Η μακροσκοπική γεωμετρία μιας ομάδας.

Ένας <u>μετρικός χώρος</u> είναι ένα σύνολο X και μία <u>συνάρτηση απόστασης</u> $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. για $x, y, z \in X$:

1) $d(x,y) \geq 0$
2) $d(x,y) = 0$ εάνν $x = y$.
3) $d(x,y) = d(y,x)$.
4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

Εάν G είναι ομάδα και S πεπ. σύνολο γεννητόρων της G, ορίζουμε το <u>μήκος</u> $\ell_S(g)$ του $g \in G$, να είναι το ελάχιστο μήκος λέξεων στα γράμματα $S \cup S^{-1}$ που παριστούν το g.
Παρατηρούμε ότι $\ell_S(1) = 0$, $\ell_S(x) = 1$ για $x \in S \cup S^{-1}$.
Εάν $\Gamma_{G,S}$ είναι το γράφημα Cayley της ομάδας G ως προς το σύνολο γεννητόρων S, $\ell_S(g)$ είναι το ελάχιστο μήκος μίας διαδρομής στο $\Gamma_{G,S}$ από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_g.
Για παράδειγμα, εάν $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και $S = \{(1,0), (0,1)\}$, $\ell_S(m,n) = |m| + |n|$.

Η <u>λεκτική μετρική</u> d_S στην ομάδα G είναι η

μετρική $$d_S(g,h) = \ell(g^{-1}h)$$

<u>Λήμμα</u>. $d_S : G \times G \to \mathbb{R}$ είναι μετρική.

<u>Απ.</u> (1) είναι προφανές. (2) σημαίνει ότι $\ell_S(g) = 0$ εάν $g = 1$.

(3) ισχύει επειδή $\ell_S(g^{-1}h) = \ell_S(h^{-1}g)$.

(4) είναι η τριγωνική ανισότητα. Εαν $g, h, k \in G$ και u, w λέξεις που παριστάν το $g^{-1}h$ και $h^{-1}k$ αντίστοιχα, τότε $g^{-1}k = g^{-1}h\,h^{-1}k$, άρα uw είναι λέξη που παριστά το $g^{-1}k$. Εαν u και w έχουν ελάχιστο μήκος, τότε η ανηγμένη λέξη που αντιστοιχεί στην uw έχει μήκος $\leq \ell(u) + \ell(w)$.

Αρα $d_S(g,k) \leq d_S(g,h) + d_S(h,k)$. //

Επεκτείνουμε τη μετρική d_S στο γεωμετρικό γράφημα Cayley $\Gamma_{G,S}$, θεωρώντας ότι κάθε ακμή έχει μήκος 1, (Άσκηση).

Εαν X και Y είναι μετρικοί χώροι, η απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ είναι <u>ισομετρία</u> εαν είναι επί, και για κάθε $x_1, x_2 \in X$,

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

<u>Λήμμα</u> Η δράση της G στο μετρικό χώρο (G, d_S) είναι ισομετρική: για κάθε $g, h_1, h_2 \in G$,

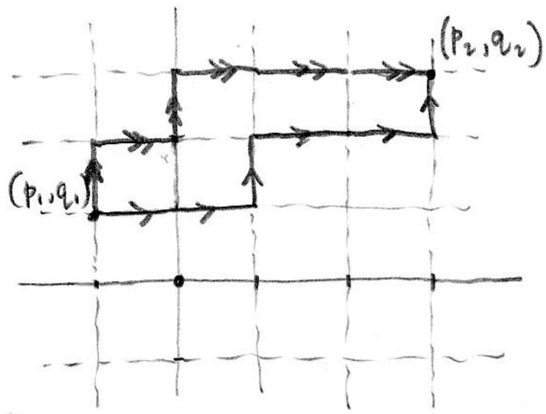
$$d_S(g\cdot h_1, g\cdot h_2) = d_S(h_1, h_2).$$

Απ.

$$d(gh_1, gh_2) = \ell_S(h_1^{-1}g^{-1}gh_2) = \ell_S(h_1^{-1}h_2) = d(h_1, h_2).$$ //

<u>Θεώρημα</u> Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα δρά αξιόπιστα ως ομάδα ισομετριών ενός μετρικού χώρου. //

<u>Παράδειγμα</u> $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.



(m,n) δρά στο $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ με

$$(m,n)\cdot(p,q) = (m+p, n+q).$$

$$d_S((p_1,q_1),(p_2,q_2)) = |p_2-p_1| + |q_2-q_1|.$$

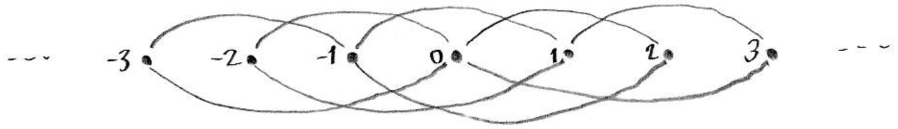
Εν γένει, υπάρχουν πολλές διαφορετικές διαδρομές ελαχίστου μήκους, <u>γεωδαισιακές διαδρομές</u>, μεταξύ δύο στοιχείων του $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Εάν $|q_2-q_1| \leq |p_2-p_1|$, τότε υπάρχουν $\binom{|p_2-p_1|}{|q_2-q_1|}$ διαφορετικές γεωδαισιακές.

<u>Παράδειγμα</u> Για την ομάδα $\mathbb{Z}$ έχουμε δει δύο διαφορετικά γραφήματα Cayley. Για το σύνηθες σύνολο γεννητόρων $S = \{1\}$, έχουμε το γράφημα

και τη μετρική $d_S(m,n) = |m-n|$.

Εάν θεωρήσουμε το σύνολο γεννητόρων $T = \{2,3\}$, το γράφημα Cayley είναι:



και η μετρική είναι (Άσκηση):

$$d_T(m,n) = \begin{cases} 2 & \text{εάν } |m-n| = 1 \\ k & \text{εάν } |m-n|>1 \text{ και } 3k-2 \leq |m-n| \leq 3k. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι διαφορετικά σύνολα γεννητόρων δίδουν διαφορετικές, μη ισομετρικές, δομές στο αντίστοιχο γράφημα Cayley μιας ομάδας. Το απρόσμενο στοιχείο που αναδεικνύει η θεωρία του Gromov, είναι ότι η μακροσκοπική γεωμετρία της ομάδας παραμένει η ίδια: Εάν δούμε τα γραφήματα

$\Gamma_{\mathbb{Z},S}$ και $\Gamma_{\mathbb{Z},T}$ από μακριά, έχουμε την ίδια μακροσκοπική εικόνα. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τι εννοούμε με "μακροσκοπική εικόνα" και θα περιγράψουμε τις ιδιότητες μιας ομάδας που αποκτούν σημασία από αυτή τη σκοπιά.

Τέτοιες ιδιότητες είναι, για παράδειγμα, πόσα "πέρατα" έχει το γράφημα (δύο, και στις δύο περιπτώσεις), πόσα στοιχεία της ομάδας περιέχονται σε ένα κομμάτι του γραφήματος μήκους n (φραγμένο από πολλαπλάσιο του n)

Αντιθέτως, στο γράφημα της $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, έχουμε μόνον 1 "πέρας", και το πλήθος των στοιχείων σε μία μπάλα διαμέτρου n είναι πολλαπλάσιο του n^2.

Στο γράφημα της $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, έχουμε άπειρα πέρατα, και το πλήθος των στοιχείων μήκους n αυξάνεται εκθετικά.