Στο επόμενο Λήμμα θα βρούμε μια πιο οικονομική παράσταση της S, με λιγότερες σχέσεις.

<u>Λήμμα</u> $S \cong \langle y_{b,x},\ b\in\mathcal{T},\ x\in X \mid \sigma_1(b),\ b\in\mathcal{T} \rangle$

Δηλαδή $S \cong Y/_N$ όπου N είναι η κανονική ομάδα της Y που παράγεται από το σύνολο $\{\sigma_1(b) : b\in\mathcal{T}\}$.

<u>Απ.</u> Θεωρούμε $K = \ker\varphi$. Τότε $S \cong Y/_K$.

Θα δείξουμε ότι $K = N$.

Εαν $b\in\mathcal{T}$, τότε

$$\varphi(\sigma_1(b)) = \beta\circ\alpha(\sigma_1(b))$$

από την (6) $= \beta(1\, b\, (\rho_b(1))^{-1})$

και αφού $\rho_b(1) = b$, $= \beta(1)$

$= 1.$

Άρα $N \subseteq K$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $y_{b,x}\,\varphi(y_{b,x}^{-1}) \in N$, και αντεπώς $K \subseteq N$.

Έχουμε

$$\varphi(y_{b,x}) = \beta \circ \alpha(y_{b,x})$$

$$= \beta(t_{b,x})$$

$$= \sigma_1(t_{b,x})$$

$$= \sigma_1(b\,x\,u^{-1}) \qquad \text{όπου } u = \rho_x(b) \in \mathcal{T} \cap Sbx.$$

$$= \sigma_1(b)\;\sigma_b(x u^{-1})$$

$$= \sigma_1(b)\;\sigma_b(x)\;\sigma_{\rho_x(b)}(u^{-1})$$

αλλά $\sigma_b(x) = y_{b,x}$, άρα $= \sigma_1(b)\; y_{b,x}\; \sigma_u(u^{-1})$.

Αλλά $1 = \sigma_u(u^{-1}u) = \sigma_u(u^{-1})\;\sigma_{\rho_{u^{-1}}(u)}(u)$,

όπου $\rho_{u^{-1}}(u) \in \mathcal{T} \cap S u^{-1}u = \mathcal{T} \cap S = 1$.

Άρα $\sigma_u(u^{-1}) = \left(\sigma_1(u)\right)^{-1}$.

Συνεπώς

$$\varphi(y_{b,x}) = \sigma_1(b)\; y_{b,x}\left(\sigma_1(u)\right)^{-1},$$

και

$$\varphi(y_{b,x}^{-1}) = \sigma_1(u)\; y_{b,x}^{-1}\left(\sigma_1(b)\right)^{-1}$$

άρα $y_{b,x}\,\varphi(y_{b,x}^{-1}) = y_{b,x}\,\sigma_1(u)\, y_{b,x}^{-1}\;\sigma_1(b) \in N$. //.

Για να ολοκληρώσουμε περαιτέρω την παράσταση της S, επιλέγουμε ένα κατάλληλο εγκάρσιο σύνολο.

<u>Λήμμα</u> Υπάρχει εγκάρσιο σύνολο $\mathcal{B}$ της S στην F τ.ω. εάν $b \in \mathcal{B}$ και $b = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ είναι ανηγμένη λέξη στο X, τότε $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k} \in \mathcal{B}$ για $1 < k \leq n$.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε το μήκος ενός πλευρικού συνόλου

$$\ell(Sg) = \min \{ \ell(h) : h \in Sg \}.$$

Επιλέγουμε $\mathcal{B} \cap S = \{1\}$. Υποθέτουμε ότι για $\ell(Sz) \leq n$, έχουμε επιλέξει $\mathcal{B} \cap Sz = \{b\}$, με την ιδιότητα ότι κάθε αρχικό τμήμα του b ανήκει επίσης στο $\mathcal{B}$.

Έστω w τ.ω. $\ell(Sw) = n+1$. Υπάρχει $w' \in Sw$ με $\ell(w') = n+1$, και $w' = ux^{\varepsilon}$, για κάποια ανηγμένη λέξη u, $x \in X$ και $\varepsilon = \pm 1$.
Αλλά τότε $\ell(Su) = n$, και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $b \in \mathcal{B}$ τ.ω. $Su = Sb$. Επιλέγουμε το bx^{ε} ως αντιπρόσωπο του Sw. //

Ένα εγκάρσιο σύνολο με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται <u>εγκάρσιο σύνολο Schreier.</u>

<u>Λήμμα</u> Εάν $\mathcal{B}$ είναι ένα πλήρες σύνολο Schreier για την S στην F, τότε S είναι ελεύθερη στο σύνολο των $y_{b,x}$, $b \in \mathcal{B}$, $x \in X$, για τα οποία $t_{b,x} \neq 1$.

<u>Απ.</u> Θα δείξουμε ότι η κανονική υποομάδα N που παράγεται από τα $\sigma_1(b)$, $b \in \mathcal{B}$, είναι ίση με την κανονική υποομάδα M που παράγεται από τα $y_{b,x}$, $b \in \mathcal{B}$, $x \in X$, με $t_{b,x} = 1$.

