Κέντρο ομάδας

$Z(G)$ είναι το σύνολο όλων των $a \in G$ τα οποία μετατίθενται με κάθε στοιχείο της G.

$$Z(G) = \{ a \in G : gag^{-1} = a \text{ για κάθε } g \in G \}$$

Λήμμα. $Z(G) \triangleleft G$.

Εάν $a \in G$, η κεντροποιούσα ομάδα του a είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της G που μετατίθενται με το a.

$$C_G(a) = \{ g \in G : gag^{-1} = a \}$$

Θεώρημα Ο αριθμός των διαφορετικών στοιχείων της κλάσης συζυγίας του a είναι ίσος με το δείκτη της κεντροποιούσας του a.

$$|a^G| = [G : C_G(a)] .$$

Συζυγής υποομάδα

$H \leq G$, $g \in G$. Η συζυγής υποομάδα της H από το g είναι $H^g = gHg^{-1} = \{ ghg^{-1} : h \in H \}$.

H^g είναι υποομάδα της G ισομορφική προς την H: $\gamma_g|_H$ είναι ισομορφισμός.

Η <u>κανονικοποιούσα</u> ομάδα της υποομάδας $H \leq G$, $N_G(H)$ είναι

$$N_G(H) = \{ g \in G : gHg^{-1} = H \}.$$

$H \trianglelefteq N_G(H)$ και $N_G(H)$ είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της G στην οποία η H είναι κανονική.

<u>Θεωρ.</u> $H \leq G$. Ο αριθμός των διαφορετικών συζυγών υποομάδων της H στην G είναι ίσος με το δείκτη της κανονικοποιούσας υποομάδας,

$$|\{ H^g : g \in G \}| = [G : N_G(H)].$$

Επίσης $H^a = H^b$ <u>εάν</u> $b^{-1}a \in N_G(H)$.

<u>Δράσεις ομάδων</u>

Εάν X είναι ένα σύνολο και G είναι ομάδα, X είναι ένα (αριστερό) <u>G-σύνολο</u>, και G <u>δρα</u> (στα αριστερά) στο X, εάν υπάρχει μία απεικόνιση, η (αριστερή) <u>δράση</u> της G στο X,

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto gx$$

τ.ω.

i) $1x = x$ για κάθε $x \in X$.

ii) $g(hx) = (gh)x$ για κάθε $g, h \in G$ και κάθε $x \in X$.

[Ανάλογα για <u>δεξιά</u> <u>δράση</u>: $\beta : X \times G \to X : (x, g) \longmapsto xg$

ii) $(xg)h = x(gh)$.

Απ. Θεωρήματος στη 24.

Συμβολίζουμε G/C το σύνολο των αριστερών πλευρικών συνόλων της κεντροποιούσας $C = C_G(a)$.

Ορίζουμε $f : a^G \longrightarrow G/C : gag^{-1} \longmapsto gC$.

Η f είναι καλά ορισμένη: εάν $gag^{-1} = hah^{-1}$ τότε $h^{-1}gag^{-1}h = a$ και $h^{-1}g \in C$, συνεπώς $gC = hC$.

Η f είναι 1-1: εάν $gC = hC$, τότε $h^{-1}g \in C$, άρα $h^{-1}g$ μετατίθεται με το a, $h^{-1}gag^{-1}h = a$.
Συνεπώς $gag^{-1} = hah^{-1}$.

Η f είναι επί: εάν $g \in G$, $gC = f(gag^{-1})$.

Άρα $|a^G| = |G/C|$.

Απ. Θεωρήματος σελ 25

Συμβολίζουμε $[H]$ το σύνολο των συζυγών υποομάδων της H, και G/N το σύνολο των αριστερών πλευρικών συνόλων της κανονικοποιούσας $N = N_G(H)$.

Ορίζουμε $f : [H] \to G/N : H^a \longmapsto aN$.

Η f είναι καλά ορισμένη: εάν $aHa^{-1} = bHb^{-1}$ τότε $b^{-1}aHa^{-1}b = H$, άρα $b^{-1}a \in N$, και $aN = bN$.

Η f είναι 1-1: εάν $aN = bN$, τότε $b^{-1}a \in N$, άρα $b^{-1}aHa^{-1}b = H$ και $H^a = H^b$.

Η f είναι επί: εάν $a \in G$, $aN = f(H^a)$.

Άρα $|[H]| = |G/N|$. //

Μια δράση $^{\alpha}$ της G στο X αντιστοιχεί σε έναν ομομορφισμό από την G στην ομάδα S_X των αντιστρέψιμων απεικονίσεων του X στον εαυτό του: $\tilde{\alpha} : G \longrightarrow S_X : g \longmapsto (\tilde{\alpha}(g) : X \to X)$, όπου $\tilde{\alpha}(g) : x \longmapsto g^x$.

Πράγματι $\tilde{\alpha}(gh)(x) = (gh)x = g(hx) = \tilde{\alpha}(g) \circ \tilde{\alpha}(h)(x)$.

