ.

<u>Θεώρημα Δομής</u> Με τις προηγούμενες υποθέσεις, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) X είναι δέντρο

2) $\psi: \tilde{X} \to X$ είναι ισομορφισμός γραφημάτων

3) $\varphi: G \to H$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

//

Εφαρμογές του Θεωρήματος Δομής

1. Υποομάδες της $\pi(\mathcal{G})$.

Θεωρούμε γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ στο X, με θεμελιώδη ομάδα $G = \pi(\mathcal{G})$, και υποομάδα $H \leq G$.

Θα περιγράψουμε ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{H}$, που προκύπτει από το $\mathcal{G}$, τέτοιο ώστε $H \cong \pi(\mathcal{H})$.

Για κάθε κορυφή $v \in V_X$, θεωρούμε το σύνολο των πλευρικών κλάσεων G/G_v, στο οποίο η H δρα από τα αριστερά, $h \cdot gG_v = (hg)G_v$. Επιλέγουμε ένα πλήρες σύνολο S_v αντιπροσώπων των τροχιών αυτής της δράσης: εάν $\alpha \in S_v$, $\alpha = g_\alpha G_v$ για $g_\alpha \in G$, τέτοια ώστε, εάν $\alpha \neq \beta$ τότε

$$H g_\alpha G_v \cap H g_\beta G_v = \emptyset$$

και

$$\bigcup_{\alpha \in S_\alpha} H g_\alpha G_v = G.$$

Παρόμοια, για κάθε ακμή $e \in E_X$, επιλέγουμε ένα πλήρες σύνολο T_e αντιπροσώπων της δράσης της H στο G/G_e, με $\gamma \in T_e$, $\gamma = g_\gamma G_e$.

Ορίζουμε τις κορυφές του γραφήματος Y να είναι

$$\{(\alpha, v) : \alpha \in S_v,\ v \in V_X\}$$

και το σύνολο των ακμών του Y να είναι

$$\{ (\gamma, e) : \gamma \in T_e,\ e \in E_X \}$$

και ελέγχουμε ότι ορίζονται με φυσικό τρόπο οι απεικονίσεις o και t.

Ορίζουμε το γράφημα ομάδων $\mathcal{G}$ στο Y με

$$H_{(\alpha, v)} = H \cap g_\alpha G_v g_\alpha^{-1}$$

και

$$H_{(\gamma, e)} = H \cap g_\gamma G_e g_\gamma^{-1} .$$

Ελέγχουμε ότι ορίζονται οι μονομορφισμοί $i_{(\gamma,e)} : H_{(\gamma,e)} \to H_{t(\gamma,e)}$

<u>Θεώρημα</u>. $H \cong \pi(\mathcal{G})$.

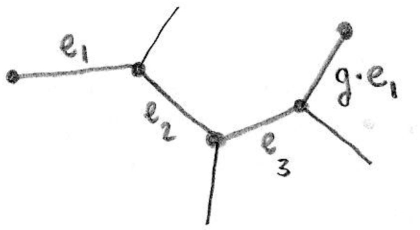
//

Το θεώρημα γενικεύει τα θεωρήματα Nielsen-Schreier και Kurosh, καθώς και ανάλογα θεωρήματα για αμαλγάματα και επεκτάσεις HNN.

Δράσεις ομάδων σε δέντρα.

Έχουμε δει ότι μία ομάδα είναι ελεύθερη εάν δρά ελεύθερα σε ένα δέντρο, (σελ 142).

Θα δούμε άλλες περιπτώσεις δράσεων ομάδων σε ένα δέντρο.
Εαν G δρά στο δέντρο T, λέμε ότι το στοιχείο $g \in G$ μετατοπίζει την ακμή e εαν υπάρχει μία διαδρομή χωρίς αναγυρίσματα, $e_1, e_2, \dots, e_n$, με $e_1 \in \{e, \bar{e}\}$ και $g \cdot (o(e_1)) = t(e_n)$, $g \cdot e_1 \neq \bar{e}_n$. Μπορούμε να δείξουμε ότι g μετατοπίζει μία ακμή εαν g δεν αφήνει καμία κορυφή σταθερή.



Θεώρημα Εαν η ομάδα G δρα σε ένα δέντρο T, τοτε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1) Υπάρχει μία κορυφή $u \in V_T$ με $G_u = G$.

2) Υπάρχει ακολουθία ακμών e_n, $n \in \mathbb{N}$, με $o(e_{n+1}) = t(e_n)$ και $e_{n+1} \neq \bar{e}_n$, τέτοια ώστε $G_{o(e_n)} \subseteq G_{o(e_{n+1})}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$, και $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{e_n}$, αλλά $G \neq G_{e_n}$.

3) Υπάρχει $g \in G$ που μετατοπίζει μία ακμή του T.

Στην περίπτωση 3, G είναι αμάλγαμα ή επέκταση HNN πάνω από την υποομάδα G_e.