<u>Ορισμός</u>. Θεωρούμε ένα σύνολο X και ένα σύνολο Δ λέξεων στο αλφάβητο A.
Έστω F η ελεύθερη ομάδα στο X και R η κανονική υποομάδα της F που παράγεται από τις λέξεις στο Δ.
Λέμε ότι η ομάδα $G = F/R$ έχει <u>γεννήτορες</u> X και <u>σχέσεις</u> Δ. Το ζεύγος $(X \mid \Delta)$ ονομάζεται <u>παράσταση</u> της ομάδας G.

Μια σχέση $r \in \Delta$ συχνά γράφεται $r = 1$ ή ακόμα $w = u$, όπου $r = wu^{-1}$.

<u>Παραδείγματα παραστάσεων</u>

$\mathbb{Z}_6$: $(x \mid x^6)$

$\mathbb{Z}_6$: $(x, y \mid x^3, y^2, xyx^{-1}y^{-1})$

D_{2n} : $(x, y \mid x^n, y^2, (yx)^2)$

Q : $(a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1})$

Q : $(x, y \mid xyx = y, x^2 = y^2)$

$$\mathbb{Z}^2 = \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

Λήμμα F ελεύθερη ομάδα με βάση X.
Τότε F/F' είναι ελεύθερη αβελιανή
με βάση $X_\# = \{ xF' : x \in X \}$.

Απ. Έστω A αβελιανή ομάδα, και $f : X_\# \to A$
συνάρτηση.
Θεωρούμε $f_\# : X \to A$ με $f_\#(x) = f(xF')$.
Αφού F είναι ελεύθερη, υπάρχει $\varphi : F \to A$
τ.ω. $\varphi(x) = f_\#(x)$ για $x \in X \subseteq F$.
Αφού A είναι αβελιανή, $\varphi(F') = 0$,
και φ είναι σταθερή στο wF'.
Θεωρούμε $\tilde{\varphi} : F/F' \to A : wF' \longmapsto \varphi(w)$.
Η $\tilde{\varphi}$ επεκτείνει την f: $\tilde{\varphi}(xF') = f_\#(x) = f(xF')$.
Θα δείξουμε μοναδικότητα:
Έστω $\vartheta : F/F' \to A$ και $\vartheta(xF') = f(xF')$.
Θεωρούμε το φυσικό ομομορφισμό $\nu : F \to F/F'$.

Τότε για κάθε $x \in X$, $\vartheta\nu(x) = \vartheta(xF') = f(xF') = \varphi(x)$.

Αφού F είναι ελεύθερη στο X, οι επεκτάσεις $\vartheta\nu$ και $\tilde{\varphi}\nu$ της $f_\#$ είναι ίσες.

Αφού ν είναι επιμορφισμός, $\vartheta = \tilde{\varphi}$.

Άρα $\tilde{\varphi}$ είναι μοναδική, και F/F' είναι ελεύθερη αβελιανή.

<u>Θεώρημα</u> F, G ελεύθερες ομάδες με βάσεις X και Y αντίστοιχα. Τότε $F \cong G$ <u>εάν</u> $|X| = |Y|$.

<u>Απ</u>.

$\Rightarrow$ Εάν $\varphi : F \xrightarrow{\cong} G$, τότε $F/F' \cong G/G'$.

και F/F' είναι ελεύθερη αβελιανή με βάση $X_\#$.

Αλλά $|X_\#| = |X|$, άρα $|X| = \operatorname{rank}(F/F')$

Παρόμοια $|Y| = \operatorname{rank}(G/G')$, και από το αντίστοιχο Θεώρημα για ελεύθερες αβελιανές, $|X| = |Y|$.

$\Leftarrow$ Εάν $|X| = |Y|$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $f : X \to Y$, και μονόμορφη $\underline{f} : X \to G$. Αφού F είναι ελεύθερη, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : F \to G$ που επεκτείνει την $\underline{f}$. Παρόμοια υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : G \to F$ που επεκτείνει την $Y \xrightarrow{f^{-1}} X \hookrightarrow F$.

Άρα $\psi\varphi : F \to F$ επεκτείνει τον εγκλεισμό $X \hookrightarrow F$, άρα $\psi\varphi = id_F$.

Παρόμοια, $\varphi\psi = id_G$, και φ είναι ισομορφισμός. //

<u>Θεώρημα</u> Η τάξη μιας ελεύθερης ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης της,

$$\mathrm{rank}\, F = |X|.$$

<u>Πρόταση</u> Μία ελεύθερη ομάδα F στο X παράγεται από το σύνολο X.

<u>Απ.</u> Η ελεύθερη ομάδα στο X που κατασκευάσαμε παράγεται από το X. Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, κάθε άλλη ελεύθερη ομάδα στο X είναι ισομορφική, και συνεπώς παράγεται από το X.

<u>Θεώρημα</u> (Προβολική ιδιότητα)

F είναι ελεύθερη ομάδα εάν και μόνον εάν έχει την ιδιότητα:
Εάν β είναι επιμορφισμός, και α ομομορφισμός,
τότε υπάρχει ομομορφισμός γ τ.ω. $\alpha = \beta \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

<u>Απ</u>

$\Rightarrow$ F ελεύθερη στο X. Για $x \in X$, υπάρχει b_x τ.ω.
$\beta(b_x) = \alpha(x)$.

Θεώρησε $f : X \longrightarrow B : x \longmapsto b_x$,

Αφού F ελεύθερη, υπάρχει ομομορφισμός $\gamma : F \longrightarrow B$
τ.ω. $\gamma(x) = f(x)$ για $x \in X$.

$\beta \circ \gamma$ και α είναι ίσοι στο X, και από
μοναδικότητα είναι ίσοι.

$\Leftarrow$ αργότερα.