Ένας ομομορφισμός $\varphi : G \to G$ είναι <u>συστολή</u> (retraction) εάν $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

<u>Πρόταση</u> Εάν $\varphi : G \longrightarrow G$ είναι συστολή, $K = \ker \varphi$, και $L = \operatorname{im} \varphi$, τότε για κάθε $g \in L$, $\varphi(g) = g$, και

1) $G = KL$ και $K \cap L = 1$.

2) K είναι η κανονική υποομάδα που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $g\,\varphi(g^{-1})$ για $g \in G$.

<u>Απ.</u>

1) Έστω $g \in G$. Τότε $\varphi(g\,\varphi(g^{-1})) = \varphi(g)\,\varphi\circ\varphi(g^{-1}) = 1$.

Άρα $g\,\varphi(g^{-1}) \in K$ και $g = (g\,\varphi(g^{-1}))\,\varphi(g) \in KL$.

Εάν $g \in K \cap L$ τότε $\varphi(g) = 1$ και $\varphi(g) = g$, άρα $g = 1$.

2) Εάν $u \in K$, τότε $\varphi(u) = 1$ και $u = u\,\varphi(u^{-1})$.

Εάν $g \in G$, $\varphi(g\,\varphi(g^{-1})) = 1$, άρα $g\,\varphi(g^{-1}) \in K$. //

Θεώρημα Nielsen – Schreier.

Κάθε υποομάδα μίας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη ομάδα.

Απ.

Θεωρούμε ελεύθερη ομάδα F, με σύνολο γεννητόρων X, και υποομάδα $S \leq F$.

${}_S\backslash F = \{ Sb : b \in F \}$ το σύνολο των δεξιών πλευρικών συνόλων της S στην F, και $\mathcal{T}$ ένα <u>εγκάρσιο</u> σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε $Sb \in {}_S\backslash F$. Υποθέτουμε ότι $1 \in \mathcal{T}$.

(Άρα $1 \in \mathcal{T} \subseteq F$, $\bigcup_{b \in \mathcal{T}} Sb = F$,

$Sb \cap Sa = \emptyset$ για $a, b \in \mathcal{T}$, $a \neq b$.).

Για κάθε $u \in F$, ορίζουμε $\rho_u : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$,

$\rho_u(b) \in \mathcal{T} \cap Sbu$, ο αντιπρόσωπος στο $\mathcal{T}$ του πλευρικού συνόλου Sbu. ρ είναι δεξιά δράση: $\rho_{uv} = \rho_v \circ \rho_u$. (1)

Για κάθε $b \in \mathcal{T}$, $x \in X$, ορίζουμε

$$t_{b,x} = b\, x\, \rho_x(b)^{-1} \in S \qquad (2)$$

αφού $\rho_x(b) \in Sbx$.

$t_{b,x}$ είναι το στοιχείο της S με το οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $\rho_x(b)$ για να πάρουμε το bx: $t_{b,x}\,\rho_x(b) = bx$.

Εξαρτάται από την επιλογή του εγκάρσιου συνόλου $\mathcal{T}$.

Ορίζουμε ελεύθερη ομάδα Y, με σύνολο γεννητόρων $\mathcal{T}\times X$. Συμβολίζουμε τους γεννήτορες της Y, $y_{b,x}$.

Ορίζουμε απεικονίσεις (όχι ομομορφισμούς)

$\sigma_b : F \longrightarrow Y$ για κάθε $b \in \mathcal{T}$, τ.ω.

$$\sigma_b(1) = 1, \quad \sigma_b(x) = y_{b,x}, \quad \sigma_b(x^{-1}) = \left(y_{\rho_{x^{-1}}(b),\,x}\right)^{-1} \qquad (3)$$

και

$$\sigma_b(uv) = \sigma_b(u)\,\sigma_{\rho_u(b)}(v). \qquad (4)$$

Οι (3) είναι συμβατές με την (4), δηλαδή

$$\sigma_b(x x^{-1}) = \sigma_b(x)\,\sigma_{\rho_x(b)}(x^{-1}) \qquad \rho_x(b) \in \mathcal{T}\cap Sbx$$

$$= y_{b,x}\left(y_{\rho_{x^{-1}}(\rho_x(b)),\,x}\right)^{-1}$$

αλλά $\rho_{x^{-1}}(\rho_x(b)) \in \mathcal{T}\cap Sbxx^{-1} = \{b\}$.

και συνεπώς $\sigma_b(xx^{-1}) = y_{b,x}\,(y_{b,x})^{-1} = 1$.

και έχουμε, για κάθε $u \in F$,

$$\sigma_b(u^{-1}) = \left(\sigma_{\rho_{u^{-1}}(b)}(u)\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Ορίζουμε ομομορφισμό $\alpha : Y \longrightarrow S : y_{b,x} \longmapsto t_{b,x}$.

