Συναρτήσεις αύξησης (Growth functions).

(Meier 11.2, de la Harpe Ch VI.2)

Μια <u>συνάρτηση αύξησης</u> είναι μία αύξουσα (όχι υποχρεωτικά γνήσια αύξουσα) συνάρτηση από το $\mathbb{R}^+$ στο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Το πρότυπο παράδειγμα συνάρτησης ανάπτυξης είναι ο όγκος της μπάλας ακτίνας r σε ένα χώρο.

Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, αυτή είναι η συνάρτηση $V(r) = \pi r^2$.

Στον ευκλείδειο χώρο διάστασης n, είναι συνάρτηση της μορφής $V_n(r) = \alpha_n r^n$, για α_n σταθερές, με $\alpha_n \to 0$.

Στο υπερβολικό επίπεδο, το εμβαδόν του δίσκου ακτίνας r είναι $V_{\mathcal{H}}(r) = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} > \pi(e^r - 2)$.

Στη σφαίρα S^2, το εμβαδόν ενός δίσκου είναι φραγμένο, $V_S(r) \leq 4\pi$.

Σε πολλαπλότητες Riemann, οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχετίζονται με ιδιότητες της θεμελιώδους ομάδας της πολλαπλότητας.

Αυτό οδήγησε, αρχικά τον Efremovic (1953) και αργότερα τον Milnor (1968) στη μελέτη ανάλογων συναρτήσεων σε ομάδες.

Σε μία ομάδα G με πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S, ορίζουμε τη συνάρτηση μήκους $\ell_S : G \to \mathbb{R}$,
$\ell_S(g)$ το ελάχιστο μήκος μιας λέξης στα στοιχεία του S που παριστάνει το $g \in G$.

Η <u>συνάρτηση αύξησης</u> της ομάδας G (ως προς το S),

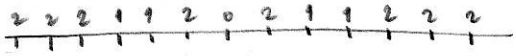
είναι

$$\beta_{G,S}(n) = \operatorname{card}\{ g \in G : \ell_S(g) \leq n \}.$$

<u>Παραδείγματα</u>.

$\mathbb{Z}$, $S = \{1\}$, $\beta_S(n) = 2n+1$.

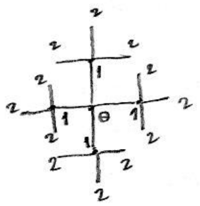
$\mathbb{Z}$, $T = \{2,3\}$ $\beta_T(n) = 7 + 6(n-1)$ για $n \geqslant 3$.



$\mathbb{Z}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$. $\beta_S(n) = 1 + 4(1+2+\cdots+n) = 2n^2+2n+1$.

F_2, $S = \{x,y\}$, $\beta_S(n) = 1 + 4 + 4\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + \cdots + 4\cdot 3^{n-1}$

$$= 1 + 4\sum_{k=0}^{n-1} 3^k$$



$$= 1 + 4\cdot\frac{3^n-1}{2} = 2\cdot 3^n - 1.$$

Λέμε ότι η συνάρτηση αύξησης β_1 κυριαρχεί την β_2, $\beta_2 \prec \beta_1$, εάν υπάρχουν σταθερές $\lambda > 0$, $C > 0$ τ.ω. για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\beta_2(t) \leq C\,\beta_1(\lambda t).$$

Λέμε ότι οι συναρτήσεις αύξησης β_1 και β_2 είναι <u>ισοδύναμες</u>, $\beta_1 \sim \beta_2$, εάν $\beta_2 \prec \beta_1$ και $\beta_1 \prec \beta_2$, δηλαδή εάν υπάρχουν θετικές σταθερές λ και C τ.ω. για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{C}\,\beta_1\!\left(\frac{1}{\lambda}t\right) \leq \beta_2(t) \leq C\,\beta_1(\lambda t).$$

<u>Λήμμα</u> Εάν S και T είναι πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων για την ομάδα G, τότε οι συναρτήσεις αύξησης $\beta_{G,S}$ και $\beta_{G,T}$ είναι ισοδύναμες.

