Άθροισμα και γινόμενο (στην κατηγορία των ομάδων)

Θα περιγράψουμε δύο κατασκευές μαθηματικών αντικειμένων που έχουν εφαρμογή σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις.

Θεωρούμε κάποια μαθηματικά αντικείμενα (σύνολα, ομάδες, τοπ.χώρους, ...) A, B και αντίστοιχους μορφισμούς (απεικονίσεις, ομομορφισμούς, συνεχείς απεικονίσεις).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε απλώς σύνολα και απεικονίσεις συνόλων.

Λέμε ότι Σ είναι το άθροισμα των A_1 και A_2 εάν υπάρχουν απεικονίσεις $i_1 : A_1 \to \Sigma$ και $i_2 : A_2 \to \Sigma$ τ.ω. για κάθε σύνολο Y και απεικονίσεις $f_1 : A_1 \to Y$, $f_2 : A_2 \to Y$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\varphi : \Sigma \to Y$ τ.ω.

$$f_1 = \varphi \circ i_1 , \quad f_2 = \varphi \circ i_2$$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, "f_1"] & & \\
& \Sigma \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Y \\
A_2 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Λέμε ότι Π είναι το γινόμενο των A_1 και A_2 εάν υπάρχουν απεικονίσεις $j_1 : \Pi \to A_1$ και $j_2 : \Pi \to A_2$ τ.ω. για κάθε σύνολο X και απεικονίσεις $g_1 : X \to A_1$, $g_2 : X \to A_2$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\psi : X \to \Pi$ τ.ω. $g_1 = j_1 \circ \psi$, $g_2 = j_2 \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
& & A_1 \\
X \arrow[urr, "g_1"] \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[drr, "g_2"'] & \Pi \arrow[ur, "j_1"'] \arrow[dr, "j_2"] & \\
& & A_2
\end{tikzcd}$$

<u>Θεώρημα</u> Το άθροισμα δύο συνόλων, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό (δηλαδή, εάν δύο σύνολα Σ, Σ' ικανοποιούν τον ορισμό, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ τους).

<u>Απ</u> Από την υπόθεση, έχουμε $A_1 \xrightarrow{i_1} \Sigma$, $A_2 \xrightarrow{i_2} \Sigma$ και $A_1 \xrightarrow{i_1'} \Sigma'$, $A_2 \xrightarrow{i_2'} \Sigma'$.

Αφού Σ είναι άθροισμα των A_1, A_2, για κάθε $f_1 : A_1 \to Y$ και $f_2 : A_2 \to Y$ υπάρχει $\varphi : \Sigma \to Y$ τ.ω.

$f_1 = \varphi \circ i_1$, $f_2 = \varphi \circ i_2$.

Θέτουμε $Y = \Sigma'$ και $f_1 = i_1' : A_1 \to \Sigma'$, $f_2 = i_2' : A_2 \to \Sigma'$. Τότε υπάρχει μοναδική

$\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ τ.ω. $i_1' = \varphi \circ i_1$, $i_2' = \varphi \circ i_2$.

Αντιστρέφοντας το ρόλο των Σ και Σ', υπάρχει μοναδική $\varphi' : \Sigma' \to \Sigma$ τ.ω. $i_1 = \varphi' \circ i_1'$ και $i_2 = \varphi' \circ i_2'$.

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\varphi"] & \Sigma' \arrow[r, "\varphi'"] & \Sigma \\
 & A_1 \arrow[ul, "i_1"] \arrow[u, "i_1'"] \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Τώρα θέτουμε $Y = \Sigma$ και $f_1 = i_1 : A_1 \to \Sigma$

Αφού Σ είναι άθροισμα, υπάρχει <u>μοναδική</u> απεικ.

$\chi : \Sigma \to \Sigma$ τ.ω. $\chi \circ i_1 = i_1$.

Αυτό προφανώς ισχύει για $\chi = id_\Sigma$.

Αλλά δείξαμε ότι ισχύει και για την $\varphi' \circ \varphi$.

Από μοναδικότητα, συμπεραίνουμε ότι $\varphi' \circ \varphi = id_\Sigma$

Ανάλογα δείχνουμε και ότι $\varphi \circ \varphi' = id_{\Sigma'}$.

