Ομάδες με εκθετική αύξηση. (de la Harpe, Ch VII)

Μία ελεύθερη ημιομάδα με δύο γεννήτορες έχει συνάρτηση αύξησης

$$\beta(k) = 2^{2k+1} - 1.$$

Εαν μια ομάδα περιέχει μία ελεύθερη ημιομάδα με δύο γεννήτορες, τότε η ομάδα έχει εκθετική αύξηση. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι μια παραλλαγή του Table Tennis Lemma.

Πρόταση. G ομάδα που δρα σε σύνολο X, και $g_1, g_2 \in G$, $X_1, X_2 \subset X$ τέτοια ώστε

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset, \quad g_1(X_1 \cup X_2) \subset X_1, \quad g_2(X_1 \cup X_2) \subset X_2.$$

Τότε η ημιομάδα που παράγεται από τα g_1, g_2 είναι ελεύθερη, και G έχει εκθετική αύξηση.

Παράδειγμα Η υποομάδα $G < GL(2, \mathbb{R})$ που παράγεται από τους πίνακες $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει εκθετική αύξηση.

G αποτελείται από πίνακες της μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ με $a = 2^n$, και $b = p(\frac{1}{2})$ για p πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές.

G δρα στο $\mathbb{R}$: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . x = ax + b$, και εαν $a \neq 1$, $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει σταθερό σημείο $x = \frac{b}{1-a}$.

Εαν διαλέξουμε δύο στοιχεία με $a < 1$ και διαφορετικά σταθερά σημεία μπορούμε να δείξουμε ότι κάποιο δυνάμεις αυτών των στοιχείων ικανοποιούν το κριτήριο της Πρότασης. Συνεπώς G έχει εκθετική αύξηση.

Ο Milnor το 1968 έδειξε το ακόλουθο:

Θεώρημα X συμπαγής συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, με γνήσια αρνητική καμπυλότητα τομών. Τότε η θεμελιώδης ομάδα της X έχει εκθετική αύξηση. //

Ενας τόρος είναι μία πολλαπλότητα της μορφής $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, και έχει θεμελιώδη ομάδα $\mathbb{Z}^n$. Αφού $\mathbb{Z}^n$ έχει πολυωνυμική αύξηση, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει καμία μετρική Riemann σε έναν τόρο που να έχει γνήσια αρνητική καμπυλότητα τομών.

Ελεύθερα γινόμενα

Η άπειρη διεδρική ομάδα $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ έχει μία υποομάδα ισομορφική με την $\mathbb{Z}$, με τάξη 2. Συνεπώς η αύξηση της D_∞ είναι ισοδύναμη με την αύξηση της $\mathbb{Z}$, δηλαδή γραμμική.

Αντιθέτως, εάν $G = A_1 * A_2$ και $(|A_1|-1)(|A_2|-1) \geq 2$, τότε G περιέχει ελεύθερη υποομάδα F με $\operatorname{rank} F \geq 2$.

η οποία έχει εκθετική αύξηση. Τότε η G έχει επίσης εκθετική αύξηση.

Αμαλγάματα

Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή των στοιχείων του αμαλγάματος $G = A_1 *_B A_2$, με $B \leq A_1$, $B \leq A_2$, μπορούμε να δείξουμε ότι εάν $([A_1 : B]-1)([A_2 : B]-1) \geq 2$, τότε G περιέχει μία ελεύθερη υποομάδα F, με $\operatorname{rank} F \geq 2$. Άρα η G έχει εκθετική αύξηση.

Ομάδες με πολυωνυμική αύξηση.

Έχουμε δει οι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες έχουν πολυωνυμική αύξηση. Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι η ομάδα Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & l & 1 \end{bmatrix} : k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

η οποία παράγεται από τους πίνακες

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις $su = us$, $tu = ut$, $t^{-1}s^{-1}ts = u$.

Κάθε στοιχείο έχει κανονική μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{bmatrix} = s^k t^\ell u^m$$

και το μήκος $\lambda(s^k t^\ell u^m)$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\frac{1}{2}\left(|k| + |\ell| + |m|\right) \leq \lambda\left(s^k t^\ell u^m\right) \leq |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|},$$

για κάθε $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$.

<u>Πρόταση</u>. Η ομάδα Heisenberg έχει τεταρτοβάθμια αύξηση: υπάρχουν σταθερές $C_1, C_2 > 0$, τ.ω. για κάθε $r \geq 1$,

$$C_1 r^4 \leq \beta(r) \leq C_2 r^4$$

<u>Μηδενοδύναμη ομάδα.</u>

Για μία ομάδα G, ορίζουμε τις υποομάδες $\gamma_k(G)$:

$$\gamma_1(G) = G \quad , \gamma_{k+1}(G) = \left[G, \gamma_k(G)\right],$$

και την <u>κατιούσα κεντρική σειρά</u>

$$G = \gamma_1(G) \geqslant \gamma_2(G) \geqslant \cdots$$

Η ομάδα G είναι <u>μηδενοδύναμη</u> εάν υπάρχει $c \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$. Το ελάχιστο τέτοιο c είναι η <u>κλάση</u> της μηδενοδύναμης ομάδας G.

Εαν $c = 1$, τότε $\gamma_2(G) = [G,G] = \{1\}$, δηλαδή η G είναι αβελιανή.

<u>Θεώρημα</u> Εαν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα, τότε G έχει πολυωνυμική αύξηση.

Αυτό αποδείχθηκε από διάφορους μαθηματικούς τη δεκαετία του '70.

Στην αντίθετη κατεύθυνση, οι Wolf και Milnor είχαν δείξει το 1968 ότι εαν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη επιλύσιμη ομάδα, η G έχει πολυωνυμική αύξηση <u>εαν</u> η G έχει μία μηδενοδύναμη υποομάδα με πεπερασμένο δείκτη, και στην αντίθετη περίπτωση έχει εκθετική αύξηση. Αυτή η διχοτομία παραπέμπει στη διχοτομία του Tits, η οποία εφαρμόζεται σε πολλές κατηγορίες ομάδων: Λέμε ότι μία κατηγορία ομάδων ικανοποιεί τη διχοτομία του Tits εαν κάθε ομάδα της κατηγορίας είτε περιέχει μία ελεύθερη ομάδα F με $\operatorname{rank} F \geq 2$, είτε περιέχει μία επιλύσιμη ομάδα με πεπερασμένο δείκτη.

Το 1981 ο Gromov χρησιμοποίησε πλήθος νέων εννοιών και τεχνικών για να αποδείξει το ακόλουθο Θεώρημα, που αποτελεί ορόσημο στη γεωμετρική θεωρία ομάδων.

Θεώρημα Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα έχει πολυωνυμική αύξηση εάν περιέχει μία μηδενοδύναμη υποομάδα με πεπερασμένο δείκτη. //