Ελεύθερες ομάδες.

Ορισμός Σύνολο X. Ομάδα F που περιέχει το σύνολο X.

Η ομάδα F είναι ελεύθερη ομάδα με βάση X εάν για κάθε ομάδα G και απεικόνιση $f: X \longrightarrow G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός του F στο G που επεκτείνει την f:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Από αυτόν τον ορισμό μπορούμε να δείξουμε ότι μία ελεύθερη ομάδα στο X παράγεται από το X, και ότι κάθε δύο ελεύθερες ομάδες στο X είναι ισομορφικές.

Το πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι υπάρχει μία ομάδα που να ικανοποιεί τη συνθήκη του ορισμού.

Θεώρημα Για κάθε σύνολο X υπάρχει ομάδα F που είναι ελεύθερη στο X.

Θα περιγράψουμε την κατασκευή της ομάδας F.

Θεωρούμε το σύνολο $A = X \times \{1,-1\} \cup \{(1,0)\}$ (1)

και συμβολίζουμε τα στοιχεία του $x^1 = (x,1)$

$x^{-1} = (x,-1)$ και $x^0 = 1 = (1,0)$.

Παρατήρηση: εάν $X = \emptyset$, $A = \{1\}$.

Ονομάζουμε το σύνολο A αλφάβητο, και τα στοιχεία του γράμματα. Θεωρούμε το σύνολο όλων των ακολουθιών στο A, $S = A^{\mathbb{N}}$.

Μία ακολουθία ονομάζεται <u>λέξη</u> (στο αλφάβητο A) εάν από κάποιο σημείο και πέρα είναι σταθερή ίση με 1:

λέξη: $w = (a_1, a_2, \dots) \in S$

και υπάρχει $n \geq 0$ τ.ω. για $i > n$, $a_i = 1$. Το μικρότερο τέτοιο n ονομάζεται <u>μήκος</u> της λέξης w.

Η σταθερή λέξη $w = (1, 1, 1, \dots)$ ονομάζεται <u>κενή λέξη</u> και συμβολίζεται 1. Η κενή λέξη έχει μήκος 0.

Μία λέξη w είναι <u>ανηγμένη</u> (reduced) εάν ικανοποιεί τις ιδιότητες

α) τα γράμματα x^1 και x^{-1} δεν εμφανίζονται πλάι-πλάι, δηλαδή
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εάν $a_n = x^1$ τότε $a_{n+1} \neq x^{-1}$
και εάν $a_n = x^{-1}$ τότε $a_{n+1} \neq x^1$.

β) εάν $a_m = 1$, τότε $a_n = 1$ για κάθε $n > m$.

Δηλαδή σε μια ανηγμένη λέξη δεν έχουμε συμπλέγματα της μορφής $\dots x^1 x^{-1} \dots$

ή $\dots 1 \, x^1 \dots$

Μία λέξη διαφορετική από την κενή λέξη, συμβολίζεται

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

όπου $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ και $\varepsilon_n = \pm 1$. Συχνά παραλείπουμε τον εκθέτη 1, και συμβολίζουμε το γράμμα x^1 με x. Παρατηρούμε ότι n είναι το μήκος της λέξης

Για παράδειγμα, η λέξη

$$(x_1^1, x_2^{-1}, x_3^1, 1, 1, \ldots)$$

συμβολίζεται $\quad x_1 x_2^{-1} x_3$.

Στο σύνολο των λέξεων στο A μπορούμε να ορίσουμε πολλαπλασιασμό απλώς παραθέτοντας τις λέξεις με τον παραπάνω συμβολισμό:

$$(x_1 x_2^{-1} x_3)(x_2 x_1^{-1} x_4) = x_1 x_2^{-1} x_3 x_2 x_1^{-1} x_4$$

Παρατηρούμε ότι η παράθεση δύο ανηγμένων λέξεων δεν είναι υποχρεωτικά ανηγμένη:

$$(x_1 x_2)(x_2^{-1} x_3) = x_1 \underbrace{x_2 x_2^{-1}} x_3$$

Μπορούμε να αναγάγουμε οποιαδήποτε λέξη σε μία ανηγμένη λέξη: έστω $X = \{x, y, z\}$ και

$$\begin{aligned}
w &= x^{-1} \underbrace{x^{-1} x}\, y\, \underbrace{y\, y^{-1}}\, x\, x\, z^{-1} \underbrace{z^{-1} z}\, z\, \underbrace{x^{-1} x}\, \underbrace{z^{-1} z}\, x^{-1} x^{-1} y^{-1} \\
&= x^{-1}\, y\, x\, x\, \underbrace{z^{-1} z}\, x^{-1} x^{-1} y^{-1} \\
&= x^{-1}\, y\, x\, \underbrace{x\, x^{-1}}\, x^{-1} y^{-1} \\
&= x^{-1}\, y\, \underbrace{x\, x^{-1}}\, y^{-1} \\
&= x^{-1}\, \underbrace{y\, y^{-1}} \\
&= x^{-1}.
\end{aligned}$$