<u>Απ.</u> Όπως στην απόδειξη της σελ 184, υπάρχουν σταθερές k_S και k_T τ.ω. για κάθε $g \in G$,

$$\ell_S(g) \leq k_T\, \ell_T(g) \quad \text{και} \quad \ell_T(g) \leq k_S\, \ell_S(g).$$

Άρα εάν $\ell_S(g) \leq t$ τότε $\ell_T(g) \leq k_S t$, και συνεπώς $\beta_S(n) \leq \beta_T(k_S n)$, δηλαδή $\beta_S \prec \beta_T$ με $C = 1$, $\lambda = k_S$.

Παρόμοια, $\beta_T \prec \beta_S$ με $C = 1$, $\lambda = k_T$.

Άρα $\beta_S \sim \beta_T$. //.

Ως συνέπεια του Λήμματος, στο επόμενο Θεώρημα δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε το πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων των G και H.

<u>Θεώρημα</u> Εάν G και H είναι quasi-ισομετρικές πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες, τότε β_G και β_H είναι ισοδύναμες.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε quasi-ισομετρία $\varphi : G \to H$ με σταθερές λ, C, D. Θα δείξουμε ότι $\beta_G < \beta_H$. Για $n \geq 1$, θεωρούμε $g \in G$ με $\ell_G(g) \leq n$. Αφού φ είναι quasi-ισομετρική εμφύτευση,

$$d_H(\varphi(1_G), \varphi(g)) \leq \lambda d_G(1, g) + C$$
$$\leq \lambda n + C.$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$d_H(1_H, \varphi(g)) \leq d_H(1_H, \varphi(1_G)) + d_H(\varphi(1_G), \varphi(g))$$

Αλλά $d_H(1_H, \varphi(1))$ είναι σταθερό, έστω K. Άρα

$$d_H(1_H, \varphi(g)) \leq K + \lambda n + C.$$

Θέτουμε $\alpha = \max\{\lambda, C+K\}$ και έχουμε $\ell_H(\varphi(g)) \leq \alpha n$.
Άρα για κάθε στοιχείο $g \in B_G(n)$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $\varphi(g) \in B_H(\alpha n)$.
Τώρα θέλουμε να εκτιμήσουμε πόσα διαφορετικά στοιχεία της G αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της H. Θεωρούμε $p \in \varphi^{-1}(\varphi(g))$. Τότε

$$\frac{1}{\lambda} d_G(p, g) - C \leq d_H(\varphi(p), \varphi(g)) = 0$$

Άρα $d_G(p, g) \leq \lambda C$ και p ανήκει στην μπάλα στο G με κέντρο g και ακτίνα λC. Αυτή έχει ίσο πλήθος στοιχείων με την μπάλα στο G με κέντρο 1 και ακτίνα λC, δηλαδή $\beta_G(\lambda C)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\beta_G(n) \leq \beta_G(\lambda C)\, \beta_H(\alpha n)$, και συνεπώς $\beta_G \prec \beta_H$.

Αφού η φ έχει quasi-αντίστροφη quasi-ισομετρία ψ, ισχύει επίσης $\beta_H \prec \beta_G$, και οι συναρτήσεις αύξησης είναι ισοδύναμες. //

Γενικεύοντας τα παραδείγματα που είδαμε παρατηρούμε ότι οι ελεύθερες αβελιανές ομάδες έχουν <u>πολυωνυμική αύξηση</u>, δηλαδή υπάρχει σταθερά a τέτοια ώστε $\beta(t) \sim t^a$.

Οι ελεύθερες ομάδες με rank ≥ 2 έχουν <u>εκθετική αύξηση</u> $\beta \sim e^n$, και όλες οι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες έχουν αύξηση $\prec e^n$.

Ένα ερώτημα που έθεσε ο Milnor τη δεκαετία του '60 είναι εάν υπάρχουν ομάδες με "ενδιάμεση" αύξηση, που κυριαρχεί κάθε πολυωνυμική αλλά κυριαρχείται από κάθε εκθετική.

Το ερώτημα απαντήθηκε από τον Grigorchuk, που κατασκεύασε το 1983 μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με συνάρτηση αύξησης β τ.ω. $\beta \prec e^n$ και $e^n \not\prec \beta$, και για κάθε d $n^d \prec \beta$ και $\beta \not\prec n^d$. Grigorchuk and Pak, L' Enseignement Mathematique, 2007.