Εαν X είναι G-σύνολο, η <u>τροχιά</u> του $x \in X$ είναι το σύνολο $O(x) = Gx = \{ gx : g \in G \}$.

Οι τροχιές ορίζουν μία διαμέριση του X: $x \sim y$ εαν υπάρχει $g \in G$ τ.ω. $y = gx$.

Η <u>σταθεροποιούσα</u> υποομάδα του x είναι η υποομάδα

$$G_x = \{ g \in G : gx = x \}$$

Η δράση της G στο X είναι <u>μεταβατική</u> (transitive) εαν υπάρχει μόνο μία τροχιά.

Η δράση της G στο X είναι <u>αξιόπιστη</u> (faithful) εάν $\tilde{\alpha}$ είναι μονομορφισμός, δηλαδή εάν το μόνο στοιχείο της G που αφήνει σταθερό κάθε $x \in X$ είναι το $1 \in G$.

Η δράση της G στο X είναι <u>ελεύθερη</u> (free) εάν για κάθε $x \in X$, $G_x = \{1\}$.

<u>Θεώρημα</u> Εαν G δρά στο σύνολο X, τότε

$$|O(x)| = [G : G_x].$$

<u>Απ.</u> Για $x \in X$, συμβολίζουμε G/G_x το σύνολο των αριστερών πλευρικών συνόλων της σταθεροποιούσας G_x, και ορίζουμε $f : O(x) \longrightarrow G/G_x : ax \longmapsto aG_x$.

Η f είναι καλά ορισμένη: εαν $ax = bx$ τότε $b^{-1}ax = x$, άρα $b^{-1}a \in G_x$ και $aG_x = bG_x$.

Η f είναι 1-1: εάν $aG_x = f(ax) = f(bx) = bG_x$ τότε $b^{-1}a \in G_x$, άρα $b^{-1}ax = x$ και $ax = bx$.

Η f είναι επί: εάν $a \in G$, τότε $aG_x = f(ax)$.

Άρα $|O(x)| = |G/G_x| = [G : G_x]$. //.

Για πεπερασμένο ομάδες, ο αριθμός των στοιχείων μιας τροχιάς διαιρεί την τάξη της ομάδας.

Τα θεωρήματα των σελίδων 24 και 25 είναι ειδικές περιπτώσεις των προηγουμένων:

- Μια ομάδα G δρα στον εαυτό της με συζυγίες: για $g \in G$, $x \in G$, $gx = gxg^{-1}$.
  Τότε η τροχιά $O(x)$ είναι η κλάση συζυγίας x^G, και η σταθεροποιούσα G_x είναι η κεντροποιούσα $C_G(x)$.
  Άρα $|O(x)| = |x^G| = [G : C_G(x)] = [G : G_x]$.

- Μια ομάδα G δρα στο σύνολο όλων των υποομάδων της με συζυγία: εάν $H \leq G$, $g \cdot H = gHg^{-1}$.
  Τότε η τροχιά $O(H)$ είναι το σύνολο όλων των συζυγών υποομάδων της H, και η σταθεροποιούσα G_H είναι η κανονικοποιούσα $N_G(H)$.
  Άρα $|O(H)| = |[H]| = [G : N_G(H)] = [G : G_H]$.

Μία άλλη σημαντική δράση της G στον εαυτό της είναι η δράση με αριστερό πολλαπλασιασμό: $\lambda : G \times G \to G$,

$$\lambda(g,x) = g \cdot x = L_g(x) = gx$$

Αυτή η δράση είναι αξιόπιστη και μεταβατική:

Για $g \neq 1$, $g \cdot 1 = g \neq 1$, άρα είναι αξιόπιστη.

Για $x, y \in G$ και $g = yx^{-1}$, $g \cdot x = y$.

<u>Θεώρημα Cayley</u>. Κάθε ομάδα G είναι ισομορφική με μία υποομάδα μίας συμμετρικής ομάδας. Ειδικότερα

$$G \cong \tilde{\lambda}(G) \leqslant S_G .$$

<u>Απ.</u> $\tilde{\lambda}$ είναι ομομορφισμός $\tilde{\lambda} : G \to S_G$.

Αφού η λ είναι πιστή, $\tilde{\lambda}$ είναι μονομορφισμός.

Συνεπώς $G \cong \tilde{\lambda}(G)$. //

Η αριστερή δράση της G στον εαυτό της με δεξιό πολλαπλασιασμό, $\rho(g,x) = R_g(x) = xg^{-1}$ δίδει επίσης έναν ισομορφισμό $\tilde{\rho}$ της G με μία υποομάδα της S_G. Αυτός είναι διαφορετικός από τον $\tilde{\lambda}$.

Παραδείγματα.

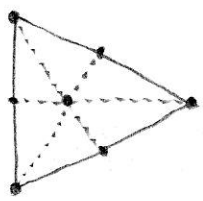
1. $G = D_{2n}$ δρά στο κανονικό πολύγωνο με n κορυφές.