Μία διαφορετική διαδικασία αναγωγής δίδει την ίδια ανηγμένη λέξη:

$$
\begin{aligned}
w &= \left(x^{-1} x^{-1} x\, y\, y\, y^{-1}\, x\, x\, z^{-1} z^{-1}\right)\left(z\, z\, x^{-1} x\, z^{-1}\right)\left(z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1}\right) \\
&= \left(x^{-1} y\, x\, x\, z^{-1} z^{-1}\right)\left(z\, z\, z^{-1}\right)\left(z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1}\right) \\
&= \left(x^{-1} y\, x\, x\, z^{-1} z^{-1}\right)\left(z\right)\left(z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1}\right) \\
&= \left(x^{-1} y\, x\, x\, z^{-1} z^{-1} z\right)\left(z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1}\right) \\
&= \left(x^{-1} y\, x\, x\, z^{-1}\right)\left(z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1}\right) \\
&= x^{-1} y\, x\, x\, z^{-1} z\, x^{-1} x^{-1} y^{-1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Εάν $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ είναι μία λέξη, ορίζουμε την <u>αντίστροφη</u> λέξη, $w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$.

Μία <u>υπολέξη</u> της λέξης w είναι είτε η κενή λέξη είτε μία λέξη της μορφής $x_i^{\varepsilon_i} \dots x_j^{\varepsilon_j}$ για $1 \le i \le j \le n$.

Εάν v είναι υπολέξη της w, υπάρχουν υπολέξεις w' και w'' έτσι ώστε

$$w = w' v w''$$

Εαν w είναι ανηγμένη, δεν περιέχει υπολέξεις της μορφής x^0 ή $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$.

Εστω F το σύνολο όλων των ανηγμένων λέξεων στο αλφάβητο A.

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό στο F, τον οποίο ονομάζουμε <u>παράθεση</u> (juxtaposition)

Εαν $w, u \in F$, υπάρχει μία υπολέξη v της w, $w = w'v$, τέτοια ώστε v^{-1} είναι υπολέξη της u, $u = v^{-1}u''$, και τέτοια ώστε $w'u''$ είναι ανηγμένη λέξη.

Ορίζουμε $$w \cdot u = w'u''. \qquad (2)$$

<u>Θεώρημα</u> Το σύνολο F με αυτόν τον πολλαπλασιασμό είναι ομάδα, και μάλιστα ελεύθερη ομάδα στο σύνολο X.

<u>Απ.</u> Είναι προφανές ότι η πράξη έχει ουδέτερο στοιχείο την κενή λέξη, και ότι κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο, την αντίστροφη λέξη, $w \cdot w^{-1} = 1$.
Για να αποδείξουμε απ' ευθείας ότι ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, θα χρειαζόταν να εξετάσουμε πολλές περιπτώσεις. Αποφεύγουμε αυτό με το ακόλουθο τρικ του van der Waerden.

Για κάθε $x \in X$, θεωρούμε τις απεικονίσεις στο σύνολο των ανηγμένων λέξεων

$$|x| : F \to F \qquad |x^{-1}| : F \to F$$

$$|x^{\varepsilon}|\,(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}) = \begin{cases} x^{\varepsilon} x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} & \text{εάν } x^{\varepsilon} \neq x_1^{-\varepsilon_1} \\ x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} & \text{εάν } x^{\varepsilon} = x_1^{-\varepsilon_1} \end{cases} \qquad (3)$$

Τότε $|x^{\varepsilon}| \circ |x^{-\varepsilon}|$ και $|x^{-\varepsilon}| \circ |x^{\varepsilon}|$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση id_F.

Άρα $|x^{\varepsilon}|$ είναι μετάθεση των στοιχείων του F, με αντίστροφο $|x^{-\varepsilon}|$. Στην ομάδα S_F όλων των μεταθέσεων του F, θεωρούμε την υποομάδα $\mathcal{F}$ που παράγεται από το σύνολο $[X] = \{ |x| : x \in X \}$.

Παρατηρούμε ότι $|x| \longmapsto x$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $[X] \to X$.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερη ομάδα στο $[X]$.

Κάθε στοιχείο $g \in \mathcal{F}$ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση στοιχείων του $[X]$, δηλαδή

$$g = |x_1^{\varepsilon_1}| \circ |x_2^{\varepsilon_2}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|, \qquad (4)$$

όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, έτσι ώστε $|x^{\varepsilon}|, |x^{-\varepsilon}|$ δεν εμφανίζονται πλάι-πλάι, αφού εάν γινόταν αυτό θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε. Αφού $|x_n^{\varepsilon_n}|(1) = x_n^{\varepsilon_n}$, $|x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}|(x_n^{\varepsilon_n}) = x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} x_n^{\varepsilon_n}$, ...

