Quasi - ισομετρία.

Ο ακόλουθος ορισμός δίνει ακριβές νόημα στην έννοια της μακροσκοπικής γεωμετρίας ενός μετρικού χώρου. Επιτρέπουμε να πολλαπλασιάζουμε αποστάσεις με κάποιο φραγμένο συντελεστή, και αγνοούμε αποστάσεις μικρότερες από μία φραγμένη ποσότητα.

<u>Ορισμός</u> Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X, d_X) και (Y, d_Y) και μία απεικόνιση $\varphi : X \longrightarrow Y$.

1) φ ονομάζεται <u>quasi-ισομετρική εμφύτευση</u> εάν υπάρχουν σταθερές $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $x_1, x_2 \in X$,

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C .$$

2) φ ονομάζεται <u>quasi-πυκνή</u> εάν υπάρχει σταθερά $D \geq 0$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με

$$d_Y(y, \varphi(x)) \leq D .$$

3) φ ονομάζεται <u>quasi-ισομετρία</u> εάν φ είναι quasi-πυκνή quasi-ισομετρική εμφύτευση.

Εάν υπάρχει quasi-ισομετρία $\varphi : X \longrightarrow Y$ οι μετρικοί χώροι λέγονται <u>quasi-ισομετρικοί</u>, $X \sim_{QI} Y$.

<u>Πρόταση.</u> Η quasi-ισομετρία είναι σχέση ισοδυναμίας στους μετρικούς χώρους.

<u>Απ.</u> $\sim_{QI}$ είναι ανακλαστική, αφού $id: X \to X$ είναι quasi-ισομετρία.

Για να δείξουμε ότι $\sim_{QI}$ είναι μεταβατική, αρκεί να δείξουμε ότι η σύνθεση quasi-ισομετριών είναι quasi-ισομετρία. Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X, d_X), (Y, d_Y) και (Z, d_Z), και quasi-ισομετρίες $\varphi: X \to Y$ και $\psi: Y \to Z$, με σταθερές λ_1, C_1, D_1 και λ_2, C_2, D_2 αντίστοιχα.

Για $x_1, x_2 \in X$, έχουμε

$$d_Z(\psi\circ\varphi(x_1), \psi\circ\varphi(x_2)) \leq \lambda_2\, d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) + C_2$$

$$\leq \lambda_2\left(\lambda_1\, d_X(x_1, x_2) + C_1\right) + C_2$$

$$= \lambda_1\lambda_2\, d_X(x_1, x_2) + \lambda_2 C_1 + C_2 .$$

και

$$d_Z(\psi\circ\varphi(x_1), \psi\circ\varphi(x_2)) \geq \frac{1}{\lambda_2}\, d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) - C_2$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}\, d_X(x_1, x_2) - C_1\right) - C_2$$

$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\, d_X(x_1, x_2) - \left(\frac{C_1}{\lambda_2} + C_2\right)$$

Αφού $\lambda_2 \geq 1$, $\lambda_2 C_1 + C_2 \geq \frac{C_1}{\lambda_2} + C_2$, και έχουμε δείξει ότι $\psi \circ \varphi$ είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση με σταθερές $\lambda_1 \lambda_2$ και $\lambda_2 C_1 + C_2$.

Για κάθε $z \in Z$ υπάρχει $y \in Y$ τ.ω. $d_Z(\psi(y), z) \leq D_2$.

Γι' αυτό το $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τ.ω. $d_Y(\varphi(x), y) \leq D_1$.

Συνεπώς $d_Z(\psi \circ \varphi(x), \psi(y)) \leq \lambda_2 D_1 + C_2$.

Από την τριγωνική ανισότητα:

$$d_Z(\psi \circ \varphi(x), z) \leq d_Z(\psi \circ \varphi(x), \psi(y)) + d_Z(\psi(y), z)$$
$$\leq \lambda_2 D_1 + C_2 + D_2 .$$

Συμπεραίνουμε ότι $\psi \circ \varphi$ είναι quasi-πυκνή, με σταθερά $\lambda_2 D_1 + D_2 + C_2$.

Άρα $\psi \circ \varphi$ είναι quasi-ισομετρία.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\sim_{QI}$ είναι συμμετρική, θεωρούμε quasi-ισομετρία $\varphi : X \to Y$ και θα κατασκευάσουμε quasi-ισομετρία $\chi : Y \to X$.

Αφού φ είναι quasi-πυκνή, για κάθε $y \in Y$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_y \in X$ τ.ω. $d_Y(\varphi(x_y), y) < D_1$.

Ορίζουμε $\chi : Y \to X : y \mapsto x_y$.

Δείχνουμε ότι χ είναι quasi-πυκνή. Εάν $x \in X$ και $y = \varphi(x)$, τότε, εξ ορισμού, $\chi(y)$ ικανοποιεί $d_Y(\varphi \circ \chi(y), y) \leq D_1$.