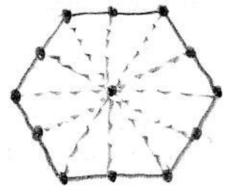
Εαν x είναι μία κορυφή του πολυγώνου, ή το κέντρο μίας πλευράς του πολυγώνου, τότε $G_x \cong \mathbb{Z}_2$.

Εαν x είναι το κέντρο του πολυγώνου, $G_x = G$.

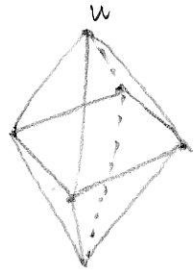
Εαν x βρίσκεται σε μία ευθεία που συνδέει το κέντρο του πολυγώνου με μία κορυφή ή με το μέσο μίας πλευράς, $G_x = \mathbb{Z}_2$.

Για όλα τα υπόλοιπα σημεία του πολυγώνου, $G_x = 1$.





2. u



Οκτάεδρο.

Η ομάδα περιστροφών του οκταέδρου δρά μεταβατικά στο σύνολο των κορυφών.

Άρα $|O(u)| = 6$.

Η σταθεροποιούσα της u στην ομάδα περιστροφών του οκταέδρου είναι $\cong \mathbb{Z}_4$, αφού παράγεται από περιστροφή κατά $\pi/2$.

Άρα η ομάδα περιστροφών του οκταέδρου έχει $4 \cdot 6$ στοιχεία.

Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι $\cong S_4$.

Η σταθεροποιούσα της u στην ομάδα όλων των συμμετριών του οκταέδρου (περιστροφές και ανακλάσεις) είναι $\cong D_8$. Η ομάδα όλων των συμμετριών έχει $8 \cdot 6$ στοιχεία.

Η άπειρη διεδρική ομάδα D_∞.

Θεωρήστε την ομάδα μετασχηματισμών του επιπέδου που παράγεται από ανακλάσεις σε δύο παράλληλες ευθείες:

$a : (x,y) \longmapsto (-x,y)$ ανάκλαση στην ευθεία $x=0$

$b : (x,y) \longmapsto (2-x,y)$ ανάκλαση στην ευθεία $x=1$.

Τότε $ab : (x,y) \longmapsto (x-2,y)$

$ba : (x,y) \longmapsto (x+2,y)$

είναι παράλληλες μεταφορές του επιπέδου κατά $(-2,0)$ και $(2,0)$.

Άρα $(ab)^n$ και $(ba)^n$ είναι παράλληλες μεταφορές του επιπέδου κατά $2n$ προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.

Συμπεραίνουμε ότι $\langle a,b \rangle$ είναι άπειρη ομάδα. Την ονομάζουμε άπειρη διεδρική ομάδα, και τη συμβολίζουμε D_∞.

Αφού ba απεικονίζει την ευθεία $x=0$ στην ευθεία $x=2$, $(ba)a(ba)^{-1}$ είναι η ανάκλαση στην ευθεία $x=2$. Αλλά $(ba)a(ba)^{-1} = baaab = bab$.

Παρόμοια, $aba = abb(ab)^{-1}$ είναι η ανάκλαση στην ευθεία $x=-1$.

Βλέπουμε ότι όλη η δράση της D_∞ αποτυπώνεται στον x-άξονα.

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την D_∞ ως την ομάδα συμμετριών της ευθείας $\mathbb{R}$, που παράγεται από τις

$a : x \longmapsto -x \;, \quad b : x \longmapsto 2-x .$

<u>Πρόταση</u>. Κάθε στοιχείο της D_∞ γράφεται ως εναλλασσόμενο γινόμενο από a και b. Δηλαδή έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

$(ab)^n : x \longmapsto x-2n$ μετατόπιση αριστερά κατά $2n$

$(ba)^n : x \longmapsto x+2n$ μετατόπιση δεξιά κατά $2n$

$(ab)^n a : x \longmapsto -x-2n$ ανάκλαση στο $-n$

$(ba)^{n-1} b : x \longmapsto -x+2n$ ανάκλαση στο n.

<u>Πρόταση</u> $H = \langle a, bab \rangle$ είναι υποομάδα της D_∞ τάξης 2, ισομορφική με την D_∞.

<u>Απ.</u> Θέτουμε $\alpha = a$, $\beta = bab$, και ορίζουμε $\varphi : H \longrightarrow D_\infty$ με $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. και επεκτείνουμε σε ομομορφισμό, ο οποίος είναι καλά ορισμένος γιατί κάθε στοιχείο της H διαφορετικό από το 1, γράφεται

με μοναδικό τρόπο ως εναλλασσόμενο γινόμενο των α και β.

φ είναι επιμορφισμός, αφού $a, b \in \operatorname{im} \varphi$.

Για να δείξουμε ότι φ είναι μονομορφισμός, παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της H διαφορετικό από το 1 απεικονίζεται σε εναλλασσόμενο γινόμενο των a και b, το οποίο είναι διαφορετικό από το 1.

Τέλος, η H αποτελείται από όλα τα στοιχεία της D_∞ που έχουν άρτιο πλήθος b. Άρα $D_\infty = H \cup Hb$. //