Άρα $\Sigma \cong \Sigma'$. //

Αυτό δείχνει τη μοναδικότητα του αθροίσματος. Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο, για να δείξουμε ότι υπάρχει.

Για σύνολα, το άθροισμα είναι η <u>ξένη ένωση</u>.

$$A_1 \sqcup A_2 = A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\}.$$

$$i_1 : a \longmapsto (a, 1)$$

$$i_2 : b \longmapsto (b, 2)$$

και $\varphi : A_1 \sqcup A_2 \longrightarrow Y$

$$\varphi(a, 1) = f_1(a)$$

$$\varphi(b, 2) = f_2(b).$$ ικανοποιεί τις ιδιότητες.

Θεώρημα Το γινόμενο δύο συνόλων, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό (δηλαδή, εάν δύο σύνολα Π, Π' ικανοποιούν τον ορισμό, τότε υπάρχει αμφι αντιστ. μεταξύ τους).

Απ. Η απόδειξη είναι παρόμοια. Υπάρχουν μοναδικά ψ, ψ' τ.ω.

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "\psi'"] \arrow[dr, "j_1"'] & \Pi' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j_1'"] & \Pi \arrow[dl, "j_1"] \\ & A_1 & \end{tikzcd}$$

$$j_1 = j_1 \circ \psi \circ \psi'$$

και από μοναδικότητα $\psi \circ \psi' = id_{\Pi}$. Παρόμοια $\psi' \circ \psi = id_{\Pi'}$. //

Ποιο είναι το γινόμενο συνόλων; Το καρτεσιανό γινόμενο.

Θεωρούμε $\Pi = A_1 \times A_2$ και $j_1 = pr_1 : A_1 \times A_2 \to A_1 : (a,b) \mapsto a$

$j_2 = pr_2 : A_1 \times A_2 \to A_2 : (a,b) \mapsto b$,

και για οποιοδήποτε απεικονίσεις $g_1 : X \to A_1$, $g_2 : X \to A_2$, ορίζουμε

και $\psi : X \to A_1 \times A_2$

$$\psi(x) = (g_1(x), g_2(x)).$$

Τότε προφανώς $j_1 \circ \psi = g_1$ και $j_2 \circ \psi = g_2$.

Τι συμβαίνει με ομάδες και ομομορφισμούς;

Εαν G_1, G_2 είναι δύο ομάδες, το <u>άθροισμα</u> θα είναι μία ομάδα $G = G_1 * G_2$ με την ιδιότητα οτι υπάρχουν ομομορφισμοί $i_1 : G_1 \to G$, $i_2 : G_2 \to G$ τ.ω. για κάθε ομομορφισμούς $f_1 : G_1 \to H$ και $f_2 : G_2 \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ τ.ω. $f_1 = \varphi \circ i_1$ και $f_2 = \varphi \circ i_2$.

Θα δούμε αργότερα πως να κατασκευάσουμε μία ομάδα με αυτή την ιδιότητα, και θα την ονομάσουμε, όπως ιστορικά ονομάζεται, <u>~~ελεύθερο~~ γινόμενο</u> των G_1 και G_2.

Εαν G_1, G_2 είναι δύο ομάδες, το <u>γινόμενο</u> θα είναι μία ομάδα $G = G_1 \times G_2$ με την ιδιότητα οτι υπάρχουν ομομορφισμοί $j_1 : G \to G_1$, $j_2 : G \to G_2$, τ.ω. για κάθε ομομορφισμούς $g_1 : H \to G_1$, $g_2 : H \to G_2$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : H \to G$ τ.ω. $g_1 = j_1 \circ \psi$, $g_2 = j_2 \circ \psi$.

Μία ομάδα που έχει αυτή την ιδιότητα είναι η ομάδα που ιστορικά ονομάζεται <u>ευθύ άθροισμα</u> ή <u>ευθύ γινόμενο</u> των G_1 και G_2, την οποία θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

<u>Ορισμός</u>. Το <u>ευθύ γινόμενο</u> (ή <u>ευθύ άθροισμα</u>) των ομάδων G_1, G_2 είναι το καρτεσιανό γινόμενο $G_1 \times G_2$ με πράξη

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd)$$

$(a, c \in G_1,\ b, d \in G_2)$.