Αφού $y = \varphi(x)$, έχουμε $d_Y(\varphi(\chi \circ \varphi(x)), \varphi(x)) \leq D_1$

και αφού φ είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση,

$$\frac{1}{\lambda_1} d_X(\chi \circ \varphi(x), x) - C_1 \leq d_Y(\varphi(\chi \circ \varphi(x)), \varphi(x))$$

δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχει $y \in Y$, συγκεκριμένα $y = \varphi(x)$, τ.ω.

$$\begin{aligned} d_X(\chi(y), x) &\leq \lambda_1 d_Y(\varphi(\chi \circ \varphi(x)), \varphi(x)) + \lambda_1 C_1 \\ &\leq \lambda_1 D_1 + \lambda_1 C_1 . \end{aligned}$$

Άρα χ είναι quasi πυκνή.

Δείχνουμε ότι χ είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση. Για $y_1, y_2 \in Y$, και $x_1 = \chi(y_1)$, $x_2 = \chi(y_2)$, έχουμε

$$\begin{aligned} d_X(\chi(y_1), \chi(y_2)) &= d_X(x_1, x_2) \\ \text{αφού } \varphi \text{ q-ισο:} \quad &\leq \lambda_1 d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) + \lambda_1 C_1 \\ \text{από τριγωνική ανισότητα:} \quad &\leq \lambda_1 \big(d_Y(\varphi(x_1), y_1) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, \varphi(x_2)) \big) \\ &\quad + \lambda_1 C_1 \\ &\leq \lambda_1 (D_1 + d_Y(y_1, y_2) + D_1) + \lambda_1 C_1 \\ &= \lambda_1 d_Y(y_1, y_2) + 2\lambda_1 D_1 + \lambda_1 C_1 . \end{aligned}$$

Επίσης,

$$d_Y(y_1,y_2) \leq d_Y(y_1,\varphi(x_1)) + d_Y(\varphi(x_1),\varphi(x_2)) + d_Y(\varphi(x_2),y_2)$$

$$\leq D_1 + \lambda_1 d_X(x_1,x_2) + C_1 + D_1$$

$$= \lambda_1 d_X(x_1,x_2) + 2D_1 + C_1 \,.$$

Αφού $\lambda_1 \geq 1$ και $C_1, D_1 \geq 0$, $-\frac{2D_1+C_1}{\lambda_1} \geq -\lambda_1(2D_1+C_1)$,

και έχουμε

$$\frac{1}{\lambda_1} d_Y(y_1,y_2) - \lambda_1(2D_1+C_1) \leq \frac{1}{\lambda_1} d_Y(y_1,y_2) - \frac{1}{\lambda_1}(2D_1+C_1)$$

$$\leq d_X(x_1,x_2)$$

$$\leq \lambda_1 d_Y(y_1,y_2) + \lambda_1(2D_1+C_1) \,.$$

Άρα χ είναι quasi-ισομετρία. //.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι για όλα τα πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων, το γράφημα Cayley μιας ομάδας G είναι μακροσκοπικά το ίδιο.

<u>Πρόταση</u> G ομάδα και S, T δύο πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων της G, και d_S, d_T οι αντίστοιχες λεκτικές μετρικές. Τότε οι μετρικοί χώροι (G, d_S) και (G, d_T) είναι quasi-ισομετρικοί.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις λεξικές μετρικές d_S και d_T στην ομάδα G.

Θα δείξουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $id : G \longrightarrow G$ είναι quasi-ισομετρία μεταξύ των μετρικών χώρων (G, d_S) και (G, d_T).

Η id είναι quasi-πυκνή, με $D=0$, αφού είναι αμφιμονοσήμαντη.

Για να δείξουμε ότι id είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση, εκφράζουμε τα στοιχεία του $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ ως προς το $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Για $i = 1, \dots, m$, έχουμε

$$t_i = s_{i,1}^{\varepsilon_{i,1}} \cdots s_{i,k_i}^{\varepsilon_{i,k_i}},$$

όπου $k_i \in \mathbb{N}$, και για $j = 1, \dots, k_i$, $s_{i,j} \in S$ και $\varepsilon_{i,j} \in \{-1, +1\}$.

Θέτουμε $k_T = \max\{k_i : i = 1, \dots, m\}$. Τότε, για κάθε $g \in G$, $\lambda_S(g) \leqslant k_T \lambda_T(g)$.

Παρόμοια, υπάρχει k_S τ.ω. για κάθε $g \in G$, $\lambda_T(g) \leq k_S \lambda_S(g)$.

Για $g, h \in G$, $d_S(g,h) = \lambda_S(g^{-1}h)$

$d_T(g,h) = \lambda_T(g^{-1}h)$. Άρα

$$\frac{1}{k_T} d_S(g,h) \leqslant d_T(g,h) \leqslant k_S d_S(g,h),$$

δηλαδή id είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση με σταθερές $\lambda = \max\{d_S, d_T\}$ και $C = 0$. //

Η quasi-ισομετρία μπορεί να επεκταθεί και στις ακμές των γραφημάτων Cayley $\Gamma_{G,S}$, $\Gamma_{G,T}$.

Παραδείγματα.