<u>Λήμμα</u> $\quad \alpha(\sigma_b(u)) = b\, u \left(\rho_u(b)\right)^{-1}. \qquad (6)$

<u>Απ.</u> Από τη (3),

$$\alpha(\sigma_b(1)) = \alpha(1) = 1$$

$$\alpha(\sigma_b(x)) = \alpha(y_{b,x}) = t_{b,x} = b\, x \left(\rho_x(b)\right)^{-1}$$

$$\alpha(\sigma_b(x^{-1})) = \alpha\left(\left(y_{\rho_{x^{-1}}(b),\, x}\right)^{-1}\right) = \left(t_{\rho_{x^{-1}}(b),\, x}\right)^{-1}$$

$$= \left(\rho_{x^{-1}}(b)\, x \left(\rho_x\left(\rho_{x^{-1}}(b)\right)\right)^{-1}\right)^{-1}$$

Αλλά $\rho_x(\rho_{x^{-1}}(b)) \in \mathcal{T} \cap S b x^{-1} x = \{b\}$, άρα

$$\alpha(\sigma_b(x^{-1})) = b\, x^{-1} \left(\rho_{x^{-1}}(b)\right)^{-1}$$

Υποθέτουμε ότι για λέξεις u μήκους $l(u) \leq n$,

$$\alpha(\sigma_b(u)) = b\, u \left(\rho_u(b)\right)^{-1},$$

και θεωρούμε $v = x^{\varepsilon} u$ με $\ell(v) = n+1$.

Τότε $\sigma_b(v) = \sigma_b(x^{\varepsilon}) \, \sigma_{\rho_{x^{\varepsilon}}(b)}(u)$

και $\alpha(\sigma_b(v)) = \alpha(\sigma_b(x^{\varepsilon})) \, \alpha(\sigma_{\rho_{x^{\varepsilon}}(b)}(u))$

και από την (6) $= b\, x^{\varepsilon} (\rho_{x^{\varepsilon}}(b))^{-1} \rho_{x^{\varepsilon}}(b)\, u \left(\rho_u(\rho_{x^{\varepsilon}}(b))\right)^{-1}$

$$= b\, x^{\varepsilon} u \left(\rho_{x^{\varepsilon} u}(b)\right)^{-1} = b\, v (\rho_v(b))^{-1}.$$

//.

Τώρα ορίζουμε $\beta : S \longrightarrow Y : u \longmapsto \sigma_1(u)$.

Τότε $\beta(uv) = \sigma_1(uv) = \sigma_1(u)\, \sigma_{\rho_u(1)}(v)$

αλλά $\rho_u(1) \in \mathcal{T} \cap S1u = \{1\}$, αφού $S1u = S$.

Άρα $\beta(uv) = \sigma_1(u)\, \sigma_1(v) = \beta(u)\beta(v)$,

δηλαδή β είναι ομομορφισμός.

$$\alpha \circ \beta(u) = \alpha(\sigma_1(u)) \overset{\text{από την (6)}}{=} 1\, u (\rho_u(1))^{-1} = u.$$

Αφού $\alpha \circ \beta = id_S$, β είναι μονομορφισμός

και α είναι επιμορφισμός. Άρα $S \cong Y/_{\ker \alpha}$,

και αφού $\alpha(y_{b,x}) = t_{b,x}$, S παράγεται από τα $t_{b,x}$

για $b \in \mathcal{T}$ και $x \in X$.

Θεωρούμε $\varphi = \beta \circ \alpha : Y \longrightarrow Y$.

Τότε $\varphi \circ \varphi = \beta\alpha\beta\alpha = \beta(\alpha\beta)\alpha = \beta\alpha = \varphi$.

Άρα φ είναι συστολή επί την υποομάδα $L = \operatorname{im}\varphi \leq Y$,

και $L \cong Y/_{\ker\varphi}$.

Αφού β είναι μονομορφισμός, $\ker\varphi = \ker\alpha$.

Άρα $S \cong Y/_{\ker\alpha} = Y/_{\ker\varphi} \cong L$.

Θέτουμε $K = \ker\varphi$.

Αφού φ είναι συστολή, K είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από τα $u\,\varphi(u^{-1})$, για $u \in Y$.

Αλλά

$$y_1 y_2\, \varphi((y_1 y_2)^{-1}) = y_1\, y_2\, \varphi(y_2^{-1})\, \varphi(y_1^{-1})$$

$$= y_1\, \varphi(y_1^{-1})\ \varphi(y_1)\, y_2\, \varphi(y_2^{-1})\ \varphi(y_1^{-1})$$

και αφού Y παράγεται από τα $y_{b,x}$, $b \in \mathcal{T}$, $x \in X$,

με επαγωγή έχουμε ότι K είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από τα $y_{b,x}\,\varphi(y_{b,x}^{-1})$, $b \in \mathcal{T}$, $x \in X$.

Καταλήγουμε σε μία πρώτη παράσταση για την S:

$$S \cong \left(y_{b,x},\ b \in \mathcal{T},\ x \in X \;\middle|\; y_{b,x}\,\varphi(y_{b,x}^{-1}),\ b \in \mathcal{T},\ x \in X \right).$$