Το ουδέτερο στοιχείο της $G_1 \times G_2$ είναι το $(1_{G_1}, 1_{G_2})$.
Το αντίστροφο στοιχείο του (a,b) είναι το (a^{-1}, b^{-1}).

$G_1 \times \{1_{G_2}\}$ και $\{1_{G_1}\} \times G_2$ είναι υποομάδες της $G_1 \times G_2$ κανονικά ισόμορφες με τις G_1 και G_2 αντίστοιχα.

<u>Ασκ.</u> α) $(a,1)\cdot(1,b) = (1,b)(a,1)$.

β) $G_1 \times \{1\}$, $\{1\} \times G_2$ είναι κανονικές υποομάδες της $G_1 \times G_2$.

<u>Θεώρημα</u> $G_1 \times G_2$, με προβολές $j_1 : G_1 \times G_2 \to G_1 : (a,b) \mapsto a$, $j_2 : G_1 \times G_2 \to G_2 : (a,b) \mapsto b$, είναι γινόμενο των ομάδων G_1 και G_2.

<u>Απ.</u> Για κάθε ομάδα H, και ομομορφισμούς $g_1 : H \to G_1$, $g_2 : H \to G_2$ ορίζουμε $\psi : H \to G_1 \times G_2 : h \mapsto (g_1(h), g_2(h))$.
Τότε $g_1 = j_1 \circ \psi$ και $g_2 = j_2 \circ \psi$.

<u>Παρατήρηση</u>. Εάν H είναι αβελιανή ομάδα, και

$f_1 : G_1 \longrightarrow H$, $\quad f_2 : G_2 \longrightarrow H$ είναι ομομορφισμοί,

τότε μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$

με $\varphi(a, b) = f_1(a)\, f_2(b)$, είναι ομομορφισμός.

Εάν ορίσουμε $i_1 : G_1 \longrightarrow G_1 \times G_2$ και

$i_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$ τους κανονικούς ενδομορφισμούς $a \longmapsto (a, 1)$

και $b \longmapsto (1, b)$, τότε

$$f_1 = \varphi \circ i_1 \quad \text{και} \quad f_2 = \varphi \circ i_2 .$$

Δηλαδή, η ομάδα $G_1 \times G_2$ έχει και την ιδιότητα του αθροίσματος, αρκεί να περιοριζόμαστε σε αβελιανές ομάδες.

<u>Άσκ.</u> Δείξτε ότι $\varphi(a, b) = f_1(a)\, f_2(b)$ είναι ομομορφισμός $G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ εάν H είναι αβελιανή.
Δείξτε ότι αυτό μπορεί να μην ισχύει εάν H δεν είναι αβελιανή.

<u>Θεώρημα</u> G ομάδα με κανονικές υποομάδες H και K. Εάν $HK = G$ και $H \cap K = \{1\}$, τότε

$$G \cong H \times K.$$

<u>Απ.</u> Συγκρίνατε με απόδειξη "εσωτερικό" ευθύ αθροίσματος διαν. χώρων.

Έστω $a \in G$. Τότε $a = hk$ για $h \in H$ και $k \in K$.

Θα δείξουμε ότι τα h, k είναι μοναδικά: εάν $a = h_1 k_1$ για $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, τότε $hk = h_1 k_1$ και

$$h_1^{-1} h = h_1^{-1}(hk)k^{-1} = h_1^{-1}(h_1 k_1)k^{-1} = k_1 k^{-1}.$$

Αλλά $h_1^{-1}h \in H$, $k_1 k^{-1} \in K$ και αφού είναι ίσα, ανήκουν στην τομή $H \cap K = 1$.

Ορίζουμε $f : G \longrightarrow H \times K : a \longmapsto (h, k)$.

Δείξαμε ότι είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, και μάλιστα αμφιμονοσήμαντη.