1. Θεωρούμε $\mathbb{Z}$ με σύνολα γεννητόρων $S=\{1\}$ και $T=\{2,3\}$.

Έχουμε $k_S = 2$, αφού $1 = 3-2$, και $k_T = 3$. Άρα η ταυτοτική απεικόνιση είναι quasi-ισομετρία με σταθερές $\lambda = 3$, $C=0$, $D=0$.

2. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3 : n \longmapsto (n,\bar{0})$, και τα σύνολα γεννητόρων $S=\{1\}$ για το $\mathbb{Z}$, και $T=\{(1,\bar{0}),(0,\bar{1})\}$ για το $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$.

$$d_T(\varphi(m),\varphi(n)) = d_T((m,\bar{0}),(n,\bar{0})) = |m-n|.$$

Άρα φ είναι quasi-ισομετρία με $\lambda=1$, $C=0$, $D=1$.

Το παράδειγμα 2 γενικεύεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>Πρόταση</u> Εάν G και H είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες, με $H \leq G$ και $[G:H] < \infty$, τότε $H \sim_{QI} G$.

<u>Απ.</u> Θεωρούμε πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S της G, και τη δράση της H στο γράφημα Cayley $\Gamma_{G,S}$. Υπάρχει θεμελιώδης περιοχή $\mathcal{F}$ για τη δράση της H στο $\Gamma_{G,S}$, και αφού $[G:H]<\infty$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{F}$ περιέχεται σε μία μπάλα $\mathcal{B}_R$ γύρω από το 1, με ακτίνα R,

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_R \subseteq \Gamma_{G,S}$. Αφού $H \cdot \mathcal{F} = \Gamma_{G,S}$, ισχύει επίσης

$H \cdot \mathcal{B}_R = \Gamma_{G,S}$, και η εμφύτευση $H \hookrightarrow G$

είναι quasi-πυκνή.

Αφού $h \cdot \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \phi$ συνεπάγεται $h \cdot \mathcal{B}_R \cap \mathcal{B}_R \neq \phi$, το

σύνολο γεννητόρων $\{ h \in H : h \cdot \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \phi \}$, (σελ. 144),

περιέχεται στο σύνολο $T = \{ h \in H : h \cdot \mathcal{B}_R \cap \mathcal{B}_R \neq \phi \}$.

Εαν $h \in T$, τότε το μήκος του h ως προς τους γεννήτορες

στο S είναι $\leq 2R$. Άρα $d_{H,T}(x_1, x_2) \leq 2R\, d_{G,S}(x_1, x_2)$.

Για την άλλη ανισότητα, παρατηρούμε ότι κάθε πεπερασμένη

διαδρομή στο $\Gamma_{G,S}$ περιέχεται σε μία πεπερασμένη ακολουθία

$x_0 \mathcal{B}_R, \dots, x_k \mathcal{B}_R$ με $x_i \mathcal{B}_R \cap x_{i+1} \mathcal{B}_R \neq \phi$.

Εαν η διαδρομή έχει μήκος n, τότε $k \leq n$.

Άρα $d_{H,T}(x_1, x_2) \leq d_{G,S}(x_1, x_2)$.

Συμπεραίνουμε ότι $H \hookrightarrow G$ είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση. //.

Η υπόθεση ότι η υποομάδα H είναι πεπερασμένα παραγόμενη δεν

χρειάζεται, γιατί μπορούμε να δείξουμε:

Θεώρημα. Εαν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη και $H \leq G$ με

$[G:H] < \infty$, τότε H είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

(Στη σελ. 94 έχουμε δείξει ότι αυτό ισχύει όταν G είναι ελεύθερη ομάδα.).

Εαν G και H είναι δύο ομάδες, ορίζουμε τη σχέση $H <_f G$ εάνν υπάρχει μονομορφισμός $i : H \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $[G : i(H)] < \infty$.

Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας δύο ομάδων που παράγεται από τη σχέση $<_f$, και τη συμβολίζουμε $\sim_f$: $H \sim_f G$ εάνν υπάρχει ακολουθία ομάδων $K_1, \dots, K_n$ τέτοια ώστε για κάθε $k = 1, \dots, n-1$ είτε $K_i <_f K_{i+1}$, είτε $K_{i+1} <_f K_i$. Εαν $H \sim_f G$ λέμε ότι H και G είναι σύμμετρες ομάδες (commensurable).

<u>Θεώρημα</u> Εαν $G \sim_f H$, τότε G είναι πεπερασμένα παραγόμενη εάνν H είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
Εαν είναι πεπερασμένα παραγόμενες, τότε $G \sim_{QI} H$.

<u>Παράδειγμα</u>. Θεωρούμε τις ομάδες $SL(2,\mathbb{Z})$ και $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$. Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4 >_f F_6 <_f F_2 <_f SL(2,\mathbb{Z}).$$

Αρα $SL(2,\mathbb{Z})$ και $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$ είναι σύμμετρες ομάδες, και συνεπώς, με οποιεσδήποτε λέξεις μετρικές από πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων, $SL(2,\mathbb{Z}) \sim_{QI} \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$.