έχουμε
$$g(1) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}.$$

Αφού η γραφή μιας ανηγμένης λέξης είναι μοναδική, η παραγοντοποίηση (4) είναι μοναδική.

Θεωρούμε ομάδα G και απεικόνιση $f : [X] \to G$.

Αφού η παραγοντοποίηση (4) είναι μοναδική, μπορούμε να ορίσουμε επέκταση της f, $\varphi : \mathcal{F} \to G$

$$\varphi\left(|x_1^{\varepsilon_1}| \circ |x_2^{\varepsilon_2}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|\right)$$

$$= f(|x_1^{\varepsilon_1}|)\, f(|x_2^{\varepsilon_2}|) \cdots f(|x_n^{\varepsilon_n}|) \in G$$

Θα δείξουμε ότι φ είναι ομομορφισμός. Θεωρούμε $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ και $u = y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$ ανηγμένες λέξεις στο σύνολο X, και $\bar{w} = |x_1^{\varepsilon_1}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|$, $\bar{u} = |y_1^{\delta_1}| \circ \cdots \circ |y_m^{\delta_m}|$ τα αντίστοιχα στοιχεία της $\mathcal{F}$. Εάν wu είναι ανηγμένη λέξη,

$$\varphi(\bar{w} \circ \bar{u}) = f(|x_1^{\varepsilon_1}|) \cdots f(|x_n^{\varepsilon_n}|)\, f(|y_1^{\delta_1}|) \cdots f(|y_m^{\delta_m}|)$$

$$= \varphi(\bar{w})\, \varphi(\bar{u}).$$

Εάν η λέξη wu δεν είναι ανηγμένη, υπάρχουν w', v, u'' τέτοια ώστε $w = w'v$, $u = v^{-1}u''$ και $w'u''$ είναι ανηγμένη.

Αφού $w'v$ και $v^{-1}u''$ είναι ανηγμένες λέξεις, έχουμε

$$\varphi(\bar{w}) = \varphi(\bar{w}')\,\varphi(\bar{v})$$

και $$\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{v}^{-1})\,\varphi(\bar{u}'') = \varphi(\bar{v})^{-1}\,\varphi(\bar{u}'')$$

Άρα $$\varphi(\bar{w})\,\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{w}')\,\varphi(\bar{v})\,\varphi(\bar{v})^{-1}\,\varphi(\bar{u}'')$$

$$= \varphi(\bar{w}')\,\varphi(\bar{u}'').$$

Από την άλλη, $\bar{w}\circ\bar{u} = (\bar{w}'\circ\bar{v})\circ(\bar{v}^{-1}\circ\bar{u}'') = \bar{w}'\circ\bar{u}''$

άρα $\varphi(\bar{w}\circ\bar{u}) = \varphi(\bar{w}'\circ\bar{u}'')$ και αφού $w'u''$ είναι ανηγμένη,

$$= \varphi(\bar{w}')\,\varphi(\bar{u}'').$$

Άρα φ είναι ομομορφισμός.

Μοναδικότητα της φ:

Εάν υπάρχει $\psi : \mathcal{F} \to G$ που επεκτείνει την f,

τότε φ και ψ έχουν τις ίδιες τιμές στο σύνολο $[X]$

που παράγει την υποομάδα $\mathcal{F}$, άρα $\varphi = \psi$.

Άρα $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερη ομάδα στο $[X]$.

Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $J : [X] \to X : |x| \mapsto x$ επεκτείνεται σε απεικόνιση από το $\mathcal{F}$ στις ανηγμένες λέξεις στο X, $\bar{J} : \mathcal{F} \to F : |x_1^{\varepsilon_1}|\circ\dots\circ|x_n^{\varepsilon_n}| \longmapsto x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$.

Μέσω της $\bar{\zeta}$ μεταφέρουμε τη δομή της ομάδας από το $\mathcal{F}$ στο F, έτσι ώστε $\bar{\zeta}$ να είναι ισομορφισμός:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F} \arrow[ddll, "\bar{\zeta}"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
 & & {[X]} \arrow[u] \arrow[r, "f"'] \arrow[dl, "\zeta"] & G \arrow[ddll, "id_G"] \\
F \arrow[dr, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & X \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{f}"] & & \\
 & G & &
\end{tikzcd}$$

Έτσι, για κάθε $\tilde{f}: X \to G$ υπάρχει μοναδική επέκταση σε ομομορφισμό $\tilde{\varphi}: F \to G$, και F είναι ελεύθερη ομάδα στο X. //

<u>Πόρισμα</u> Κάθε ομάδα G είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

<u>Απ.</u> Θεωρούμε $X = G$, και F την ελεύθερη ομάδα στο σύνολο X.

Η κανονική απεικόνιση $id: X \to G$ έχει μοναδική επέκταση σε ομομορφισμό $\varphi: F \to G$.

Αφού id είναι επεικόνιση, το ίδιο ισχύει για την επέκταση φ.

Άρα $G \cong F/\ker\varphi$.