Θα δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός: έστω $a = hk$, $b = mn$ για $h, m \in H$, $k, n \in K$. Τότε

$$ab = hkmn$$

Για να ισχύει $ab \longmapsto (h,k)(m,n) = (hm, kn)$ πρέπει να δείξουμε ότι $hkmn = hmkn$, δηλαδή $km = mk$ ή $kmk^{-1}m^{-1} = 1$.

Αφού H είναι κανονική, $kmk^{-1} \in H$, άρα $kmk^{-1}m^{-1} \in H$.

Αφού K είναι κανονική, $mk^{-1}m^{-1} \in K$, άρα $kmk^{-1}m^{-1} \in K$.

Συνεπώς $kmk^{-1}m^{-1} \in H \cap K = 1$.

Άρα $ab = hk\,mn = hm\,kn$, με $hm \in H$, $kn \in K$,

άρα $f(ab) = (hm, kn) = (h,k)(m,n) = f(a)f(b)$.

Συνεπώς f είναι ομομορφισμός.

Αφού f είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι ισομορφισμός.

Παράδειγμα

Η ομάδα $\mathbb{Z}_6 = \langle a \rangle$ με $a^6 = 1$, έχει υποομάδες

$H = \langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $K = \langle a^3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, οι οποίες είναι

κανονικές, αφού $\mathbb{Z}_6$ είναι αβελιανή, και $H \cap K = 1$.

$\mathbb{Z}_6 = HK \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

Η ομάδα $S_3 = \langle a, b \rangle$ με $a^3 = 1$, $b^2 = 1$, $bab = a^2$,

έχει υποομάδες $H = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ και $K = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$,

και $S_3 = HK$, $H \cap K = 1$. Η υποομάδα H είναι

κανονική, αλλά η K δεν είναι. Έτσι $S_3 \not\cong H \times K$.

Θεώρημα Εάν $A_1 \triangleleft G_1$ και $A_2 \triangleleft G_2$, τότε

$A_1 \times A_2 \triangleleft G_1 \times G_2$ και

$$G_1 \times G_2 / A_1 \times A_2 \cong G_1/A_1 \times G_2/A_2 .$$

Απ. $\psi : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1/_{A_1} \times G_2/_{A_2} : (a,b) \longmapsto (A_1 a ; A_2 b)$

είναι επιμορφισμός, και ο πυρήνας είναι $A_1 \times A_2$:

$\psi(a,b) = (A_1, A_2)$ ακριβώς όταν $(a,b) \in A_1 \times A_2$.

Από το 1ο Θ. Ισομορφισμών έχουμε το ζητούμενο. //

Ειδικότερα, εάν $N \trianglelefteq H$ τότε $N \times \{1\} \trianglelefteq H \times K$, και

εάν $G = H \times K$, τότε $G/_{H\times\{1\}} \cong K$.

<u>Άθροισμα και γινόμενο οικογένειας ομάδων</u>.

Γενικεύουμε την έννοια του αθροίσματος και του γινομένου ομάδων (ή άλλων αντικειμένων) για πεπερασμένη ή άπειρη οικογένεια ομάδων.

Εάν $\mathcal{A} = \{G_\alpha, \alpha \in A\}$ είναι ένα σύνολο ομάδων,

τότε η ομάδα Σ είναι άθροισμα της $\mathcal{A}$ εάν

για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ομομορφισμός $i_\alpha : G_\alpha \to \Sigma$ τ.ω.

για κάθε ομάδα H και σύνολο ομομορφισμών $f_\alpha : G_\alpha \to H$,

υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : \Sigma \to H$ τ.ω.

$f_\alpha = \varphi \circ i_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\ \Sigma \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

Η ομάδα Π είναι γινόμενο της $\mathcal{A}$ εάν για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχει ομομορφισμός $j_\alpha : \Pi \longrightarrow G_\alpha$, τ.ω. για κάθε ομάδα H και σύνολο ομομορφισμών $g_\alpha : H \longrightarrow G_\alpha$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : H \longrightarrow \Pi$ τ.ω. $g_\alpha = j_\alpha \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd} & G_\alpha \\ H \arrow[ur, "g_\alpha"] \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \Pi \arrow[u, "j_\alpha"'] \end{tikzcd}$$