Αφού $\alpha(y_{b,x}) = t_{b,x}$, εάν $t_{b,x} = 1$, $\varphi(y_{b,x}) = 1$ και συνεπώς $y_{b,x} = y_{b,x}\varphi(y_{b,x}^{-1}) \in K = N$.
Συνεπώς $M \subseteq N$.

Θα δείξουμε ότι όταν $\mathcal{B}$ είναι πλήρες Schreier, $\sigma_1(b) \in M$ με επαγωγή στο μήκος $\ell(b)$.
Εάν $\ell(b) = 0$, $b = 1$ και $\sigma_1(1) = 1 \in M$.
Εάν $\ell(b) > 0$, τότε $b = u x^{\varepsilon}$, όπου $\varepsilon = \pm 1$, $\ell(u) < \ell(b)$ και $u \in \mathcal{B}$. Άρα $\rho_u(1) = u$, και

$$\sigma_1(b) = \sigma_1(u)\, \sigma_u(x^{\varepsilon}).$$

Από την επαγωγική υπόθεση, $\sigma_1(u) \in M$.

Εάν $\varepsilon = +1$, είναι $\sigma_u(x^\varepsilon) = \sigma_u(x) = y_{u,x}$.

$$t_{u,x} = \alpha(y_{u,x}) = \alpha(\sigma_u(x))$$

από την 6 $\qquad = u\,x\,(\rho_x(u))^{-1}$

και αφού $\rho_x(u) = ux$, $\qquad = u\,x\,(ux)^{-1} = 1.$

Άρα $\sigma_u(x^\varepsilon) \in M$.

Εάν $\varepsilon = -1$, τότε $u = bx = \rho_x(b)$ και

$$\sigma_u(x^\varepsilon) = \sigma_u(x^{-1}) = \sigma_{\rho_x(b)}(x^{-1})$$

από 3 $\qquad = \left(y_{\rho_{x^{-1}}(\rho_x(b)),\,x}\right)^{-1}$

Αφού $\rho_x(b) \in Sbx$, $\rho_{x^{-1}}(\rho_x(b)) \in Sbxx^{-1}$, άρα $\qquad = (y_{b,x})^{-1}$.

Άρα $\alpha(\sigma_u(x^{-1})) = \alpha(y_{b,x}^{-1})$

$$= t_{b,x}^{-1}$$

από 2 $\qquad = \left(b\,x\,(\rho_x(b))^{-1}\right)^{-1}$

$$= (ux^{-1}\,x\,u^{-1})^{-1}$$

$$= 1.$$

Άρα $\sigma_u(x^\varepsilon) \in M$.

Συμπεραίνουμε ότι κάθε $\sigma_1(b) \in M$, και συνεπώς

$$N = M.$$

<u>Θεώρημα</u> Εάν F είναι ελεύθερη ομάδα με $\operatorname{rank} F = n$, και S είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη j, τότε

$$\operatorname{rank} S = nj - j + 1.$$

<u>Απ.</u> Υπάρχουν nj στοιχεία $y_{b,x}$. Θα δείξουμε ότι για ακριβώς $j-1$ από αυτά, $t_{b,x} = 1$. Για κάθε πλευρικό σύνολο $Sa \neq S$, ορίζουμε $\varphi(Sa)$ ως εξής. Εάν $\rho_1(a) = b$, γράφουμε $b = ux^\varepsilon$ όπου $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$, και u ανηγμένη λέξη. Θέτουμε

$$\varphi(Sa) = \begin{cases} (b, x) & \text{εάν } \varepsilon = -1 \\ (u, x) & \text{εάν } \varepsilon = +1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι εάν $\varepsilon = -1$, τότε $t_{b,x} = 1$, ενώ εάν $\varepsilon = +1$, $t_{u,x} = 1$. Αφού $t_{a,x} = 1$ σημαίνει ακριβώς ότι $\rho_x(a) = ax$, κάθε (a,x) για το οποίο $t_{a,x} = 1$ βρίσκεται στην εικόνα του φ.

Θα δείξουμε ότι φ είναι 1-1. Έστω ότι $\varphi(Sa) = \varphi(Sb)$. Τότε $\rho_1(a)$ και $\rho_1(b)$ έχουν το ίδιο τελευταίο γράμμα, έστω x. Άρα $\rho_1(a) = ux^\varepsilon$ και $\rho_1(b) = vx^\delta$.

Εαν $\varepsilon = \delta = -1$, $\varphi(Sa) = (\rho_1(a), x)$ και

$\varphi(Sb) = (\rho_1(b), x)$, άρα $Sa = Sb$.

Εαν $\varepsilon = \delta = +1$, $\varphi(Sa) = (u, x)$, $\varphi(Sb) = (v, x)$,

άρα $u = v$ και $\rho_1(a) = ux = vx = \rho_1(b)$, δηλαδή $Sa = Sb$.

Εαν $\varepsilon = -1$ και $\delta = +1$, $\varphi(Sa) = (\rho_1(a), x)$ και

$\varphi(Sb) = (v, x)$, άρα $\rho_1(a) = v = \rho_1(b)\, x^{-1}$.

Αλλά $\rho_1(a) = ux^{-1}$, άρα $u = \rho_1(b)$ και η λέξη

u τελειώνει σε x^{+1}. Άτοπο, αφού από την υπόθεση,

ux^{-1} είναι ανηγμένη λέξη.

//.